

Zpracování signálu – shrnutí

Jan Černocký ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

FIT VUT Brno

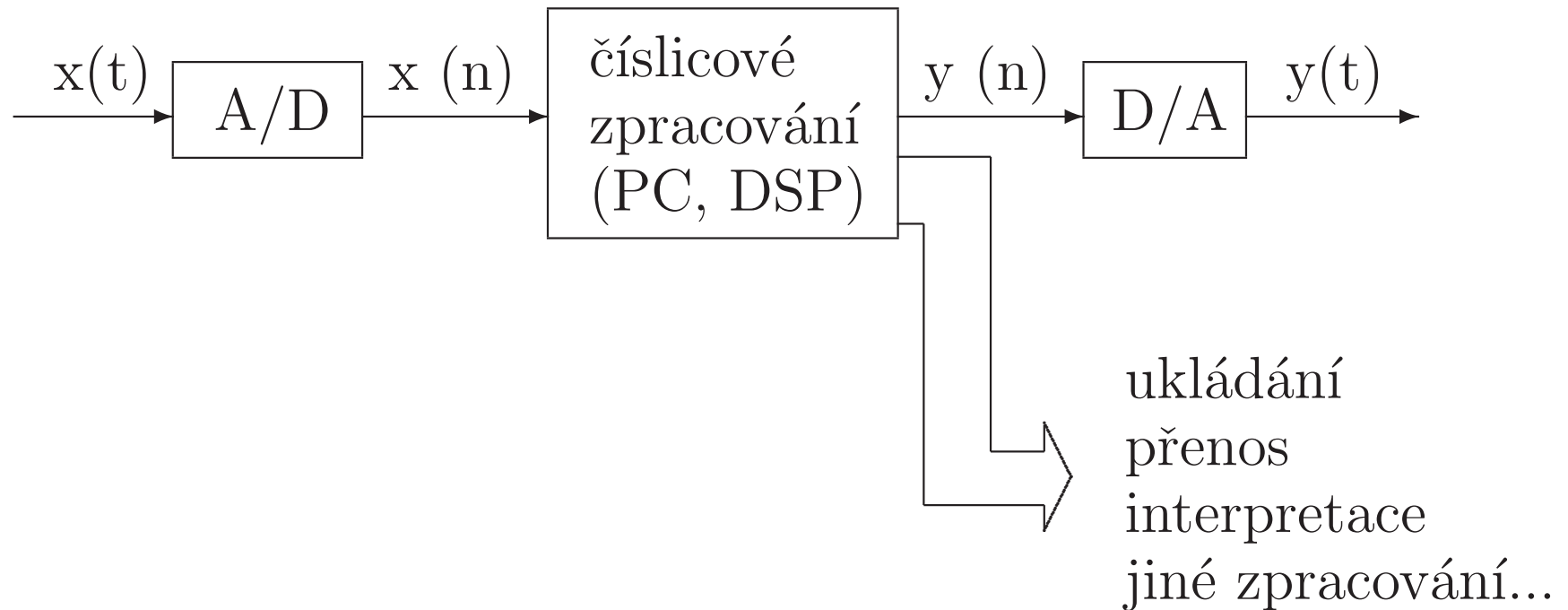
Plán

- Úvod
- Signály se spojitým časem a vzorkování
- Frekvenční analýza vzorkovaných signálů.
- Náhodné signály.
- Filtry.

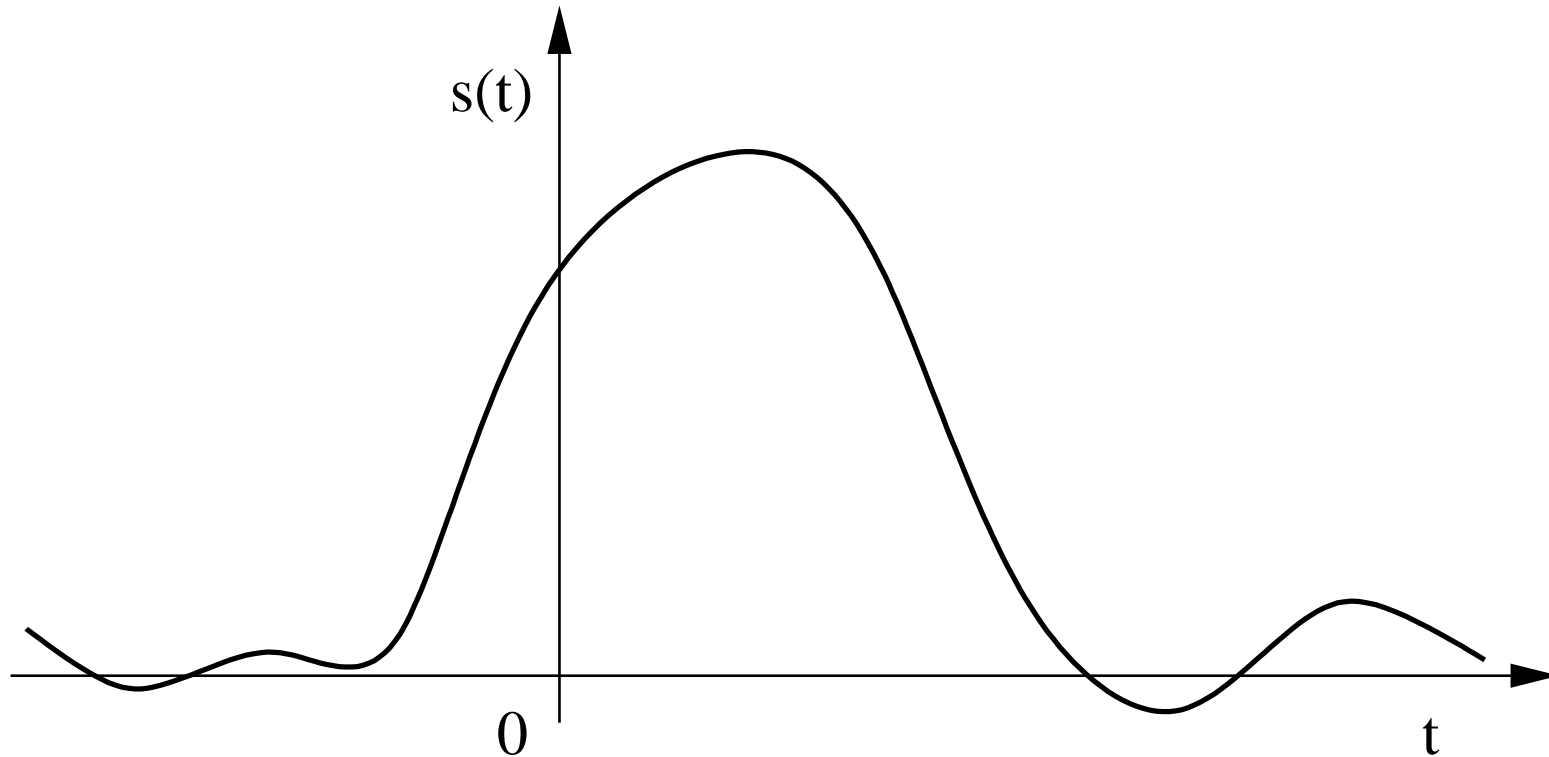
Proč číslicové zpracování signálů ?

- reproduktibilita (neexistují žádné tolerance součástek).
- neexistují změny kvůli stárnutí materiálů a teplotě.
- nemusí se složitě nastavovat (viděli jste, kolik je ve starých rádiích odporových trimrů?).
- možnost adaptivního zpracování (“přístroj se mění podle vstupního signálu”).
- simulace = aplikace.

Jak to obvykle vypadá...



Na začátku zpracování je signál se spojitým **časem**: je definován všude od $-\infty$ do ∞ , a čas má ∞ hodnot.



Pro representaci signálu ve **frekvenční oblasti (spektrum)**, použijeme Fourierovu transformaci:

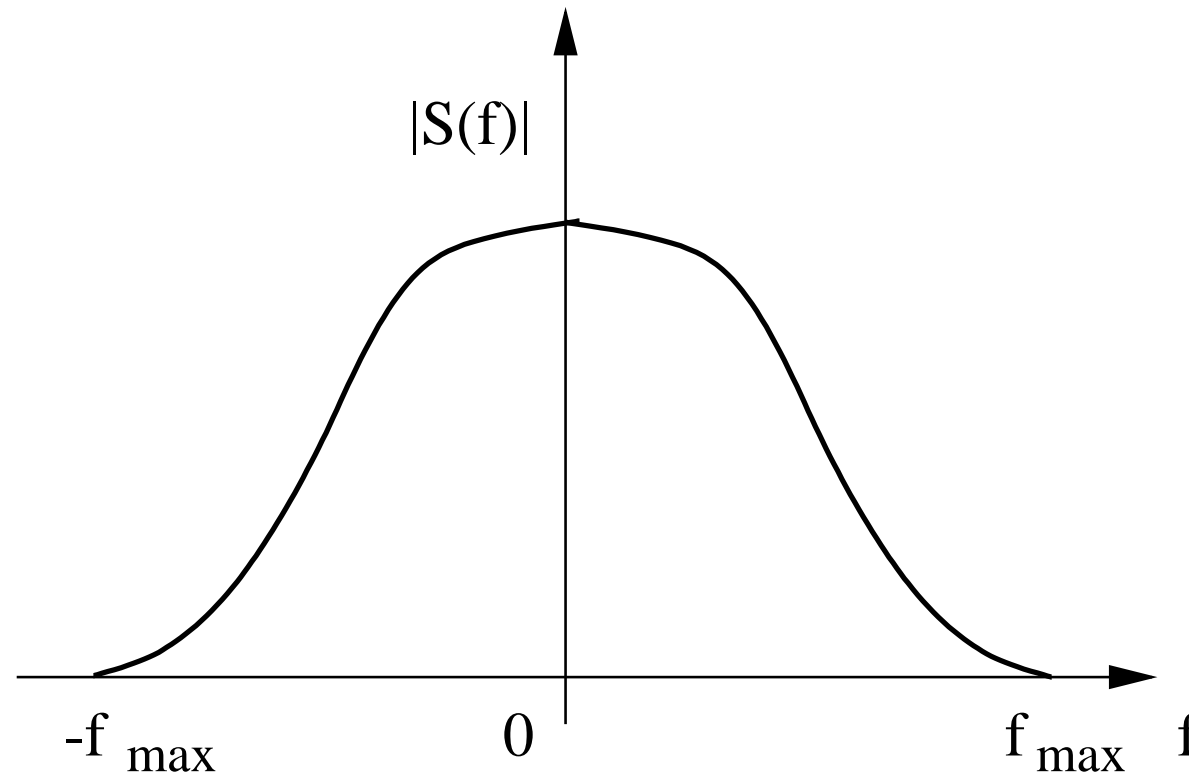
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt, \quad (1)$$

kde funkci $X(f)$ říkáme **spektrální funkce**, nebo krátce **spektrum**. Funkce je definována pro $\forall f$ od $-\infty$ do ∞ a je komplexní. Má modul $|X(f)|$ a argument $\angle X(f)$. Hovoříme o modulovém a argumentovém spektru. Pro reálné signály nám stačí znát pouze pravou část

