ZRE – numerické cvičení - zadání a řešení

Jan Černocký, FIT VUT Brno, 9. května 2014

1 LPC

je dán signál o 12-ti vzorcích $x[0] \dots x[11]$: 0, 0.707, 1, 0.707, 0, -0.707, -1, -0.707, 0, 0.707, 1, 0.707

Příklady

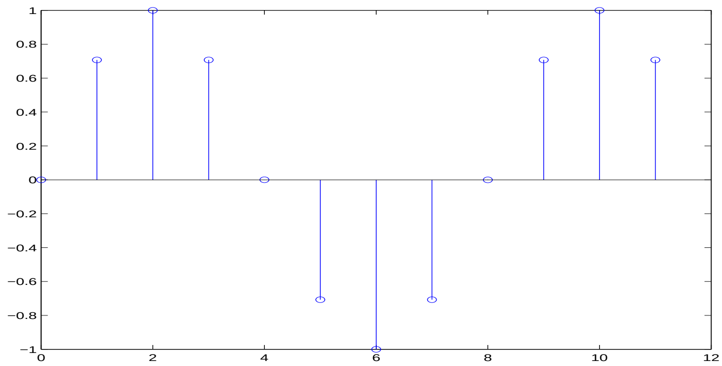
1. je možné vyjádřit tento signál analyticky ? Jak ?

Ano, je to sinusovka: $x[n] = \sin(2\pi f n)$ s normovanou frekvencí $f = 1/8$.

Jak se na to přišlo: že je to sinusovka asi sami vidíte. Je to periodické po $N = 8$ vzorcích a vzoreček pro normovanou frekvenci je $f = 1/N$, kde N je perioda. I kdybyste na tento vzoreček zapomněli, můžete si říci "normální sinusovka je periodická s 2π. Víme, že v tam musí být 2π a že tam musí být diskrétní čas, čím bych tak ten diskrétní čas vynásobil/a, aby to bylo periodické po 8-mi vzorcích ?"

Ověření Matlab:

```
n = 0:11; f = 1/8; N=12;
x = sin (2*pi*f*n); stem(n,x);
```



---

2. spočítejte energii vztaženou na 1 vzorek.

součet kvadrátů absolutních hodnot vzorků (vzorky jsou reálné, takže se na absolutní hodnoty můžeme klidně vykašlat), dělíme délkou signálu:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = \frac{0 + 6 \times \frac{1}{2} + 3 \times 1}{12} = 0.5$$

Ověření Matlab:

```
E = 1/N *  sum(x.^2)
```

Přídavná kontrola: energie sinusovky by měla být $\frac{A^2}{2}$, kde A je amplituda. Platí to ?

$$\frac{A^2}{2} = \frac{1}{2}$$

... jo, platí.

---

3. spočítejte průchody nulou - nejprve pohledem na obrázek, pak matematicky.

pohledem na obrázek: 2

matematicky:

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} |\operatorname{sign} x[n] - \operatorname{sign} x[n-1]|,$$

pro zjednodušení bereme znaménko čísla nula: $\operatorname{sign} 0 = 1$. Uvědomíme si, že vedle sebe sedící vzorky se stejným znaménkem mají absolutní hodnotu rozdílu znamének 0, pokud se znaménko změní, je to 2. V našem signálu tyto přechody dostáváme dva, tedy:

$$Z = \frac{1}{2} 2 \times 2 = 2$$

---

4. proveďte LPC analýzu řádu 2 - musíte tedy určit koeficienty a_1 a a_2 filtru $\frac{1}{A(z)}$. Budete potřebovat autokorelační koeficienty $R[0]$, $R[1]$ a $R[2]$. Proveďte výpočet řešením standardní soustavy rovnic o dvou neznámých.

