

Teoretická informatika TIN - 2025/2026

1. test (varianta B) 3. 10. 2025

Čas na řešení: 120 minut

Jméno/přihlašovací jméno:

Hodnocení:

--	--	--	--	--

Poznámka: Pokud při vypracování zkoušky použijete jinou notaci a konvence, než byly zavedeny na přednáškách, je nutné takovou notaci popsat. Písemnou zkoušku zpracujte čitelně a úhledně.

Příklad 1
2 body

- a) Přesně a formálně definujte *Pumping lemma* pro regulární jazyky.
- b) Uvažte abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a jazyk

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid \#_a(w) > 0 \vee |w| \geq 2\}$$

kde $|w|$ značí délku slova w a $\#_x(w)$ značí počet znaků x v řetězci w .

Sestrojte relaci pravé kongruence $\sim$, pro kterou platí, že L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného relací $\sim$ na Σ^* a index $\sim$ je o jedna větší než index $\sim_L$.

Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující jazyky regulární:

Příklad 2
2 body

a) $L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (\#_a(w) = \#_b(w) + \#_c(w)) \wedge \#_a(w) \geq 2\},$

b) $L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid (\#_a(w) = \#_b(w) + \#_c(w)) \wedge \#_a(w) \leq 2\}.$

kde $\#_x(w)$ značí počet znaků x v řetězci w .

Poznámka: Při dokazování, že je jazyk regulární, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není regulární, použijte Pumping Lemma nebo Myhill-Nerodovu větu.

Uvažme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$. Necht' $\mathcal{L}_3$ značí třídu všech regulárních jazyků nad Σ a $|w|$ značí délku slova w . Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

Příklad 3
2 body

- a) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$.
- b) Problém *n-mohutnosti* je rozhodnutelný pro třídu regulárních jazyků, kde *n-mohutnost* je pro dané n definovaná následovně: L je *n-mohutný* $\iff \exists w \in L : |w| \geq n$

Poznámka: Regularitu a neregularitu jazyků, které byly probírány na přednáškách a cvičení, nemusíte dokazovat.

Navrhňte algoritmus, který má na vstupu dva úplně definované deterministické konečné automaty

Příklad 4
1 bod

$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, kde $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$,

a výstupem je úplně definovaný deterministický konečný automat $A_\bullet$ takový, že

$$L(A_\bullet) = \{w \in \Sigma^* \mid w \notin L(A_1) \wedge w \in L(A_2)\}$$

Poznámka: Vyžaduje se obecná konstrukce $A_\bullet$ pro libovolné automaty A_1 a A_2 a formální zápis této konstrukce.