spektrální funkce ($f > 0$), protože část levá je s ní komplexně sdružená:

$$X(f) = X^*(-f), \quad (2)$$

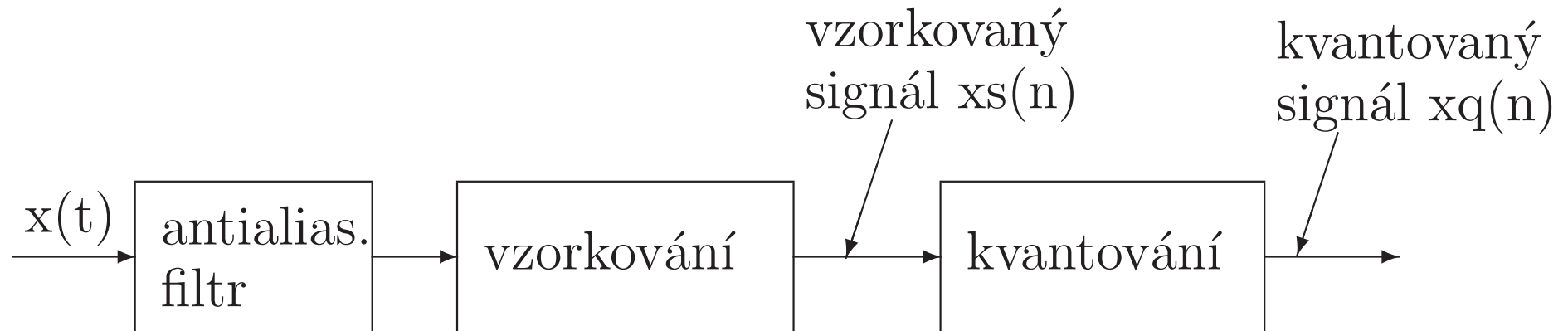
neboli $|X(f)| = |X(-f)|$ a $\arg X(f) = -\arg X(-f)$.



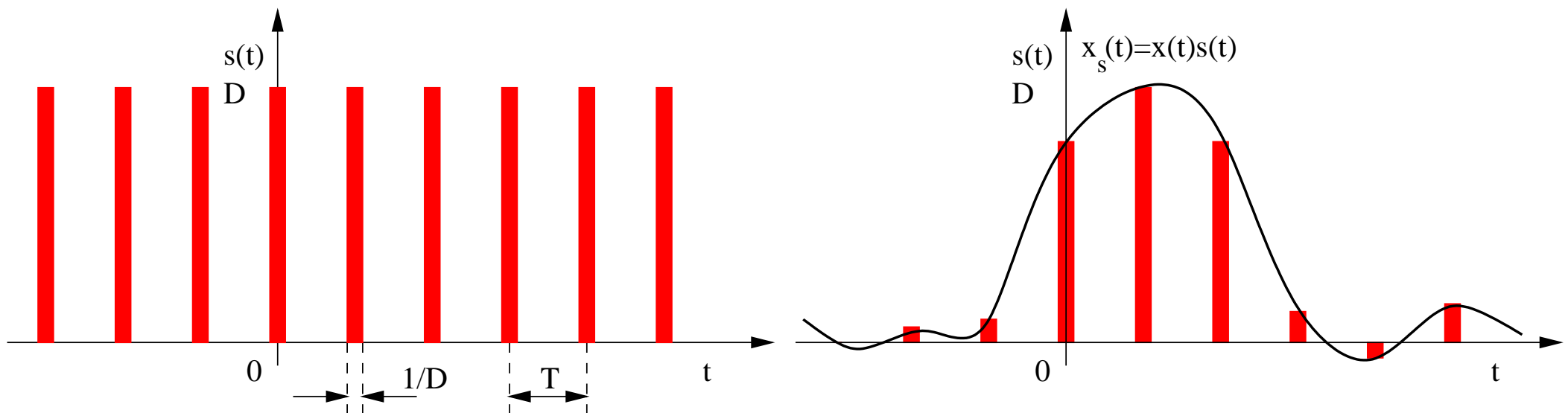
\Rightarrow Inteligentní signály jsou frekvenčně omezené (energie v pásmu $(0, f_{\max})$).

\Rightarrow spektrální funkce se **nedá spočítat** (nekonečna, integrál, ...).

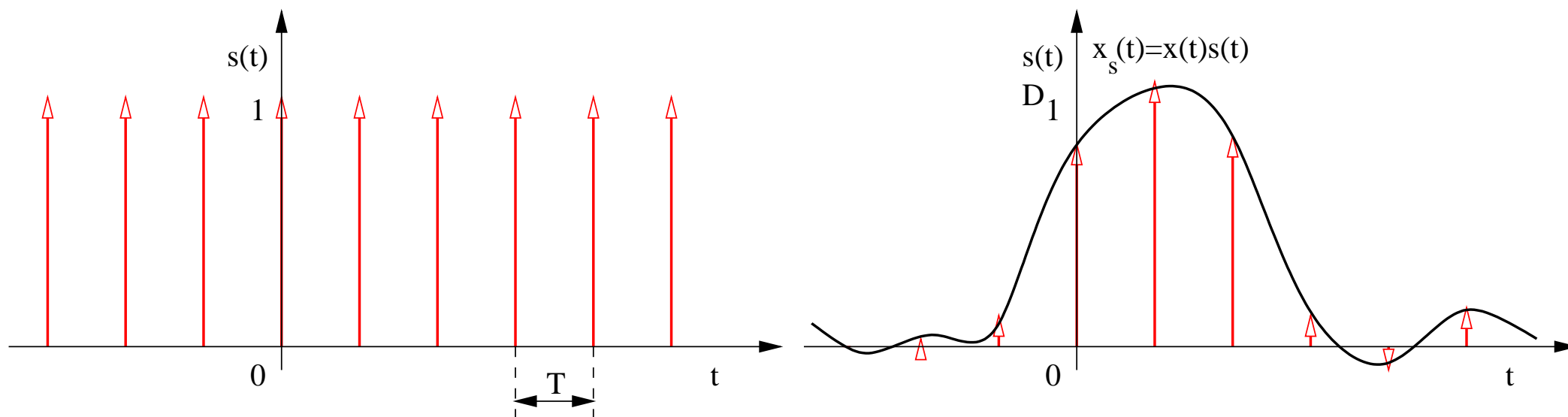
Analogově – číslicový (AD) převod



Vzorkovaný signál dostaneme tak, že původní signál vynásobíme něčím, co je periodické v čase.



Teoreticky vysvětlujeme vzorkování tak, že násobíme signál periodickým sledem Diracových impulsů (nekonečná výška, nulová šířka, plocha – “mocnost” 1). Po násobení dostaneme opět periodický sled Diracových impulsů, ale s mocnostmi danými hodnotami původního signálu v bodech nT :



T je vzorkovací perioda

$$F_s = \frac{1}{T} \text{ je vzorkovací frekvence}$$

Jak to vypadá se *spektr*em vzorkovaného signálu ? Periodizuje se !!!

$$X_s(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nF_s) \quad (3)$$

Podle vztahu maximální frekvence obsažené ve spektru signálu f_{max} a vzorkovací frekvence rozlišujeme dva případy:

- 1) $F_s > 2f_{max}$: Jednotlivé kopie původního spektra se nepřekrývají a původní signál můžeme *ideálně rekonstruovat* tak, že vzorkovaný signál vyfiltrujeme dolní propustí s mezním kmitočtem $F_s/2$.
- 2) $F_s \leq 2f_{max}$: Jednotlivé kopie původního spektra se překrývají, výsledné spektrum má *jiný* tvar než původní spektrum. Původní signál *nemůžeme* žádným způsobem rekonstruovat, dochází k takzvanému **aliasingu**.

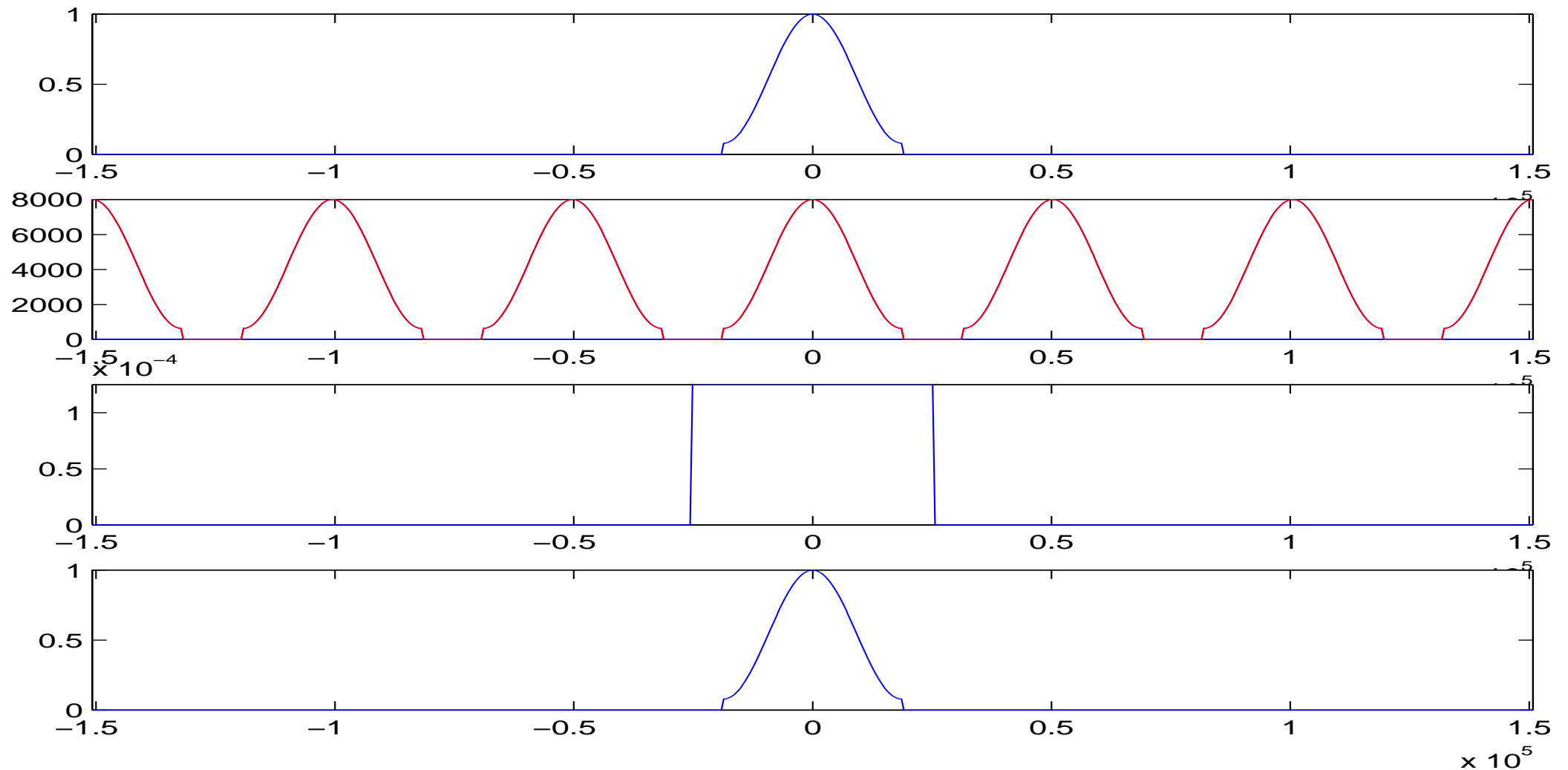
Shanonův–Kotelnikovův–Nyquistův–vzorkovací teorém

$$F_s > 2f_{max}$$

1. Příklad vzorkování a rekonstrukce – OK

$F_s = 8000 \text{ Hz}$, $f_{max} = 3000 \text{ Hz}$, a tedy $\Omega_s = 16000\pi \text{ rad/s}$, $\omega_{max} = 6000\pi \text{ rad/s}$.