Autokorelační koeficienty se počítají pomocí:

$$R[k] = \sum_{n=0}^{N-1-k} s[n]s[n+k]$$

budeme je potřebovat pro k=0,1,2. Signál okopírujeme, posuneme **doleva** (ale ono je to stejně jedno...) o k, pak všechny vzorky, které budou nad sebou vynásobíme a sečteme.

$$\begin{aligned}
R[0] &= \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]x[n] = & 0^2 + 0.707^2 + \ldots & = 6 \\
R[1] &= \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]x[n+1] = & 0 \times 0.707 + 0.707 \times 1 + \ldots & = 4.243 \\
R[2] &= \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]x[n+2] = & 0 \times 1 + 0.707 \times 0.707 + \ldots & = 0.5
\end{aligned}$$

Ověření Matlab:

```
R = xcorr(x)
R = R(N:N+2)
R0 = R(1); R1=R(2); R2 = R(3);
```

LPC koeficienty jsou řešením soustavy rovnic:

$$\begin{bmatrix} R[0] & R[1] \\ R[1] & R[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R[1] \\ -R[2] \end{bmatrix}$$

tedy

$$R[0]a_1 + R[1]a_2 = -R[1]$$

$$R[1]a_1 + R[0]a_2 = -R[2]$$

Na výpočet soustavy rovnic o 2 neznámých můžete jít různě, po několika neúspěšných pokusech s použitím kofaktorů jsem si to odvodil ručo: pro

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

by mělo platit:

$$x = \frac{ce - bf}{ea - bd}$$

(takže tam ty kofaktory stejně dostaneme, ha ha ha). Po dosazení:

$$a_1 = \frac{-4.243 \times 6 + 0.5 \times 4.243}{6^2 - 4.243^2} = -1.297$$

pak se to dosadí do libovolné z rovnic a vyjde:

$$a_2 = 0.843$$

Ověření Matlab:

```
A = inv([R0 R1 ; R1 R0]) * [-R1; -R2]
```

---

5. Proveďte tentýž výpočet pomocí Levinsona-Durbina.

postupujeme podle rovnic 22-26 v přednášce o LPC.

inicializace
$E^{(0)} = 6$

iterace(1)
$k_1 = -[R[1] + \text{nic}]/E^{(0)} = 4.243/6 = -0.707$
$a_1^{(1)} = -0.707$
$a_j^{(1)}$...nic
$E^{(1)} = (1 - 0.707^2)6 = 3$

iterace(2)
$k_2 = -[R[2] + a_1^{(1)}R[1]]/E^{(1)} = \ldots = 0.833$
$a_2^{(2)} = 0.833$
$a_1^{(2)} = a_1^{(1)} + k_2 a_1^{(1)} = -0.707 + 0.833 \times (-0.707) = -1.295$

"nic" v algoritmu značí, že díky indexům není co dělat.

Ověření Matlab:

```
A = levinson (R,2)
```

---

6. Vypočtěte energii chyby predikce z LPC a autokorelačních koeficientů.

podle vzorečku (20) z přednášky:

$$E = R[0] + \sum_{i=1}^{P} a_i R[i] = 6 - 1.297 \times 4.243 + 0.834 \times 0.5 = 0.913$$

Toto je **nenormovaná energie**, pokud ji budeme chtít převést na normovanou, musíme dělit 14-ti (?? a proč ne 12-ti ??)[1].

$$E_{norm} = \frac{0.913}{14} = 0.0652$$

---

7. Vypočítejte signál chyby predikce - jedná se tedy o filtrování signálu $x[n]$ "inverzním" filtrem $A(z)$. Vypočtěte jeho energii a srovnejte s energií vypočtenou v bodě 6.

filtrujeme filtrem $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$, který má v časové oblasti tuto diferenční rovnici:

$$y[n] = x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2]$$

Musíme tedy sčítat současný vzorek s minulým násobeným a_1 a předminulým násobeným a_2. Na to je dobré si udělat malou tabulku:

[1] Odpověď: Signál má 12 vzorků, ale jelikož filtr má dvě paměti, produkuje signál ještě o dva vzorky delší (musíme počkat, až se paměti "vysypou").

n	$x[n]$	$x[n-1]$	$a_1x[n-1]$	$x[n-2]$	$a_2x[n-2]$	y[n]
0	0	0	0	0	0	0
1	0.707	0	0	0	0	0.707
2	1	0.707	-0.917	0	0	0.083
3	0.707	1	-1.296	0.707	0.589	0
4	0	0.707	-0.917	1	0.833	-0.083
5	-0.707	0	0	0.707	0.589	-0.118
6	-1	-0.707	0.917	0	0	-0.083
7	-0.707	-1	1.296	-0.707	-0.589	0
8	0	-0.707	0.917	-1	-0.833	0.083
9	0.707	0	0	-0.707	-0.589	0.118
10	1	0.707	-0.917	0	0	0.083
11	0.707	1	-1.296	0.707	0.589	0
12	0	0.707	-0.917	1	0.833	-0.083
13	0	0	0	0.707	0.589	0.589

