Teoretická informatika TIN - 2024/2025

1. test 11. 10. 2024

Čas na řešení: 120 minut

(max. zisk 10 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

Jméno/přihlašovací jméno:

Hodnocení:

Poznámka: *Pokud při vypracování zkoušky použijete jinou notaci a konvence, než byly zavedeny na přednáškách, je nutné takovou notaci popsat. Písemnou zkoušku zpracujte čitelně a úhledně.*

Příklad 1
25 bodů

a) Nechť $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je *nedeterministický konečný automat* (NKA). Formálně definujte i) *přechodovou funkci* δ, ii) *konfiguraci* NKA (popište význam jednotlivých položek konfigurace) a iii) *relaci přechodu* mezi konfiguracemi.

b) Uvažme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$ a jazyk

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid (\#_a(w) > 1) \Rightarrow (\#_b(w) > 1)\},$$

kde $\#_x(w)$ značí počet znaků $x \in \Sigma$ v řetězci $w \in \Sigma^*$. Pomocí Myhill-Nerodovy věty zdůvodněte (v rozsahu 3–4 vět), že neexistuje minimální (tj. úplný redukovaný deterministický) automat A se 3 stavy takový, že $L(A) = L$.

Příklad 2
25 bodů

Uvažme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$. Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující jazyky regulární:

a) $L_1 = \{a^i c^j b^k c^j \mid i, k > 0 \land j < 2\}$,

b) $L_2 = \{a^i c^j b^k c^j \mid i, k > 0 \land j > 2\}$,

Poznámka: Při dokazování, že je jazyk regulární, stačí uvést odpovídající gramatiku či automat. Při dokazování, že jazyk není regulární, použijte Pumping Lemma nebo Myhill-Nerodovu větu.

Příklad 3
30 bodů

Uvažme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$. Nechť $\mathcal{L}_3$ značí třídu všech regulárních jazyků nad Σ a $|w|$ značí délku slova w. Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

a) Pokud jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ i jeho doplněk jsou nekonečné jazyky, pak $L \notin \mathcal{L}_3$.

b) $\forall L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{L}_3 \implies L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$

c) Problém *sudosti* je rozhodnutelný pro třídu regulárních jazyků, kde sudost je definovaná následovně: L je sudý $\iff L \subseteq \{w \in \Sigma^* \mid |w| \text{ je sudé číslo}\}$

Poznámka: Regularitu a neregularitu jazyků, které byly probírány na přednáškách a cvičení, nemusíte dokazovat.

Příklad 4
20 bodů

Navrhněte algoritmus, který má na vstupu dva nedeterministické konečné automaty (bez ϵ-kroků)

$$A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1) \text{ a } A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2), \text{ kde } Q_1 \cap Q_2 = \emptyset,$$

a výstupem je nedeterministický konečný automat (bez ϵ-kroků) $A_\cap$ takový, že

$$L(A_\cap) = L(A_1) \cap L(A_2).$$

Konstrukci demonstrujte na automatech

$A_1 = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta_1, q_0, \{q_1\})$, kde $\delta_1(q_0, b) = \{q_1\}$ a $\delta_1(q_1, x) = \{q_1\}$ pro $x \in \{a, b\}$ a
$A_2 = (\{p_0, p_1\}, \{a, b\}, \delta_2, p_0, \{p_1\})$, kde $\delta_2(p_0, a) = \{p_0\}$ a $\delta_2(p_0, b) = \{p_0, p_1\}$.

Poznámka: Vyžaduje se obecná konstrukce $A_\cap$ pro libovolné automaty A_1 a A_2 a formální zápis této konstrukce.