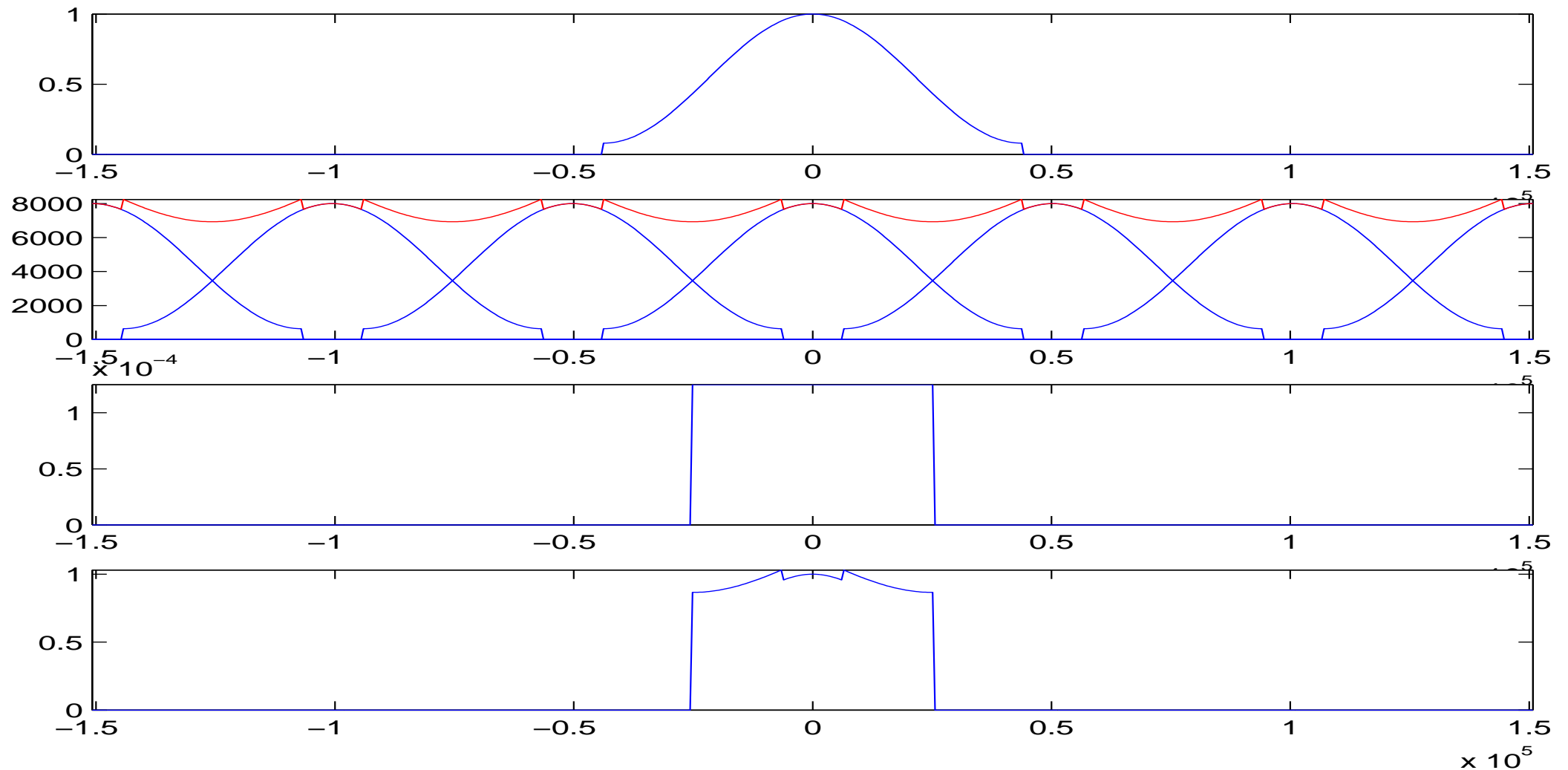
$$T = \frac{1}{8000} \text{ s}$$



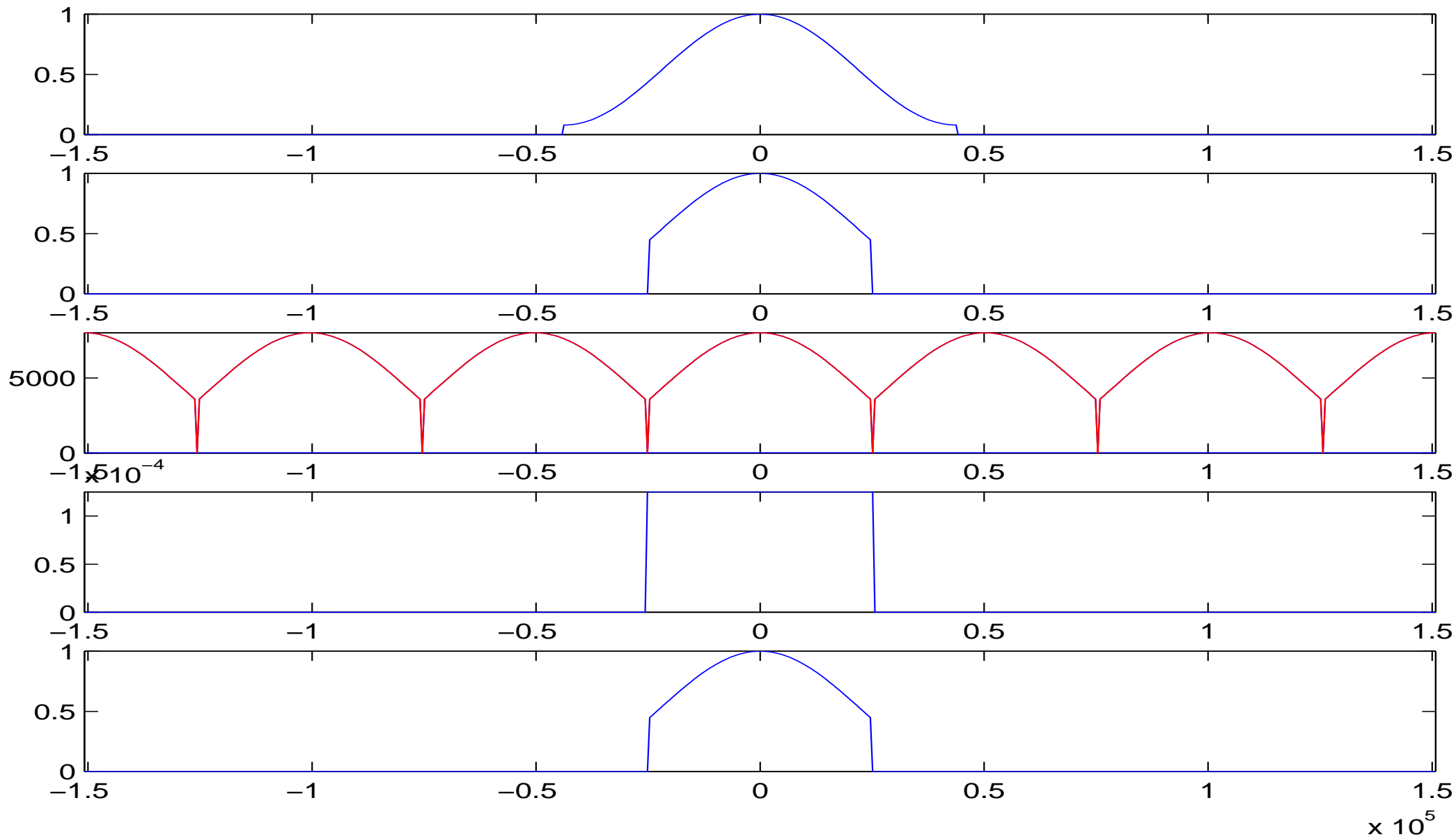
2. Příklad vzorkování a rekonstrukce – BAD

$F_s = 8000 \text{ Hz}$, $f_{max} = 7000 \text{ Hz}$, a tedy $\Omega_s = 16000\pi \text{ rad/s}$, $\omega_{max} = 14000\pi \text{ rad/s}$.

$$T = \frac{1}{8000} \text{ s}$$



Antialiasingový filtr – omezení na $[-F_s/2, F_s/2]$



Zápis vzorkovaného signálu

$x_s(nT)$ nebo také jen $x_s[n]$ — vzorkovaný signál není nic jiného než *posloupnost čísel*.

1. Máme-li vzorkovaný signál, musíme k němu dostat i informaci o vzorkovací frekvenci (implicitně: vzorky ze zvukové karty) přicházejí s periodou T , explicitně: např. hlavička souboru WAV).
2. počítáme-li se vzorkovanými signály, rádi se času zcela zbavíme. Budeme předpokládat periodu $T' = 1$, tedy $F'_s = 1$. Normovaný čas je pak dán:

$$t' = \frac{t}{T}, \quad \text{takže} \quad n = \frac{nT}{T} \quad (4)$$

a normovaná frekvence

$$f' = \frac{f}{F_s} \quad (5)$$

Jelikož jsou ale zpracovatelé signálu *lenoši*, čas většinou nepoužívají vůbec a fakt, že se jedná o normovanou frekvenci nijak neoznačují. Ve vzorcích se normovaná frekvence pozná tak, že blízko ní nikde nestojí žádný “pořádný čas” t ani vzorkovací perioda T .

Příklad

Napište funkci pro generování cosinusovky s frekvencí 200 Hz pro vzorkovací kmitočet $F_s = 8000$ Hz.

spojitý čas: $s(t) = \cos(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi 200 t)$.

při vzorkování nahradím spojitý čas t diskretním časem nT , kde T je vzorkovací perioda:

$$x(nT) = \cos(2\pi f_0 nT) = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{F_s}\right) n.$$

Frekvence $\frac{f_0}{F_s}$ je normovaná frekvence. Výsledný signál můžeme zapsat zapsat:

$$x(n) = \cos\left(2\pi \frac{1}{40} n\right).$$

Generování 1s takového signálu v Matlabu:

```
n = 0:7999;  
x = cos (2 * pi * 1 / 40 * n);  
wavwrite(x,8000,16,'sig.wav');
```

Chování vzorkovaného signálu ve frekvenční oblasti — spektrum

Diskrétní Fourierova transformace – DFT – definice:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad \text{pro } k \in \langle 0, N-1 \rangle \quad (6)$$

Jak to aplikovat na diskrétní signál?:

- analyzujeme “okno” o délce N vzorků.
- co bude vlastně výsledkem ? Vynásobím-li hodnoty $X(k)$ vzorkovací periodou T , dostanu aproximaci spektrální funkce ve frekvenčních bodech $k\Delta f$, kde $\Delta f = \frac{F_s}{N}$ (skutečná frekvence) nebo $\Delta f' = \frac{1}{N}$ (normovaná frekvence, i když, jak jsme si řekli, f' nikdo nepoužívá :-)

$$\hat{X}(k\Delta f) = T \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{nk}{N}} \quad (7)$$

$x[n]$ v této rovnici můžeme volně zaměnit za $x(nT)$.