Nejprve si vyplníme sloupce $x[n]$, $x[n-1]$ a $x[n-2]$, pak k nim dopočítáme sloupce násobené koeficienty a nakonec sloupce $x[n]$, $a_1x[n-1]$ a $a_2x[n-2]$ sečteme. Zvrhlíci si to můžou spočítat i v Excelu ;-)

Spočítáme-li energii výstupního signálu:

$$E_{norm_y} = \frac{1}{14}\sum_{n=0}^{13} y^2[n]$$

zjistíme, že je to 0.065, takže vzorec pro výpočet residuální energie z LPC koeficientů a autokorelačních koeficientů nelhal.

---

8. Určete, kde má filtr $\frac{1}{A(z)}$ póly a jak vypadá jeho frekvenční charakteristika.

Jmenovatele filtru $H(z) = \frac{1}{A(z)}$ můžeme rozložit do pólů takto:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + a_1z + a_2} = \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

Póly (tedy body, kde je jmenovatel roven nule, tedy celý výraz roven nekonečnu) jsou dány řešením rovnice:

$$z^2 + a_1z + a_2 = 0$$

Opět si vzpomeneme na středoškolskou matematiku, kde se kvadratická rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

řešila:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

po dosazení $a = 1$, $b = a_1 = -1.296$, $c = a_2 = 0.833$ vyjde:

$$p_1 = 0.6482 + 0.6428j, \quad p_2 = 0.6482 - 0.6428j$$

podle předpokladu vyšla dvě komplexně sdružená čísla. Pokud si tato čísla nakreslíme do komplexní roviny, začneme tušit, že filtr bude mít charakter pásmové propusti: když bude putovat bod $z = e^{j2\pi f}$ po jednotkové kružnici, přiblíží se k pólu, krátká vzdálenost k póly "stáhne" jmenovatele $H(z)$ do malých hodnot a když je jmenovatel malý, frekvenční charakteristika bude velká[2]. Převedeme-li póly do exponenciálního tvaru $re^{j\phi}$, dostaneme:

$$p_1 = 0.913e^{j0.781}, \quad p_1 = 0.913e^{-j0.781}$$

Zajímá nás, které frekvenci bude maximum odpovídat. Když celá kružnice (2π rad) odpovídá normované frekvenci 1, pak bude 0.781 rad odpovídat:

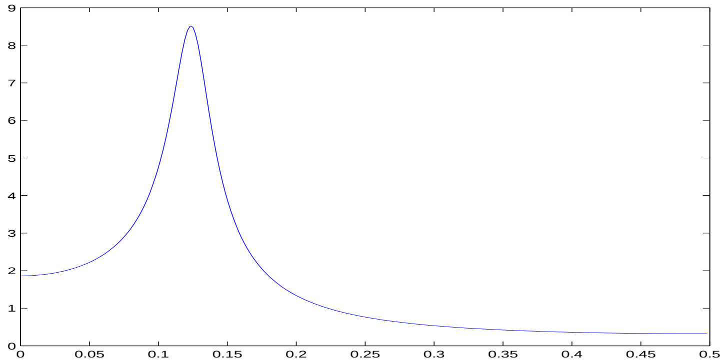
$$\frac{0.781}{2\pi} = 0.124 \approx \frac{1}{8}$$

To je fajn, protože filtr $\frac{1}{A(z)}$ se dobře "naučil na náš signál", který měl také frekvenci $\frac{1}{8}$.

Ověření Matlab:

[2]Více viz přednáška o lineární filtraci v ISS.

```
H=freqz(1,A,256); f=(0:255) / 256 * 0.5;
plot (f,abs(H))
```



2 DTW

Jsou dány vektory s parametry[3]:

$$\begin{array}{ll} \text{testovací:} & \mathbf{t} = [1 \quad 3]^T \\ \text{referenční 1:} & \mathbf{r}_1 = [2 \quad 4]^T \\ \text{referenční 2:} & \mathbf{r}_2 = [-1 \quad 3]^T \end{array}$$

Příklady

1. Určete Euklidovy vzdálenosti vektoru t od $\mathbf{r_1}$ i od $\mathbf{r_2}$ a určete, který z referenčních vektorů je testovacímu blíže.