Oproti spektrální funkci získané “analogovou” FT jsme ovšem v žádném případě nespočítali totéž !!!

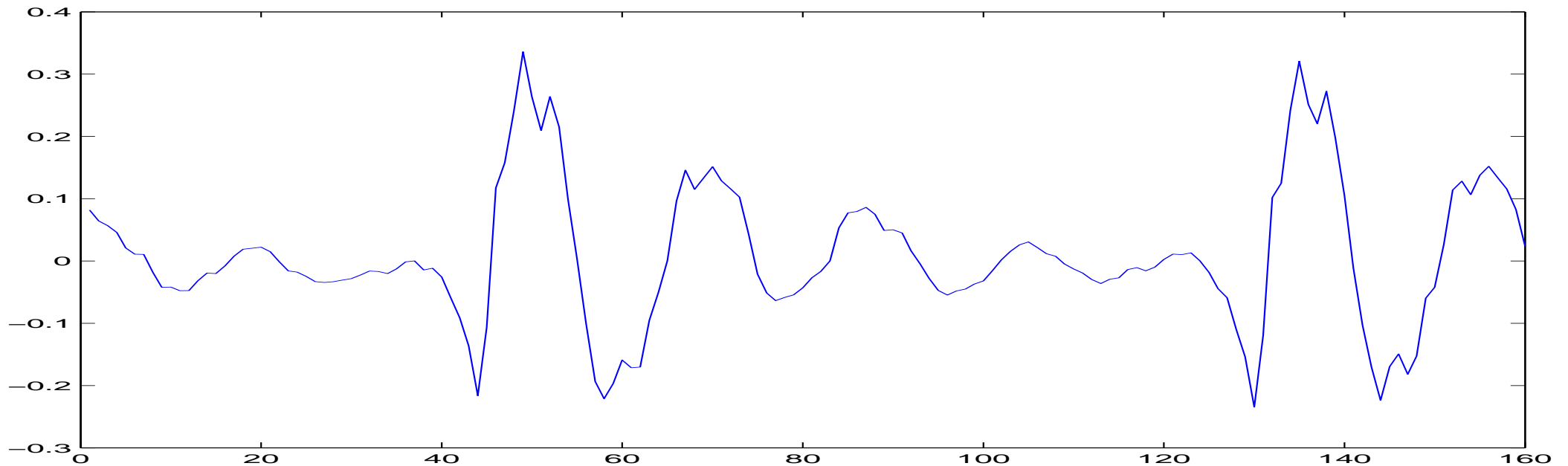
1. počítáme spektrum *vzorkovaného* signálu, takže je toto spektrum nutně *periodické*, a to s periodou N čísel, což odpovídá vzorkovací frekvenci F_s (u frekvence se raději vyhneme označení “vzorek”). Pokud necháme $k \in (-\infty, +\infty)$, zjistíme, že $\hat{X}(k\Delta f)$ se po N hodnotách opakuje.
2. signál jsme “vykousli” oknem. Spočtené spektrum nese i vlastnosti tohoto okna: okno v čase *násobí* signál, spektrum okna se tedy ve frekvenci konvoluuje se spektrem signálu. Toto s sebou často nese rozmazání teoreticky ostrých spektrálních čar (např. při analýze harmonického signálu). Více v předášce o předzpracování.
3. spektrum je *diskrétní* (máme k dispozici pouze N hodnot od 0 do F_s), takže jsme vlastně spočetli spektrum **periodického signálu** ! Můžeme si to představit tak, že okno signálu se ∞ -krát opakuje.

čas	frekvence
vzorkování	periodisace
periodisace	diskretisace

Jak na to prakticky ?

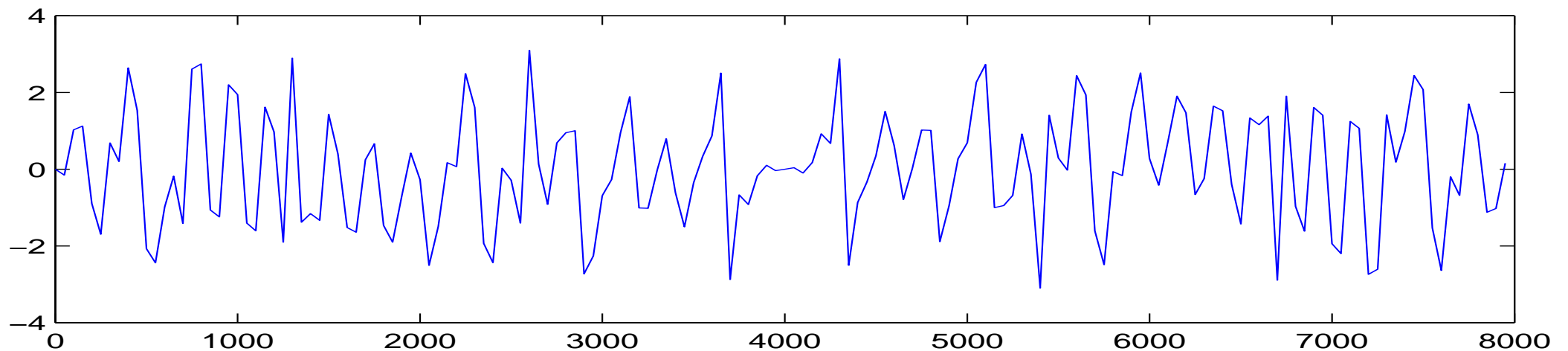
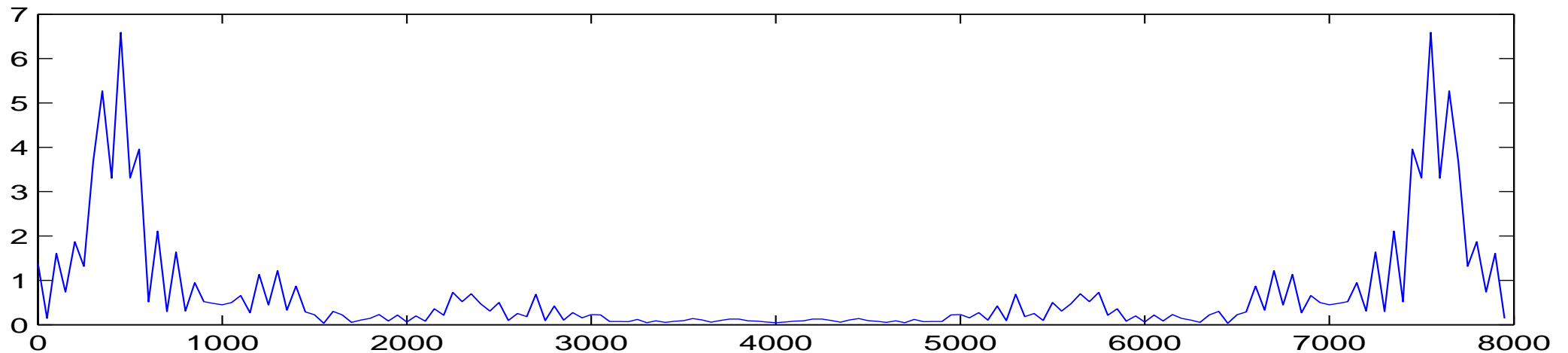
Chceme frekvenčně analyzovat jeden znělý řečový rámeček (č. 13 z “létajícího prasete”):

```
s = wavread('test.wav');  
sfr = frame (s,160,80);  
x = sfr(:,13);  
plot (x);
```



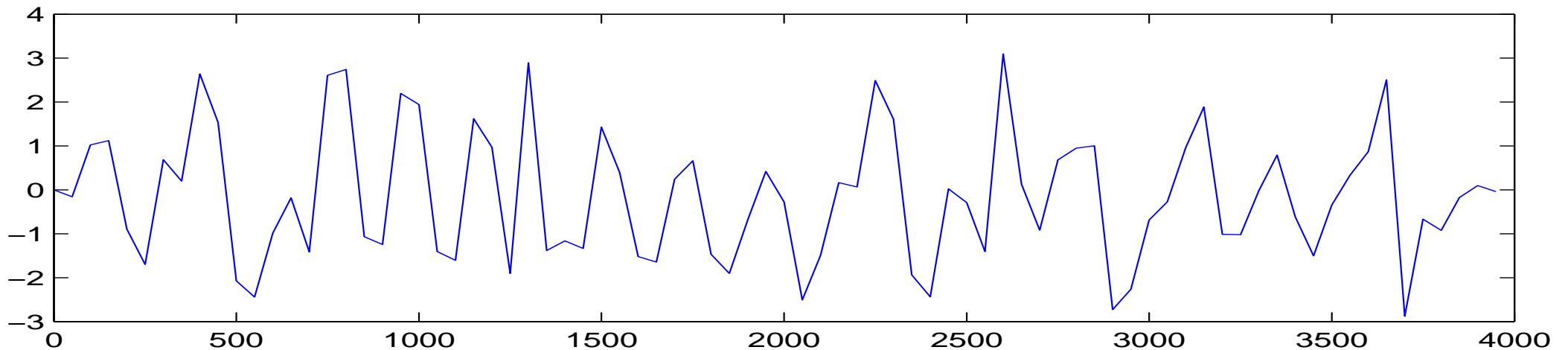
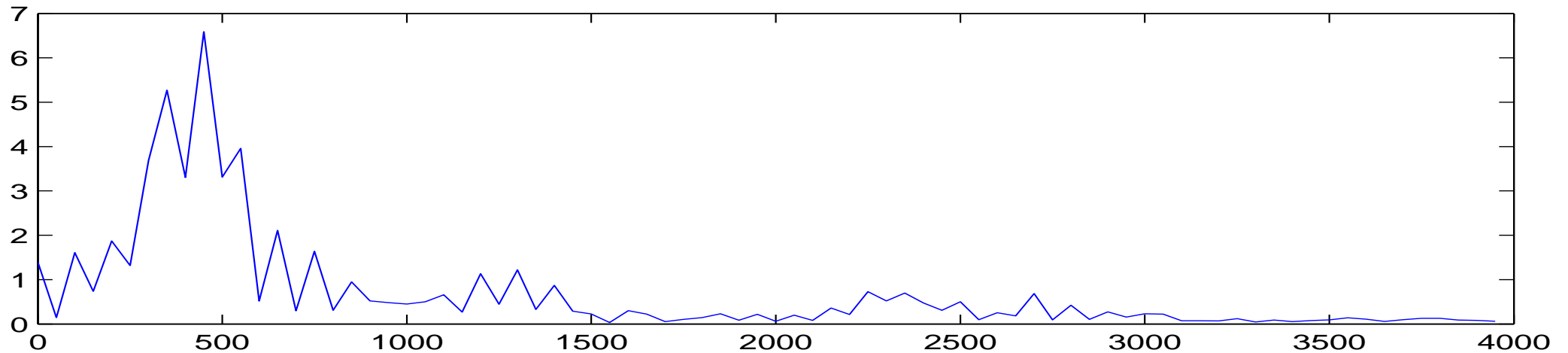
Pouze DFT – pozor na správnou frekvenční osu:

```
Fs = 8000; f = (0:159) / 160 * Fs; X = fft(x);  
subplot (211); plot(f,abs(X)); subplot (212); plot(f,angle(X));
```



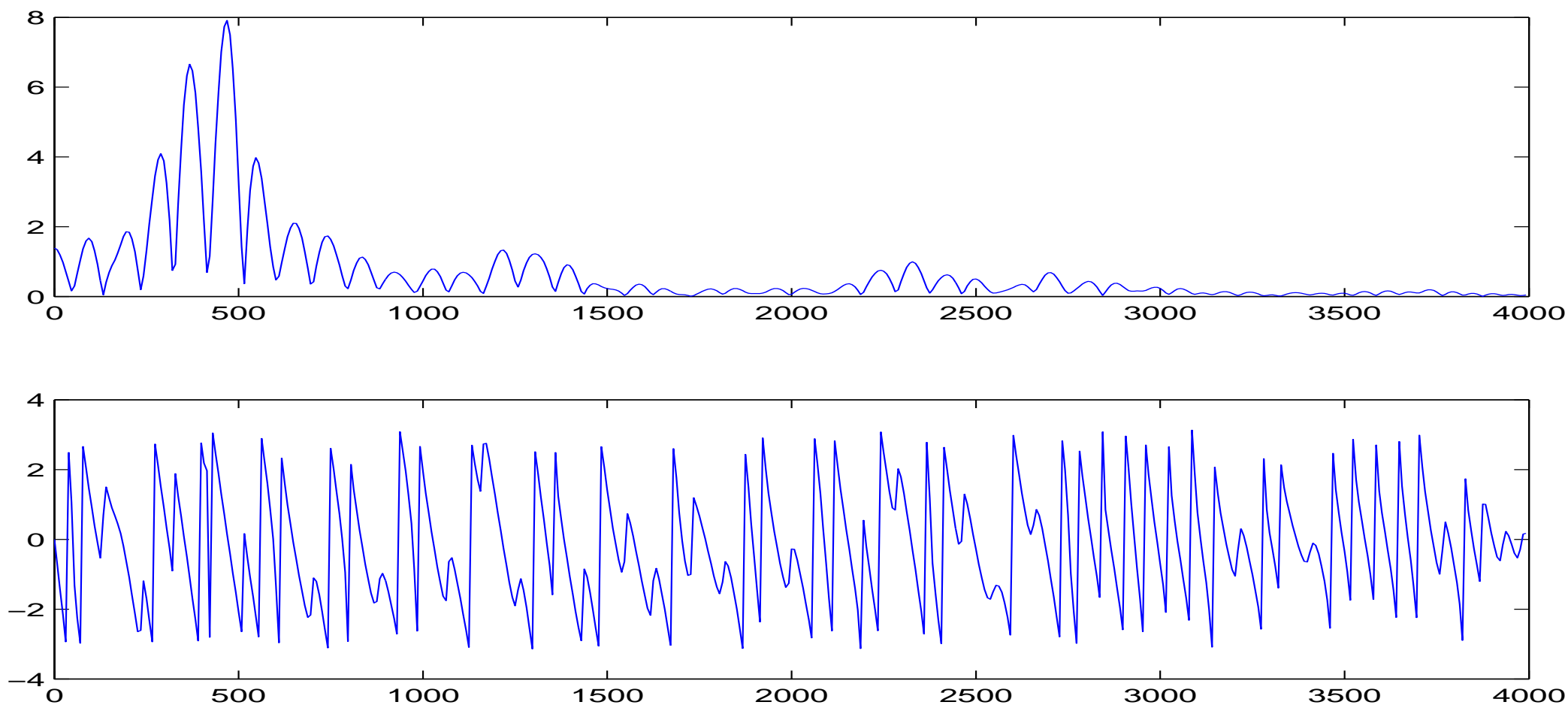
Pouze DFT – horní polovina je symetrická se spodní a moc nás nezajímá...

```
Fs = 8000; f = (0:79) / 160 * Fs; X = fft(x); X = X(1:80);  
subplot (211); plot(f,abs(X)); subplot (212); plot(f,angle(X));
```



Možná bychom chtěli ve spektru více bodů - máme ale k dispozici jen jeden rámeček a nemůžeme jej prodloužit \Rightarrow **zero padding**

```
Fs = 8000; f = (0:511) / 1024 * Fs;  
X = fft([x' zeros(1,1024-160)]); X = X(1:512);  
subplot (211); plot(f,abs(X)); subplot (212); plot(f,angle(X));
```



FREKVENČNÍ ANALÝZA HÁHODNÝCH SIGNÁLŮ

Z hlediska teorie se řečové signály pokládají za **náhodné**. Měly by se tedy frekvenčně analyzovat pomocí **spektrální hustoty výkonu (power spectral density – PSD)**, která je reálná a udává rozdělení výkonu ve frekvenční oblasti. Jeden z odhadů PSD využívá DFT:

$$\hat{G}_{DFT}(k\Delta f) = \frac{1}{N} |X[k]|^2.$$

jedná se tedy pouze o absolutní hodnotu modulů na druhou.

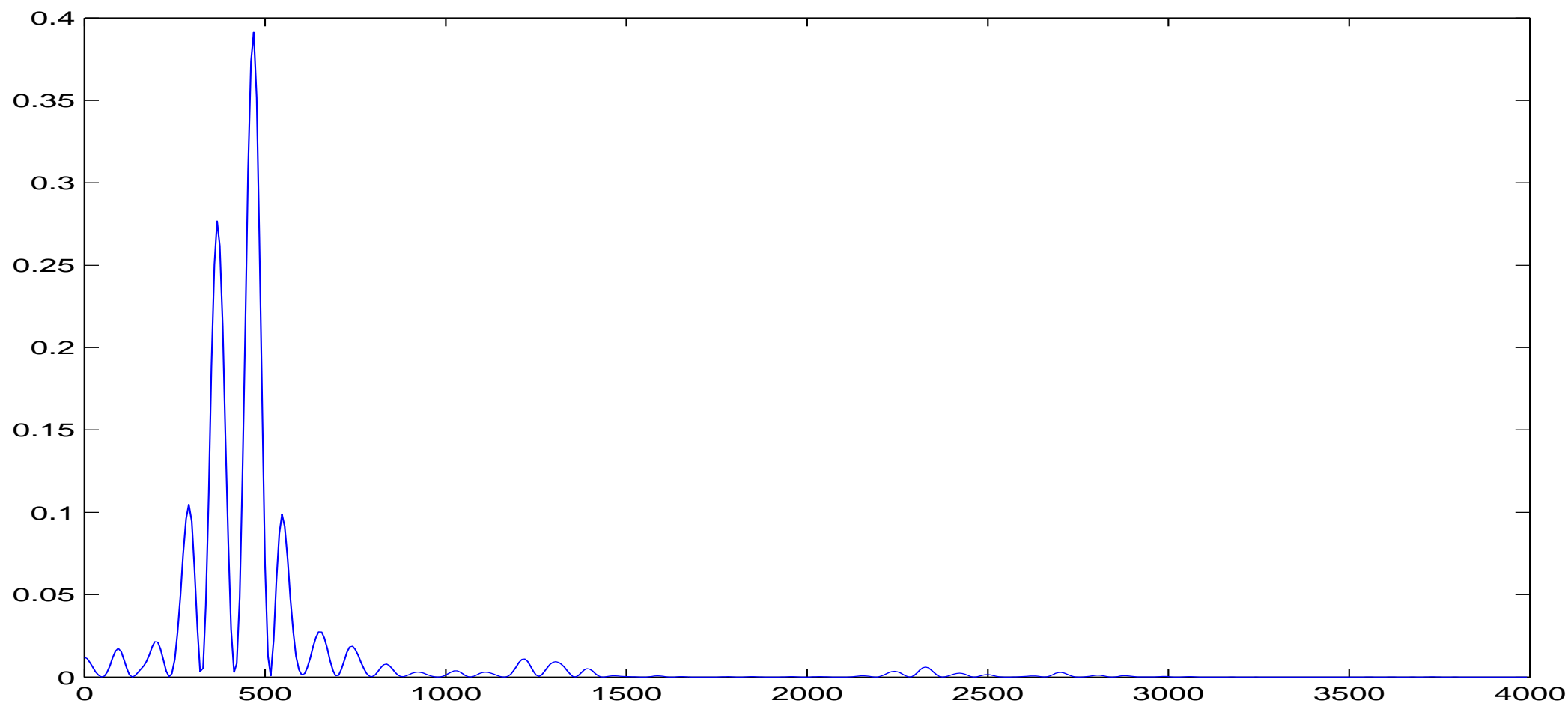
⇒ v Matlabu si dáme na výpočet $|X[k]|^2$. pozor – druhá mocnina komplexního čísla není totéž co druhá mocnina modulu komplexního čísla:

- `X = fft(x); Gdft = X .^ 2;` špatně !
- `X = fft(x); Gdft = abs(X) .^ 2;` dobře !
- `X = fft(x); Gdft = X .* conj(X);` dobře a navíc rychle 😊

Příklad: pozor, při dělení musíme dělit počtem vzorků na vstupu, ne délkou “prodloužené” DFT!