Pro výpočet Euklidovy vzdálenosti použijeme známý vzoreček pro přeponu trojúhelníka:

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{t}) = \sqrt{(r(1) - t(1))^2 + (r(2) - t(2))^2},$$

kde $r(1), t(1)$ jsou první a $r(2), t(2)$ druhé složky jednotlivých vektorů. Takže:

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{t}) = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1.414$$

$$D(\mathbf{r}_2, \mathbf{t}) = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$$

Referenční vektor $\mathbf{r}_1$ je testovacímu blíže.

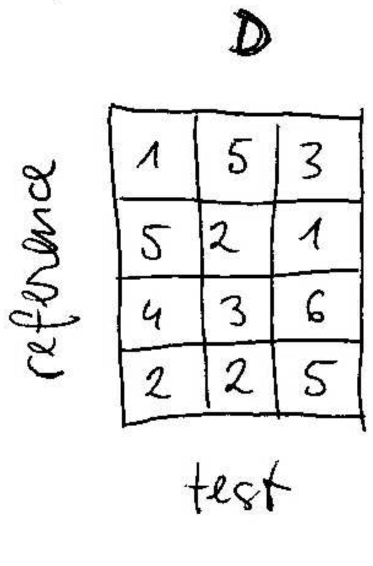
---

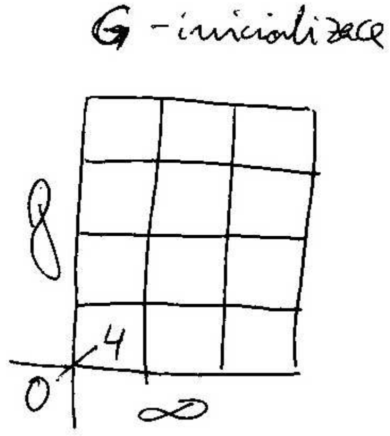
2. Referenční posloupnost má 4 vektory, testovací má 3 vektory. Je dána "mřížka" lokálních vzdáleností (reference svisle, test vodorovně).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Určete DTW vzdálenost.

Při výpočtu DTW vzdálenosti začneme tak, že si nakreslíme "mřížku" lokálních vzdáleností **D** a inicializujeme "mřížku" částečných kumulovaných vzdáleností **G**.



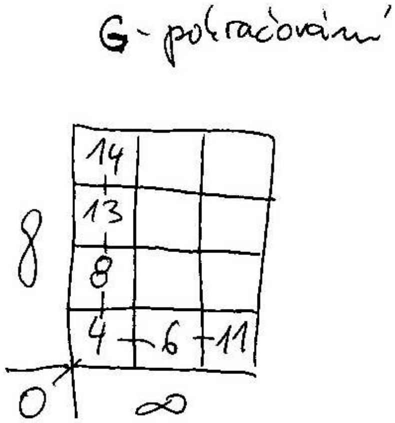


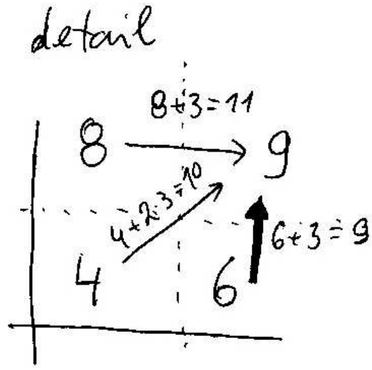
Pak budeme vyplňovat **G** zleva doprava a zespoda nahoru tak, že v každém bodě:

$$\text{hodnota} = \min \left\{ \begin{array}{l} g \text{ souseda vlevo} + d \\ g \text{ souseda dole} + d \\ g \text{ souseda vlevo dole} + 2d \end{array} \right\}$$

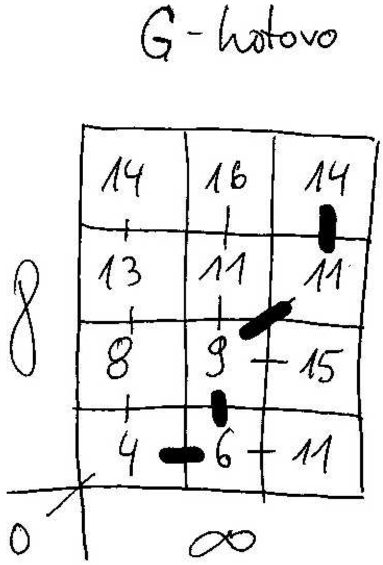
Z přednášek si možná pamatujete, že 2 je penalizace příliš rychlého postupu v obou směrech. Při vyplňování políčka v **G** si zapamatujeme, odkud jsme přišli. Vyplnění prvního sloupce a prvního řádku je triviální, detail ukazuje políčko [2, 2], kde se poprvé musíme skutečně rozhodnout:

[3] Vektory jsou sloupcové a protože se mi je nechce sloupcové sázet, je u nich všude ^{T} jako že jsou transponované ;-)





Nakonec bude **G** vypadat takto:



Lehce určíme DTW vzdálenost: podělíme poslední políčko součtem délek reference a testu:

$$D_{DTW} = \frac{14}{3+4} = 2$$

---

3. Určete optimální srovnávací cestu a průběhy "indexovacích" funkcí $r(k)$ a $t(k)$.

Optimální srovnávací cestu dostaneme zpětným trasováním z posledního políčka **G** — na obrázku je vyznačena tlustými čarami. Vidíme, že srovnávací cesta má $K = 5$ bodů, indexovací funkce budou:
pro referenci $r(k) = [1 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]$
pro test $t(k) = [1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 3]$.

3 HMM

Je dán model s $N = 4$ stavy (z nichž jsou 2 vysílací). Vektory v matici $\mathbf{O}$ mají dva prvky a je jich $T = 5$:

$$\mathbf{o}(1) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}(2) = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}(3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}(4) = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}(5) = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Model má tuto matici přechodových pravděpodobností:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti v jednotlivých stavech jsou dány jedním Gaussovým rozložením s následujícími vektory středních hodnot a směrodatných odchylek:

$$\mu_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mu_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

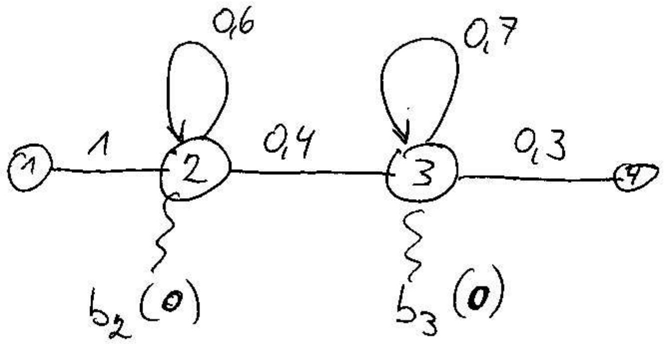
Příklady

Matlabové ověření k těmto příkladům najdete v souboru `cviko2_hmm_reseni.m`

---

1. určete všechny možné stavové sekvence X.

Bude dobré si tento HMM nejprve nakreslit:



Všechny stavové sekvence musí začínat prvním nevysílacím stavem — č. 1 — a končit posledním nevysílacím — č.4. Dva vysílací stavy si musí rozdělit všechny vektory, celková délka všech sekvencí tedy bude 7. Všechny možné sekvence jsou 4:

$$X_1 = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 4]$$
$$X_2 = [1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 4]$$
$$X_3 = [1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 3 \;\; 4]$$
$$X_4 = [1 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4]$$

Jiné sekvence nejsou platné, protože v modelu se nedají přeskakovat stavy.

---

2. pro každou z nich určete pravděpodobnost vyslání: $P(O, X|M)$. V tomto úkolu budete potřebovat výpočet vysílacích pravděpodobností Pro $b_2(\mathbf{o}(1))$ spočítejte sami, pro ostatní jsou zde:

	$\mathbf{o}(1)$	$\mathbf{o}(2)$	$\mathbf{o}(3)$	$\mathbf{o}(4)$	$\mathbf{o}(5)$
b_2	??????	0.0349	0.0398	0.0013	0.0001
b_3	0.0098	0.0010	0.0033	0.0340	0.0129

Nejprve musíme spočítat vysílací pravděpodobnost $b_2(\mathbf{o}(1))$ – dostaneme ji tak, že dosadíme $\mathbf{o}(1)$ do funkce hustoty rozložení pravděpodobnosti druhého stavu. Jelikož jsou tato rozložení dána pouze pomocí středních hodnot a směrodatných odchylek, nemusíme se naštěstí starat o inverzi kovarianční matice a její determinant, ale použijeme zjednodušený vzorec (rovnice 5 v přednášce o HMM), kdy dostaneme vysílací pravděpodobnost jako **součin** hodnot dvou jednorozměrných Gaussovek.