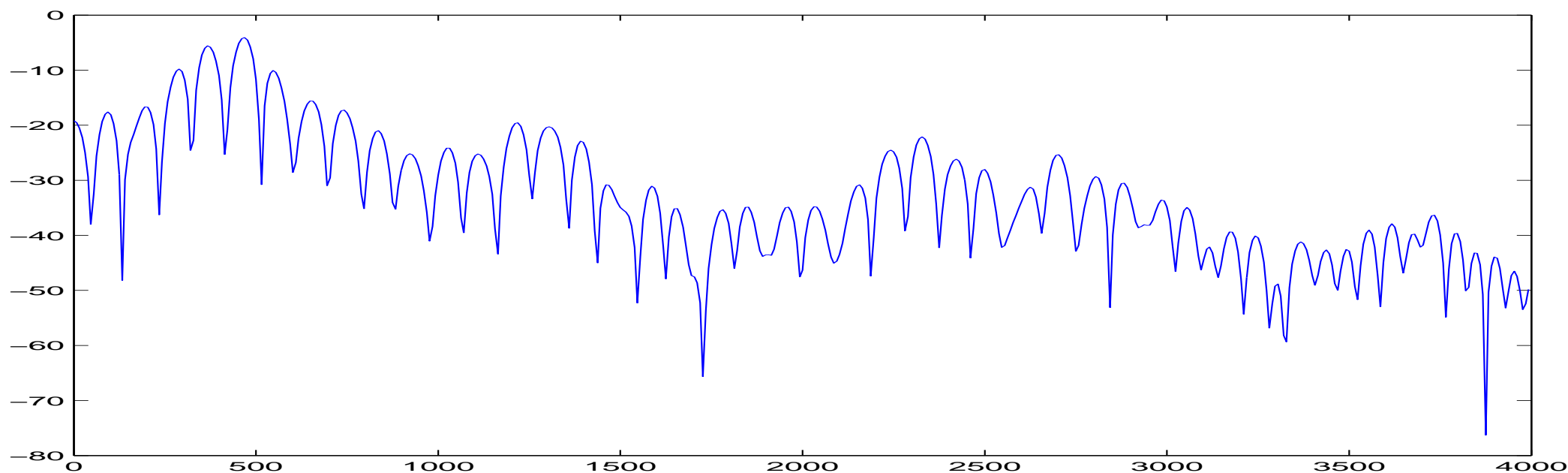
```
Fs = 8000; f = (0:511) / 1024 * Fs
```

```
X = fft([x' zeros(1,1024-160)]); X = X(1:512); Gdft= 1/160 *abs(X) .^ 2;  
plot(f,Gdft);
```



Dynamika spektrální hustoty výkonu je větší než u DFT (druhá mocnina...) a na obrázcích nejsou vidět “slabé” části, proto se často používá zobrazení v decibelech (Matlab: funkce `log10`):

$$\hat{G}_{DFT}(k\Delta f) = 10 \log_{10} \frac{1}{N} |X[k]|^2.$$



LINEÁRNÍ FILTRACE

Lineární filtr použijeme, chceme-li nějak upravit obsah kmitočtových složek v signálu.



Běžné filtry jsou

- lineární — zachovávají lineární kombinaci: pokud $x_1(n) \rightarrow y_1(n)$ a $x_2(n) \rightarrow y_2(n)$, pak $ax_1(n) + bx_2(n) \rightarrow ay_1(n) + by_2(n)$, kde $a, b \in \mathfrak{R}$.
- časově invariantní — chovají se “stále stejně”: pokud $x(n) \rightarrow y(n)$, pak také $x(n - n_0) \rightarrow y(n - n_0)$, kde n_0 je libovolný posuv. Někdy však naopak *chceme*, aby se charakteristiky filtru v čase měnily — adaptivní systémy, řečové rámce (změna $\forall 10$ ms).
- kauzální — filtr “nevidí do budoucnosti”: $y(n) \sim y(m < n)$ a $x(m \leq n)$.

Impulsní odezva

nebo také impulsní charakteristika je vrácena filtrem při buzení Kroneckerovým či jednotkovým impulsem (není to stejné, co Diracův !):

$$\delta(n) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq 0 \\ 1 & \text{pro } n = 0 \end{cases} \quad (8)$$



Známe-li impulsní odezvu, můžeme spočítat, jak bude filtr reagovat na libovolný vstupní signál. Každý vstupní vzorek totiž “spustí” jednu impulsní odezvu (násobenou velikostí vstupního vzorku), a ty se na výstupu sečtou – nezapomeňme, že filtr je lineární. Můžeme

zapsat konvolucí:

$$y(n) = x(n) \star h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) \quad (9)$$

O impulsní charakteristice můžeme říci:

- pokud $h(k) = 0$ pro $\forall k < 0$, pak je filtr kauzální (vzorky po n -tém nebudou násobeny ničím nenulovým).
- impulsní odezva může být konečná — FIR (finite impulse response) nebo nekonečná — IIR (infinite impulse response).
- její Fourierův obraz ve frekvenci udává komplexní kmitočtovou charakteristiku filtru:

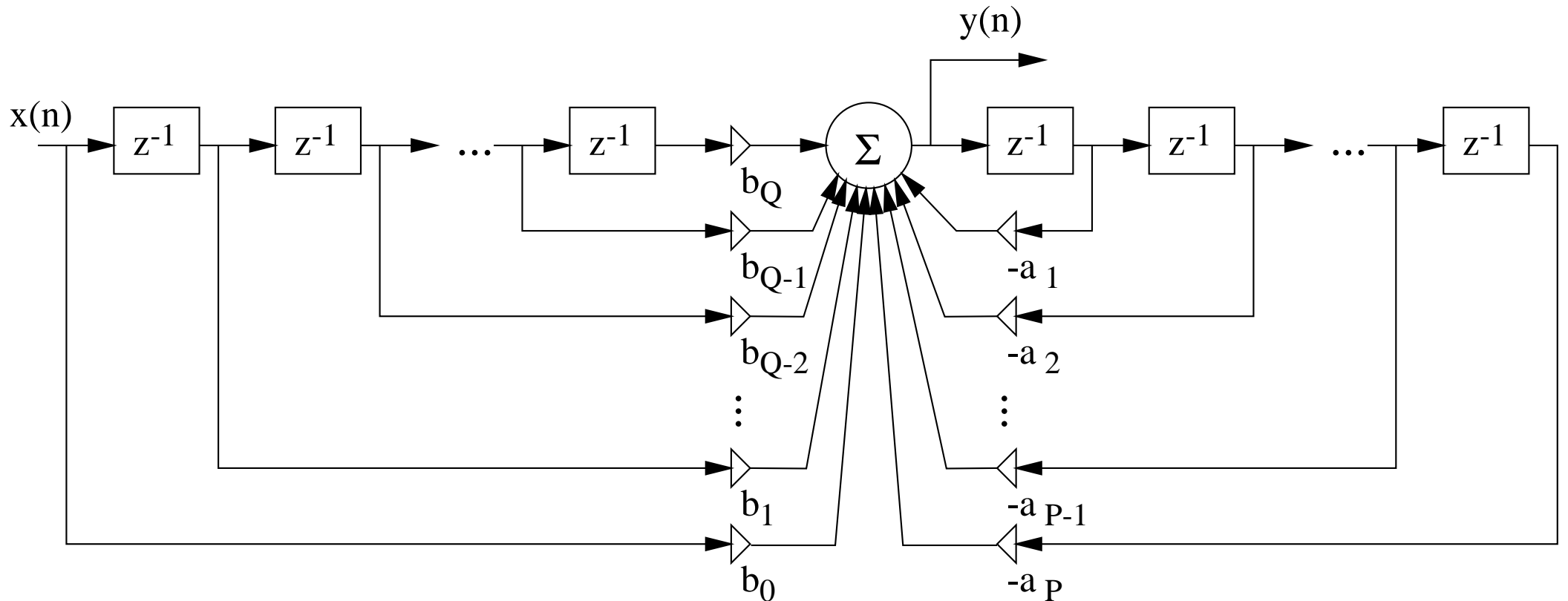
$$h(k) \rightarrow H(f)$$

Konvoluci v časové oblasti odpovídá *součin* v oblasti kmitočtové, takže spektrum výsledného signálu je:

$$Y(f) = X(f)H(f) \quad (10)$$

Mějme na paměti, že pracujeme s diskrétními signály (i impulsní odezva filtru je diskrétní), vše je tedy ve frekvenci *periodické* a to s periodou F_s (nebo 1 pro normovanou frekvenci).

Jak vypadá filtr



Blok z^{-1} označuje zpoždění o 1 vzorek. Chování filtru lze zapsat **diferenční rovnicí**:

$$y(n) = \sum_{k=0}^Q b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^P a_k y(n-k), \quad (11)$$

kde $x(n - k)$ jsou aktuální a zpožděné verze vstupu a $y(n - k)$ jsou zpožděné verze výstupu.

Typy filtrů:

- **FIR** – nerekurzivní: jen $b_0 \dots b_Q$ nenulové. Je vždy stabilní.
- **IIR** – čistě rekurzivní: jen $b_0, a_1 \dots a_P$ nenulové.
- **IIR** – obecně rekurzivní: a_i i b_i nenulové.

Z diferenční rovnice se ovšem těžko dá přímo poznat chování filtru ve frekvenční oblasti a těžko také vyšetříme jeho *stabilitu*.

z -transformace

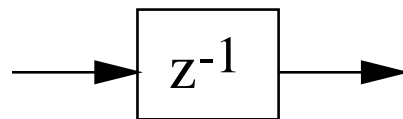
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (12)$$

Existují slovníky z -transformace, které udávají z -obrazy pro různé typy signálů, ty však nebudeme vůbec potřebovat. Budeme předpokládat, že signál $x(n)$ má z -transformaci $X(z)$. Definujeme poučku o **zpoždění**:

je-li $x(n) \rightarrow X(z)$, pak pro $y(n) = x(n - n_0)$ bude:

$$Y(z) = z^{-n_0} X(z) \quad (13)$$

pro zpoždění o jeden vzorek platí: $x(n - 1) \rightarrow z^{-1}X(z)$. Proto značíme zpoždění o 1 vzorek



Přenosová funkce filtru

Přepis diferenční rovnice pomocí z -transformace:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^Q b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^P a_k Y(z) z^{-k}, \quad (14)$$

Přenosovou funkci můžeme definovat jako podíl:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^Q b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^P a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}, \quad (15)$$

kde $B(z)$ a $A(z)$ jsou dva polynomy. Koeficient polynomu jmenovatele a_0 musí být “povinně” roven 1, ve filtru se fyzicky nevyskytujeme, je to vlastně matematické vyjádření toho, že filtr má výstupní vzorek.

Frekvenční charakteristika

filtru od 0 do F_s (nebo od 0 do 1 v normované frekvenci) se snadno získá z přenosové funkce tak, že “objedeme” jednotkovou kružnici a budeme zaznamenávat komplexní hodnoty funkce $H(z)$:

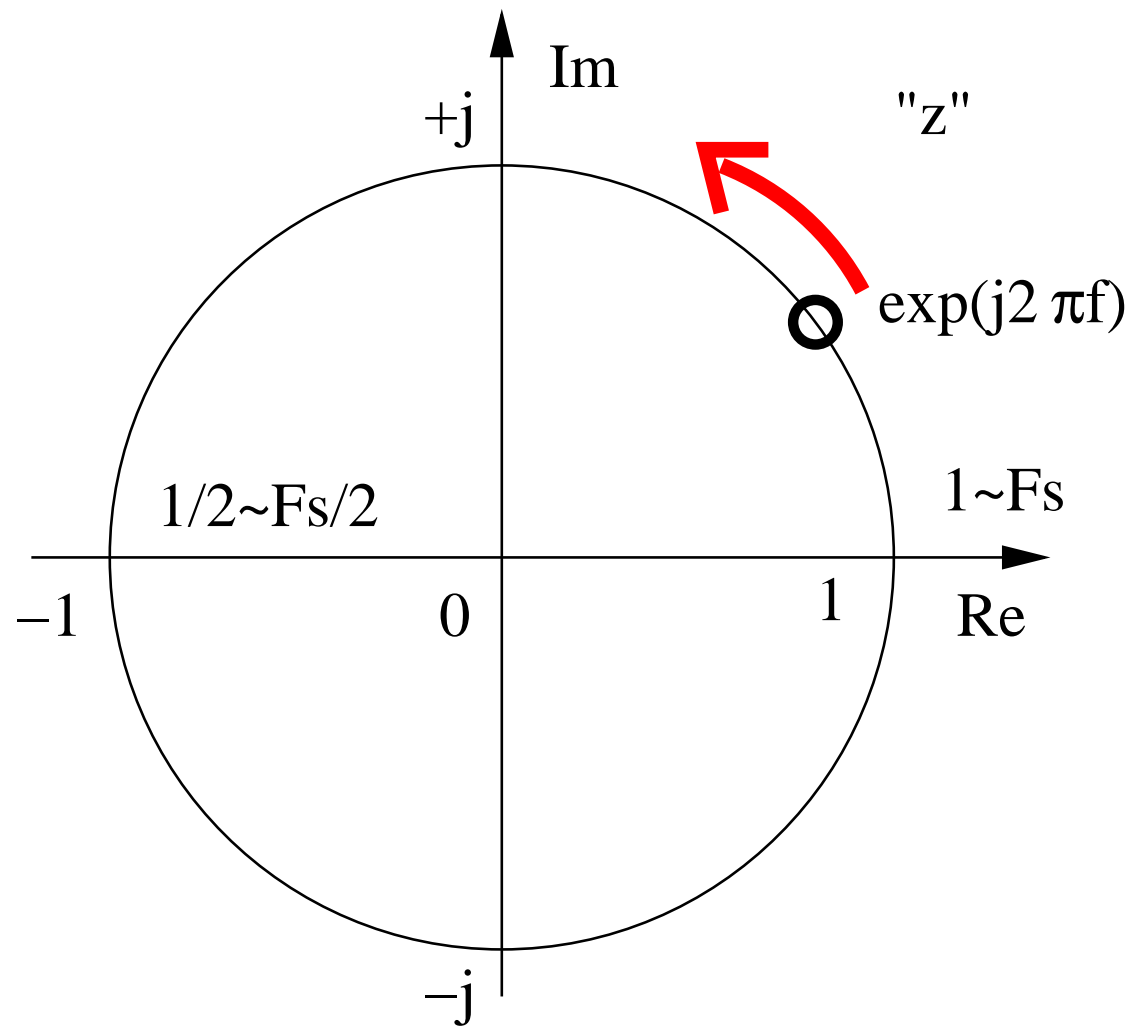
$$H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi f}} \quad (16)$$

pro normovanou frekvenci nebo:

$$H(f) = H(z)|_{z=e^{j2\pi fT}} \quad (17)$$

pro “obyčejnou” frekvenci.

Pro každou hodnotu f vyčíslíme polohu bodu na jednotkové kružnici: $z = e^{j2\pi f}$ (komplexní číslo), pak pro toto číslo vypočteme podíl polynomů $B(z)$ a $A(z)$ (také komplexní číslo). V Matlabu za nás tento výpočet pro celý interval zajímavých frekvencí (od 0 do $F_s/2$) provede funkce `freqz`.



Nuly a póly přenosové funkce a co s nimi...

Přenosovou funkci $H(z)$ můžeme zapsat také pomocí součinů:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_P z^{-P}} = \frac{z^{-Q} (b_0 z^Q + b_1 z^{Q-1} + \dots + b_Q)}{z^{-P} (z^P + a_1 z^{P-1} + \dots + a_P)} = \\ &= b_0 \frac{z^{-Q}}{z^{-P}} \frac{\prod_{k=1}^Q (z - n_k)}{\prod_{k=1}^P (z - p_k)} = b_0 z^{P-Q} \frac{\prod_{k=1}^Q (z - n_k)}{\prod_{k=1}^P (z - p_k)}, \end{aligned}$$

Pokud $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, pak póly p_k a nuly n_k mohou být buď reálné, nebo ve dvojicích komplexně sdružené. Z poloh nul a pólů se dá graficky určit přibližný průběh frekvenční charakteristiky $H(f)$.

Stabilita filtru je zajištěna, pokud všechny póly leží *uvnitř jednotkové kružnice*:

$$|p_k| < 1$$

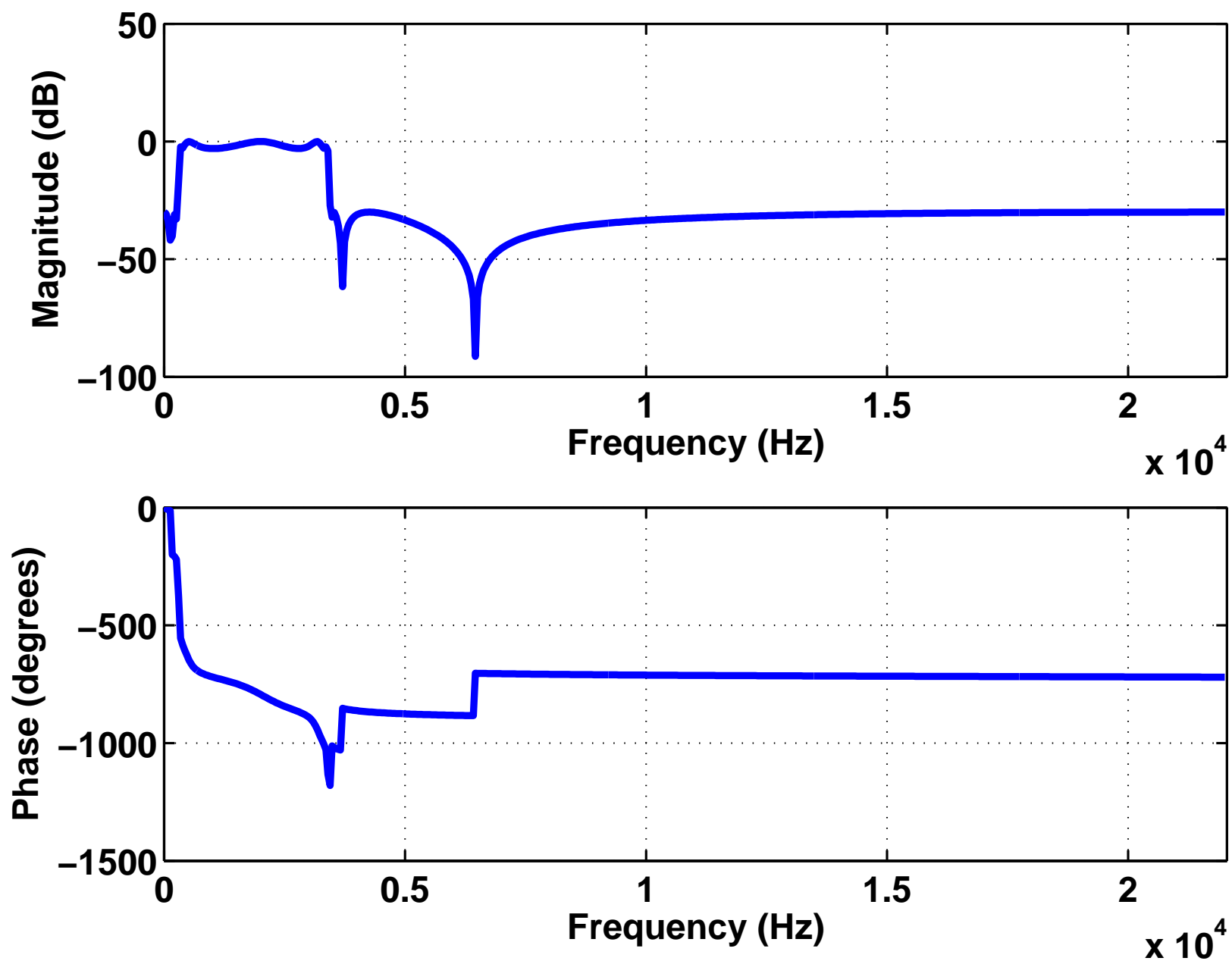
Příklad filtru

Chceme filtr, který bude simulovat telefonní kanál pro filtrování signálů s CD kvalitou. Bude to pásmová propust' od 300 do 3400 Hz. V Matlabu můžeme použít mnoho funkcí pro návrh filtrů, vybíráme tzv. eliptické filtry:

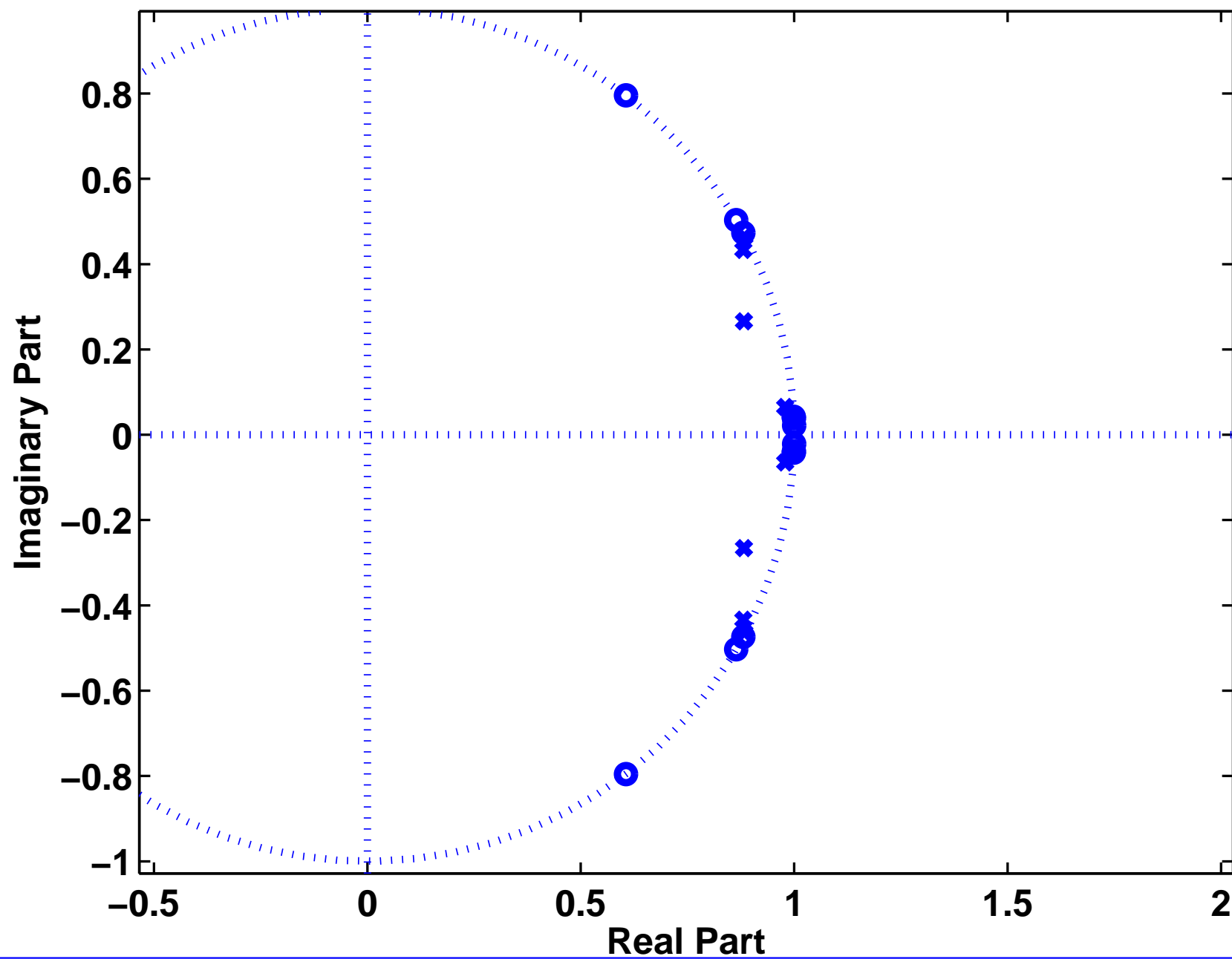
```
Fs = 44100; Fs2 = Fs/2; % musi se normovat polovinou Fs
Wp = [300/Fs2 3400/Fs2]; % pass-band
Ws = [200/Fs2 3500/Fs2]; % stop-band - priblizne
Rp = 3; % zvlneni v pass-bandu dB
Rs = 30; % potlaceni stop-bandu dB (obe hodnoty od
% oka, preseneji viz normy.
[N, Wn] = ellipord(Wp, Ws, Rp, Rs) % vypocet radu filtru
[B,A] = ellip(N,Rp,Rs,Wn) % vypocet polynomu B a A
```

...výsledkem jsou 2 polynomy 12-tého řádu.