$$b_2(\mathbf{o}(1)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\sigma_{21}} e^{-\frac{(o(1)_1-\mu_{21})^2}{2\sigma_{21}^2}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\;\sigma_{22}} e^{-\frac{(o(1)_2-\mu_{22})^2}{2\sigma_{22}^2}} = \ldots = 0.034$$

Tabulku tedy můžeme doplnit.

Při výpočtu pravděpodobností $P(O, X|M)$ po jednotlivých cestách se řídíme pravidlem "násobit všechny pravděpodobnosti, které po cestě potkáme", tedy všechny přechodové a vysílací vždy bereme podle toho, který stav "vysílá" který vektor. Bude to brutální, ale tady jsou celkové vzorečky:

$$P(O, X_1|M) = a_{12}\; b_2(\mathbf{o}(1))\; a_{23}\; b_3(\mathbf{o}(2))\; a_{33}\; b_3(\mathbf{o}(3))\; a_{33}\; b_3(\mathbf{o}(4))\; a_{33}\; b_3(\mathbf{o}(5))\; a_{34} = 2.02 \times 10^{-12}$$
$$P(O, X_2|M) = a_{12}\; b_2(\mathbf{o}(1))\; a_{22}\; b_2(\mathbf{o}(2))\; a_{23}\; b_3(\mathbf{o}(3))\; a_{33}\; b_3(\mathbf{o}(4))\; a_{33}\; b_3(\mathbf{o}(5))\; a_{34} = 6.12 \times 10^{-11}$$
$$P(O, X_3|M) = a_{12}\; b_2(\mathbf{o}(1))\; a_{22}\; b_2(\mathbf{o}(2))\; a_{22}\; b_2(\mathbf{o}(3))\; a_{23}\; b_3(\mathbf{o}(4))\; a_{33}\; b_3(\mathbf{o}(5))\; a_{34} = 6.36 \times 10^{-10}$$
$$P(O, X_4|M) = a_{12}\; b_2(\mathbf{o}(1))\; a_{22}\; b_2(\mathbf{o}(2))\; a_{22}\; b_2(\mathbf{o}(3))\; a_{22}\; b_2(\mathbf{o}(4))\; a_{23}\; b_3(\mathbf{o}(5))\; a_{34} = 1.6 \times 10^{-11}$$

---

3. určete Baum-Welchovu pravděpodobnost: $P(O|M) = \sum_{\forall X} P(O, X|M)$

Tato pravděpodobnost je sumou přes všechny cesty:

$$P(O|M) = 7.12 \times 10^{-10}$$

---

4. určete Viterbiho pravděpodobnost: $P^\star(O|M) = \max_{\forall X} P(O, X|M)$

Tato pravděpodobnost je maximem přes všechny cesty:

$$P(O|M) = 6.36 \times 10^{-10}$$

---

5. určete log-Viterbiho pravděpodobnost: $\log P^\star(O|M)$ **pomocí algoritmu token-passing. Odlogaritmujte a srovnejte s bodem 4.**

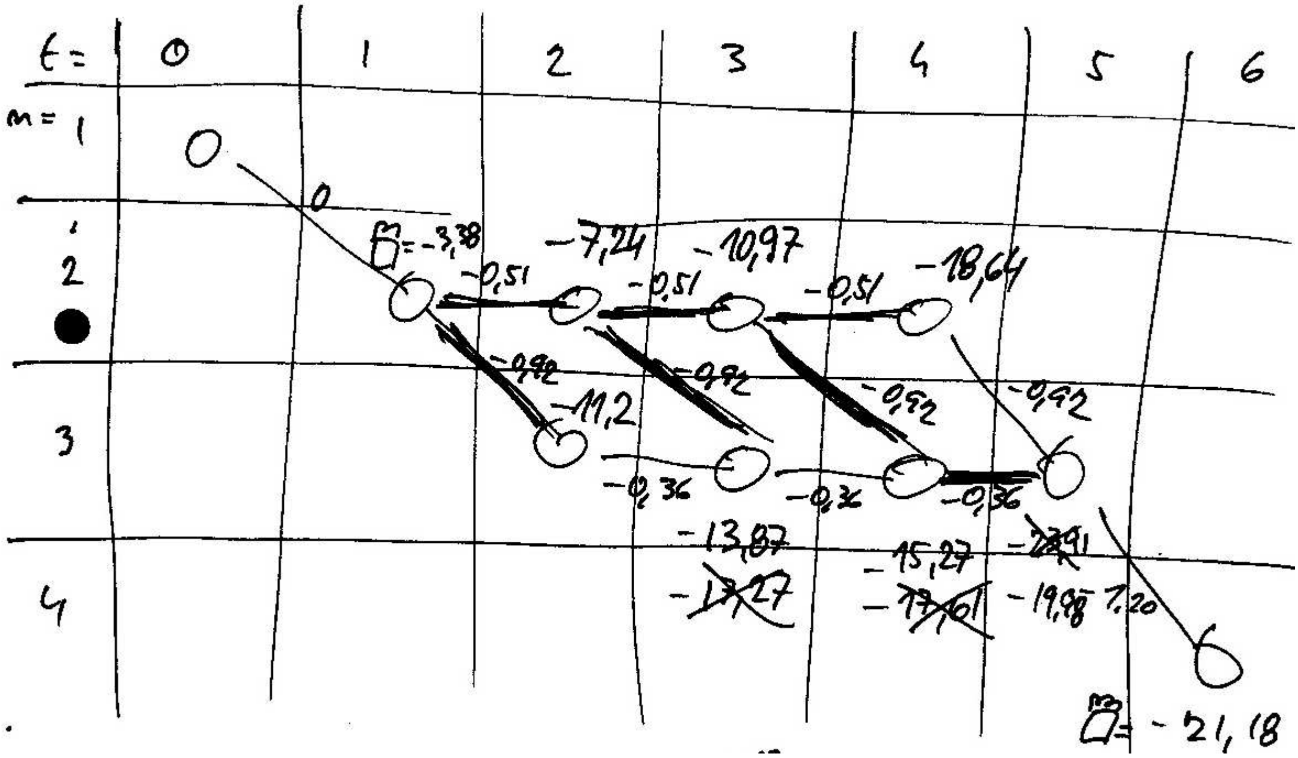
Budeme postupovat přesně podle algoritmu na konci přednášky o HMM. Je dobré si připravit obrázek, který obsahuje na svislé ose stavy modelu a na vodorovné ose časy. Časy můžeme doplnit o dva "fiktivní" časy: 0 a $T + 1$ (předpokládáme, že vektory $\mathbf{O}$ jsou indexovány od 1 do T), ve kterých budeme algoritmus inicializovat a uzavírat. Uvědomíme si, že do piv budeme dolévat logaritmické[4] pravděpodobnosti $\log a_{ij} + \log b_j[\mathbf{o}(t)]$, takže bude dobré si připravit:

- do obrázku logaritmy přechodových pravděpodobností:
  $\log 1 = 0$, $\log 0.6 = -0.51$ $\log 0.4 = -0.92$, $\log 0.7 = -0.36$, $\log 0.3 = -1.20$
- tabulku logaritmů $b_j(\mathbf{o}(t))$ pro všechny vektory:

	$\mathbf{o}(1)$	$\mathbf{o}(2)$	$\mathbf{o}(3)$	$\mathbf{o}(4)$	$\mathbf{o}(5)$
$\log b_2$	-3.38	-3.35	-3.22	-6.65	-9.21
$\log b_3$	-4.63	-6.91	-5.71	-3.38	-4.35

[4]Je celkem jedno, jaký použijeme logaritmus, doporučuji přirozený – na kalkulačce `ln`, v programovacích jazycích `log`.

Průběh algoritmu je pak naznačen na následujícím obrázku[5]:



Po jeho doběhnutí odebereme z posledního stavu modelu pivo, a pro získání Viterbiho pravděpodobnosti odlogaritmujeme:

$$P^{\star}(O|M) = e^{-21.18} = 6.33 \times 10^{-10}$$

což je (až na zaokrouhlovací chyby) výsledek, který jsme dostali v příkladu 4. plným procházením všech cest.

[5]Černá tečka pod číslem stavu 2 nemá žádný význam — v papíru byla díra ;-)