Frekvenční charakteristika: freqz (B,A,512,Fs);



Póly a nuly: zplane (B,A);



Implementace v C

- základní implementace přímé struktury je velmi jednoduchá – prakticky se přepíše diferenční rovnice: viz soubor `filter.c`
- v praxi se používají optimálnější struktury, které mají pouze jednu zpoždovací linku a jsou méně náchylné k zaokrouhlovacím chybám.
- více o filtrech teorie viz SXC/ISS – přednáška “diskrétní systémy”:
<http://www.fit.vutbr.cz/~cernocky/sig>

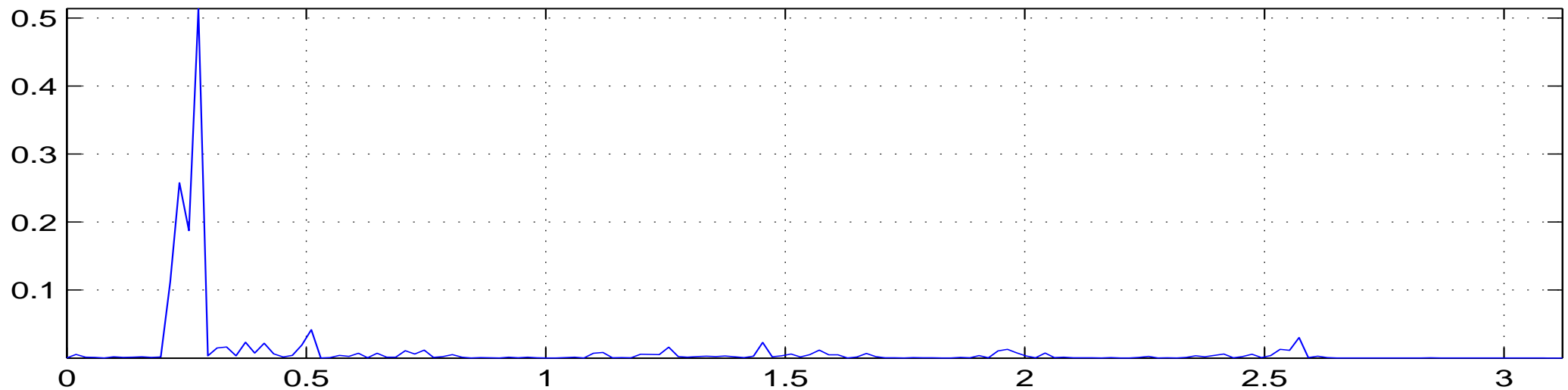
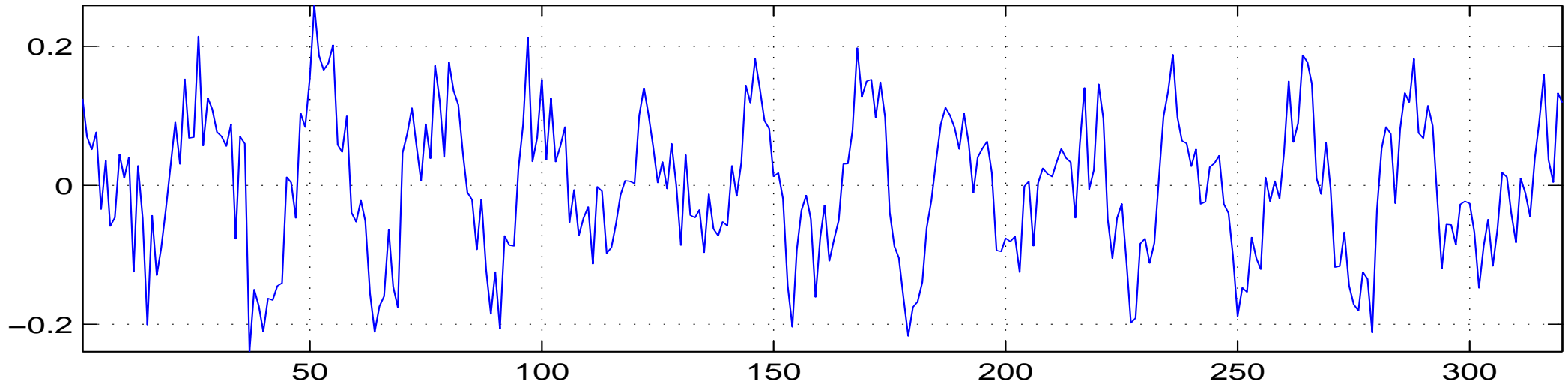
Průchod náhodného signálu filtrem

filtr má komplexní kmitočtovou charakteristiku $H(f)$. Pro vstupní signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(f)$ je výstupní spektrální hustota výkonu dána:

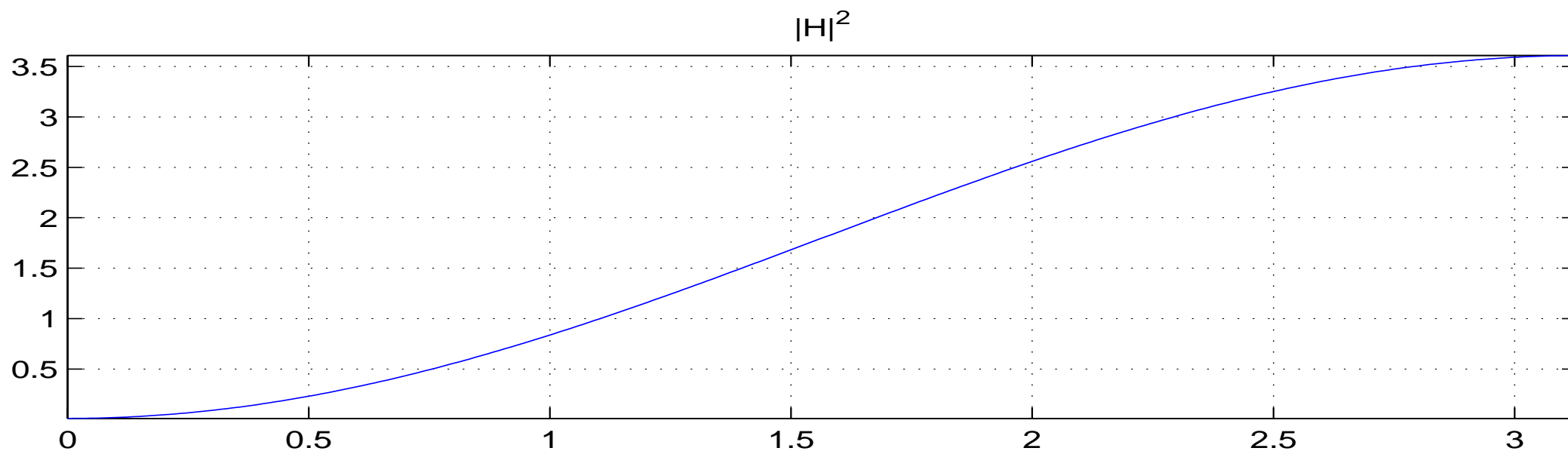
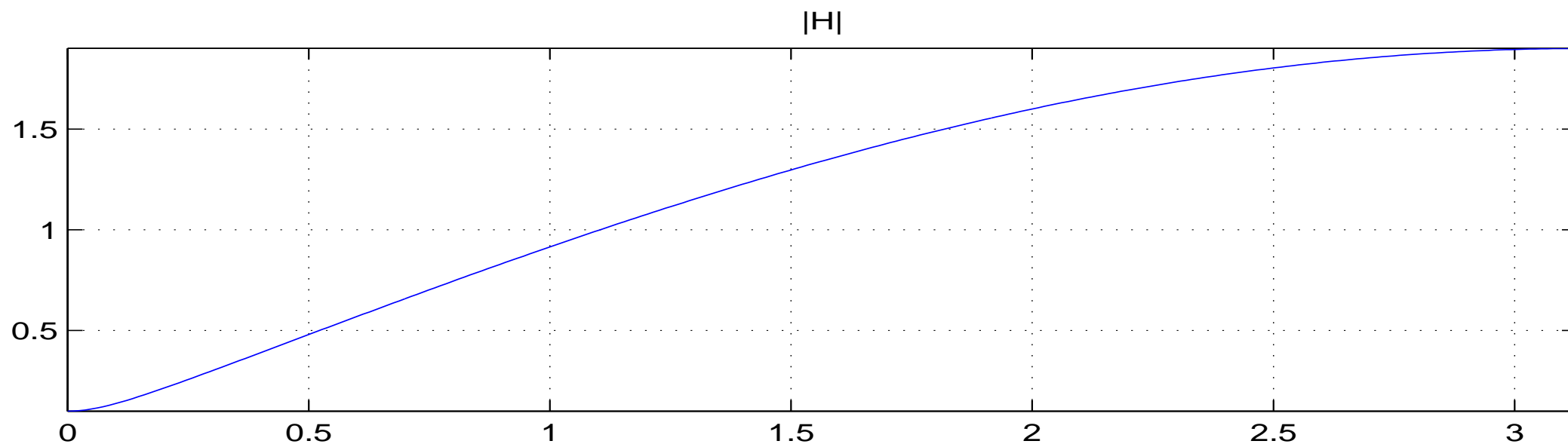
$$G_y(f) = |H(f)|^2 G_x(f)$$

... vstupní PSD násobíme druhou mocninou **modulu** komplexní kmitočtové charakteristiky.

Příklad: filtrování jedné realizace tečení vody filtrem $H(z) = 1 - 0.9z^{-1}$. Vstupní signál a jeho PSD:



Modul komplexní kmitočtové charakteristiky a jeho druhá mocnina:



Výstupní signál a jeho PSD:

