Složitost

Složitost algoritmů

❖ Základní teoretický přístup vychází z Church-Turingovy teze:

Každý algoritmus je implementovatelný jistým TS.

❖ Zavedení TS nám umožňuje klasifikovat problémy (resp. funkce) do dvou tříd:

1. problémy, jež nejsou algoritmicky ani částečně rozhodnutelné (resp. funkce algoritmicky nevyčíslitelné) a
2. problémy algoritmicky alespoň částečně rozhodnutelné (resp. funkce algoritmicky vyčíslitelné).

❖ Nyní se budeme zabývat třídou algoritmicky (částečně) rozhodnutelných problémů (vyčíslitelných funkcí) v souvislosti s otázkou složitosti jejich rozhodování (vyčíslování).

❖ Analýzu složitosti algoritmu budeme chápat jako analýzu složitosti výpočtů příslušného TS, jejímž cílem je vyjádřit (kvantifikovat) požadované zdroje (čas, prostor) jako funkci závisející na délce vstupního řetězce.

Různé případy při analýze složitosti

❖ Můžeme rozlišit:

1. analýzu složitosti nejhoršího případu,
2. analýzu složitosti nejlepšího případu,
3. analýzu složitosti průměrného případu,
4. amortizovanou analýzu

❖ Průměrná složitost algoritmu je definována následovně:

- Jestliže algoritmus (TS) vede k m různým výpočtům (případům) se složitostí c_1, c_2, ..., c_m, jež nastávají s pravděpodobností p_1, p_2, ..., p_m, pak průměrná složitost algoritmu je dána jako $\Sigma_{i=1}^{n} p_i c_i$.

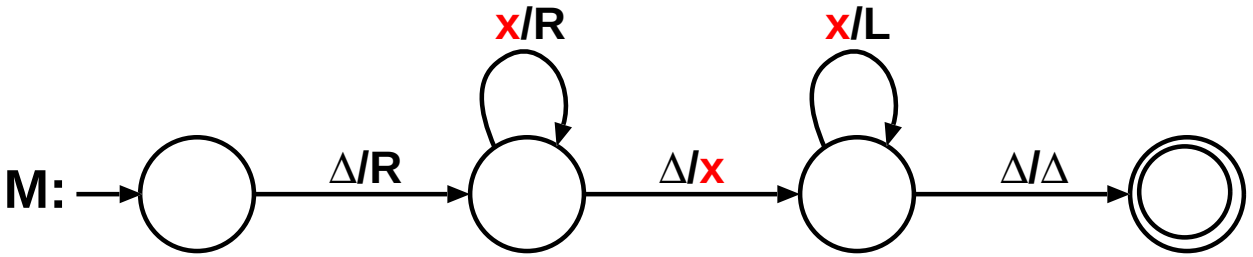
❖ Amortizovaná analýza studuje posloupnost operací jako celek. Tato technika umožňuje, na rozdíl od klasického přístupu mnohem přesnější určení časové složitosti algoritmu.

Složitost výpočtů TS pro daný vstup

❖ Časová složitost – počet kroků (přechodů) TS provedený od počátku do konce výpočtu.

❖ Prostorová (paměťová) složitost – počet „buněk“ pásky TS požadovaný pro daný výpočet.

Příklad 5.1 Uvažme následující TS M:



Pro vstup $\Delta xxx\Delta\Delta$... je:

- časová složitost výpočtu M rovna 10,
- prostorová složitost výpočtu M rovna 5.

Lemma 5.1 Je-li časová složitost výpočtu prováděného TS rovna n, pak prostorová složitost tohoto výpočtu není větší než $n + 1$.

Klíčová definice: Složitost výpočtů TS

Definice 5.1 Řekneme, že k-páskový DTS (resp. NTS) M přijímá jazyk L nad abecedou Σ v čase $T_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jestliže $L = L(M)$ a M přijme (resp. *může* přijmout) každé $w \in L$ v nanejvýš $T_M(|w|)$ krocích.

Definice 5.2 Řekneme, že k-páskový DTS (resp. NTS) M přijímá jazyk L nad abecedou Σ v prostoru $S_M : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jestliže $L = L(M)$ a M přijme (resp. *může* přijmout) každé $w \in L$ při použití nanejvýš $S_M(|w|)$ buněk pásky – *nepočítáme zde buňky pásky, na nichž je zapsán vstup*.

❖ Zcela analogicky můžeme definovat vyčíslování určité funkce daným TS v určitém čase, resp. prostoru.

Analýza složitosti mimo prostředí TS

❖ V jiném výpočetním prostředí, než jsou TS, nemusí mít každá primitivní operace stejnou cenu.

❖ Velmi často se užívá tzv. uniformní cenové kritérium, kdy každé operaci přiřadíme stejnou cenu.

❖ Používá se ale např. také tzv. logaritmické cenové kritérium, kdy operaci manipulující operand o velikosti i, $i > 0$, přiřadíme cenu $\lfloor lg\ i \rfloor + 1$:

- Zohledňujeme to, že s rostoucí velikostí operandů roste cena operací – logaritmus odráží růst velikosti s ohledem na binární kódování (v n bitech zakódujeme 2^n hodnot).

❖ Analýza složitosti za takových předpokladů není zcela přesná, důležité ale obvykle je to, aby se zachovala informace o tom, jak rychle roste čas/prostor potřebný k výpočtu v závislosti na velikosti vstupu[a].

[a] Algoritmus A_1, jehož nároky rostou pomaleji než u jiného algoritmu A_2, nemusí být výhodnější než A_2 pro řešení malých instancí.

❖ Význam srovnávání rychlosti růstu složitosti výpočtů si snad nejlépe ilustrujeme na příkladu:

Příklad 5.2 Srovnání polynomiální (přesněji kvadratické – n^2) a exponenciální (2^n) časové složitosti:

délka vstupu n	časová složitost n^2	časová složitost 2^n
10	0.0001 s	0.0001 s
20	0.0004 s	0.1024 s
30	0.0009 s	1.75 min
40	0.0016 s	1.24 dne
50	0.0025 s	3.48 roku
60	0.0036 s	35.68 století
70	0.0049 s	3.65 mil. roků

Složitost výpočtů na TS a v jiných prostředích

❖ Při použití vhodného cenového kritéria, je složitost pro výpočetní modely blízké běžným počítačům (RAM, RASP stroje) polynomiálně vázaná se složitostí výpočtu na TS. Tudíž složitost výpočtu na TS není „příliš“ rozdílná oproti výpočtům na běžných počítačích.

- RAM stroje mají paměť s náhodným přístupem (jedna buňka obsahuje libovolné přirozené číslo), instrukce typu LOAD, STORE, ADD, SUB, MULT, DIV, vstup/výstup, skok atd. U RAM stroje je program součástí řízení stroje (okamžitě dostupný), u RASP je uložen v paměti stejně jako operandy.
- Funkce $f_1(n), f_2(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jsou polynomiálně vázané, existují-li polynomy $p_1(x)$ a $p_2(x)$ takové, že pro všechny hodnoty n je $f_1(n) \leq p_1(f_2(n))$ a $f_2(n) \leq p_2(f_1(n))$.
- Logaritmické cenové kritérium se uplatní, uvažujeme-li možnost násobení dvou čísel. Jednoduchým cyklem typu $A_{i+1} = A_i * A_i$ $(A_0 = 2)$ jsme schopni počítat 2^{2^n}, což TS s omezenou abecedou není schopen provést v polynomiálním čase (pro uložení/načtení potřebuje projít 2^n buněk při použití binárního kódování).

❖ Ilustrujme si nyní určení složitosti v prostředí mimo TS:

Příklad 5.3 Uvažme následující implementaci porovnávání řetězců.

```
int str_cmp (int n, string a, string b) {
    int i;

    i = 0;
    while (i<n) {
      if (a[i] != b[i]) break;
      i++;
    }

    return (i==n);
}
```

- Pro určení složitosti aplikujme uniformní cenové kritérium např. tak, že budeme považovat složitost každého řádku programu (mimo deklarace) za jednotku. (Předpokládáme, že žádný cyklus není zapsán na jediném řádku.)
- Složitost nejhoršího případu

❖ Ilustrujme si nyní určení složitosti v prostředí mimo TS:

Příklad 5.4 Uvažme následující implementaci porovnávání řetězců.

```
int str_cmp (int n, string a, string b) {
    int i;

    i = 0;
    while (i<n) {
      if (a[i] != b[i]) break;
      i++;
    }

    return (i==n);
}
```

- Pro určení složitosti aplikujme uniformní cenové kritérium např. tak, že budeme považovat složitost každého řádku programu (mimo deklarace) za jednotku. (Předpokládáme, že žádný cyklus není zapsán na jediném řádku.)
- Složitost nejhoršího případu lze pak snadno určit jako $3n + 3$:
  - cyklus má 3 kroky, provede se n krát, tj. $3n$ kroků,
  - tělo funkce má 3 kroky (včetně testu ukončujícího cyklus).

Příklad 5.5 Uvažme následující implementaci řazení metodou insert-sort.

```
void insertsort(int n, int a[]) {
    int i, j, value;
    for (i=0; i<n; i++) {
        value = a[i];
        j = i - 1;
        while ((j >= 0) && (a[j] > value)) {
                a[j+1] = a[j];
                j = j - 1;
        }
        a[j+1] = value;
    }
}
```

- Pro určení složitosti aplikujme uniformní cenové kritérium např. tak, že budeme považovat složitost každého řádku programu (mimo deklarace) za jednotku. (Předpokládáme, že žádný cyklus není zapsán na jediném řádku.)
- Složitost nejhoršího případu

Příklad 5.6 Uvažme následující implementaci řazení metodou insert-sort.

```
void insertsort(int n, int a[]) {
    int i, j, value;
    for (i=0; i<n; i++) {
        value = a[i];
        j = i - 1;
        while ((j >= 0) && (a[j] > value)) {
                a[j+1] = a[j];
                j = j - 1;
        }
        a[j+1] = value;
    }
}
```

- Pro určení složitosti aplikujme uniformní cenové kritérium např. tak, že budeme považovat složitost každého řádku programu (mimo deklarace) za jednotku. (Předpokládáme, že žádný cyklus není zapsán na jediném řádku.)
- Složitost lze pak určit jako $1.5n^2 + 3.5n + 1$:
  - vnitřní cyklus má 3 kroky, provede se 0, 1, ..., $n-1$ krát, tj. $3(0 + 1 + ... + n - 1) = 3\frac{n}{2}(0 + n - 1) = 1.5n^2 - 1.5n$ kroků,
  - vnější cyklus má mimo vnitřní cyklus 5 kroků (včetně testu ukončujícího vnitřní cyklus) a provede se n krát, tj. $5n$ kroků,
  - jeden krok připadá na ukončení vnějšího cyklu.

Asymptotická omezení složitosti

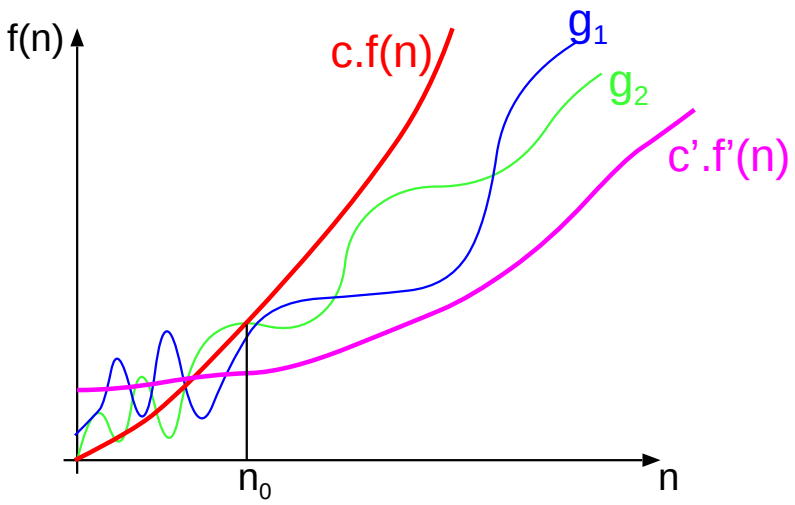
❖ Při popisu složitosti algoritmů (výpočtů TS), chceme často vyloučit vliv aditivních a multiplikativních konstant:

- různé aditivní a multiplikativní konstanty vzniknou velmi snadno „drobnými“ úpravami uvažovaných algoritmů,
- např. srovnávání dvou řetězců je možné donekonečna zrychlovat tak, že budeme porovnávat současně 2, 3, 4, ... za sebou jdoucích znaků,
- lineární komprese prostoru (rozšíření abecedy) a zrychlení výpočtu (před-vypočítání výsledků)
- tyto úpravy ovšem nemají zásadní vliv na rychlost nárůstu časové složitosti (ve výše uvedeném případě nárůst zůstane kvadratický),
- navíc při analýze složitosti mimo prostředí TS se dopouštíme jisté nepřesnosti již zavedením různých cenových kritérií.

❖ Proto se často složitost popisuje pomocí tzv. asymptotických odhadů složitosti

Definice 5.3 Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pro danou funkci $f \in \mathcal{F}$ definujeme množiny funkcí $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ a $\Theta(f(n))$ takto:

- Asymptotické horní omezení funkce $f(n)$ je množina
  $O(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq c.f(n)\}$.
- Asymptotické dolní omezení funkce $f(n)$ je množina
  $\Omega(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c.f(n) \leq g(n)\}$.
- Asymptotické oboustranné omezení funkce $f(n)$ je množina $\Theta(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c_1.f(n) \leq g(n) \leq c_2.f(n)\}$.



Příklad 5.7 S využitím asymptotických odhadů složitosti můžeme říci, že složitost našeho srovnání řetězců patří do $O(n)$ a složitost insert-sort do $O(n^2)$.

Definice 5.4 Nechť $\mathcal{F}$ je množina funkcí $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Pro danou funkci $f \in \mathcal{F}$ definujeme množiny funkcí $O(f(n))$, $\Omega(f(n))$ a $\Theta(f(n))$ takto:

- Asymptotické horní omezení funkce $f(n)$ je množina
  $O(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq g(n) \leq c.f(n)\}$.
- Asymptotické dolní omezení funkce $f(n)$ je množina
  $\Omega(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c.f(n) \leq g(n)\}$.
- Asymptotické oboustranné omezení funkce $f(n)$ je množina $\Theta(f(n)) = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 \leq c_1.f(n) \leq g(n) \leq c_2.f(n)\}$.

❖ Asymptotické horní omezení exponenciálních funkcí

$$2^{O(f(n))} = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow g(n) \leq 2^{c.f(n)}\}$$

- relaxuje aditivní a multiplikativní konstanty v exponentu
- dovoluje dále zjednodušit analýzu složitosti

Třídy složitosti

Složitost problémů

❖ Přejdeme nyní od složitosti konkrétních algoritmů (Turingových strojů) ke složitosti problémů.

❖ Třídy složitosti zavádíme jako prostředek ke kategorizaci (vytvoření hierarchie) problémů dle jejich složitosti, tedy dle toho, jak dalece efektivní algoritmy můžeme navrhnout pro jejich rozhodování (u funkcí můžeme analogicky mluvit o složitosti jejich vyčíslování).

❖ Podobně jako u určování typu jazyka se budeme snažit zařadit problém do co nejnižší třídy složitosti – tedy určit složitost problému jako složitost jeho nejlepšího možného řešení.

❖ Zařazení různých problémů do téže třídy složitosti může odhalit různé vnitřní podobnosti těchto problémů a může umožnit řešení jednoho převodem na druhý (a pragmatické využití např. různých již vyvinutých nástrojů).

Třídy složitosti

Definice 5.5 Mějme dány funkce $t, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a nechť T_M, resp. S_M, značí časovou, resp. prostorovou, složitost TS M. Definujeme následující časové a prostorové třídy složitosti deterministických a nedeterministických TS:

- $DTime[t(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový DTS $M : L = L(M)$ a $T_M \in O(t(n))\}$.
- $NTime[t(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový NTS $M : L = L(M)$ a $T_M \in O(t(n))\}$.
- $DSpace[s(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový DTS $M : L = L(M)$ a $S_M \in O(s(n))\}$.
- $NSpace[s(n)] = \{L \mid \exists\ k$-páskový NTS $M : L = L(M)$ a $S_M \in O(s(n))\}$.

❖ Definici tříd složitosti pak přímočaře zobecňujeme tak, aby mohly být založeny na množině funkcí, nejen na jedné konkrétní funkci.

❖ *Poznámka*: Dále ukážeme, že použití více pásek přináší jen polynomiální zrychlení. Na druhou stranu ukážeme, že zatímco nedeterminismus nepřináší nic podstatného z hlediska vyčíslitelnosti, může přinášet mnoho z hlediska složitosti.

Časově/prostorově zkonstruovatelné funkce

❖ Třídy složitosti obvykle budujeme nad tzv. časově/prostorově zkonstruovatelnými funkcemi:

- Důvodem zavedení časově/prostorově zkonstruovatelných funkcí je dosáhnout intuitivní hierarchické struktury tříd složitosti – např. odlišení tříd $f(n)$ a $2^{f(n)}$, což, jak uvidíme, pro třídy založené na obecných rekurzívních funkcích nelze.

Definice 5.6 Funkci $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme časově zkonstruovatelnou (time constructible), jestliže existuje vícepáskový TS, jenž pro libovolný vstup w zastaví po přesně $t(|w|)$ krocích.

Definice 5.7 Funkci $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ nazveme prostorově zkonstruovatelnou (space constructible), jestliže existuje vícepáskový TS, jenž pro libovolný vstup w zastaví s využitím přesně $s(|w|)$ buněk pásky.

❖ *Poznámka*: Pokud je jazyk L nad Σ přijímán strojem v čase/prostoru omezeném časově/prostorově zkonstruovatelnou funkcí, pak je také přijímán strojem, který pro každé $w \in \Sigma^*$ vždy zastaví:

- U časového omezení $t(n)$ si stačí předem spočíst, jaký je potřebný počet kroků a zastavit po jeho vyčerpání.
- U prostorového omezení spočteme z $s(n)$, $|Q|$, $|\Delta|$ maximální počet konfigurací, které můžeme vidět a z toho také plyne maximální počet kroků, které můžeme udělat, aniž bychom cyklili.

Nejběžněji užívané třídy složitosti

- Deterministický/nedeterministický polynomiální čas:

$$\mathbf{P} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DTime(n^k) \qquad \mathbf{NP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NTime(n^k)$$

- Deterministický/nedeterministický polynomiální prostor:

$$\mathbf{PSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DSpace(n^k) \equiv \mathbf{NPSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NSpace(n^k)$$

Třídy pod a nad polynomiální složitostí

- Deterministický/nedeterministický logaritmický prostor:

$$\mathbf{LOGSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DSpace(k \lg n) \qquad \mathbf{NLOGSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NSpace(k \lg n)$$

- Deterministický/nedeterministický exponenciální čas:

$$\mathbf{EXP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DTime(2^{n^k}) \qquad \mathbf{NEXP} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NTime(2^{n^k})$$

- Deterministický/nedeterministický exponenciální prostor:

$$\mathbf{EXPSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} DSpace(2^{n^k}) \quad \equiv \quad \mathbf{NEXPSPACE} = \bigcup_{k=0}^{\infty} NSpace(2^{n^k})$$

Třídy nad exponenciální složitostí

- Det./nedet. k-exponenciální čas/prostor založený na věži exponenciál $2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ o výšce k:

$$\mathbf{k\text{-}EXP} = \bigcup_{l=0}^{\infty} DTime(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}}}) \qquad \mathbf{k\text{-}NEXP} = \bigcup_{l=0}^{\infty} NTime(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}}})$$

$$\mathbf{k\text{-}EXPSPACE} = \bigcup_{l=0}^{\infty} DSpace(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}}}) \equiv \mathbf{k\text{-}NEXPSPACE} = \bigcup_{l=0}^{\infty} NSpace(2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{n^l}}}}}})$$

$$\mathbf{ELEMENTARY} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathbf{k\text{-}EXP}$$

Vrchol hierarchie tříd složitosti

❖ Na vrcholu hierarchie tříd složitosti se pak hovoří o obecných třídách jazyků (funkcí), se kterými jsme se již setkali:

- třída primitivně-rekurzívních funkcí **PR** (implementovatelných pomocí zanořených cyklů s pevným počtem opakování – `for i=... to ...`),
- třída $\mu-$rekurzívních funkcí (rekurzívních jazyků) **R** (implementovatelných pomocí cyklů s předem neurčeným počtem opakování – `while ...`) a
- třída rekurzívně vyčíslitelných funkcí (rekurzívně vyčíslitelných jazyků) **RE**.

Příklad na analýzu složitosti I

Najděte co nejmenší k takové, aby platilo

a) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in DTIME[n^k]$

b) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in NTIME[n^k]$.

Uveďte hlavní myšlenku důkazu (zahrnující konstrukci požadovaného Turingova stroje a jeho časovou analýzu), že pro nalezené k implikace platí. Nedokazujte minimalitu k.

Příklad na analýzu složitosti I

Najděte co nejmenší k takové, aby platilo

a) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in DTIME[n^k]$

b) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in NTIME[n^k]$.

Uveďte hlavní myšlenku důkazu (zahrnující konstrukci požadovaného Turingova stroje a jeho časovou analýzu), že pro nalezené k implikace platí. Nedokazujte minimalitu k.

Označíme $L' = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\}$

a) Sestrojíme DTS M' akceptující M'. M' systematicky prochází všechny rozdělení vstupního slova w ($|w| = n$) na podslova w_1, w_2 a w_3 (tj. $w = w_1 w_2 w_3$). Těchto rozdělení je $O(n^2)$ (potřebujeme umístit 2 "zarážky"). Konstrukce každého rozdělení je v $O(n)$. Pro každé rozdělení zkontrolujeme, zda $w_1 \in L \wedge w_2 \in L \wedge w_3 \in L$, tj. 3-krát voláme DTS M, který akceptuje L v $O(n^3)$. Celkově složitost M' je: $O(n^2) \cdot (O(n) + 3 \cdot O(n^3)) = O(n^5)$. Tudíž $k = 5$.

b) Sestrojíme NTS M' akceptující M'. M' nedeterministicky rozdělí vstupní slovo w na podslova w_1, w_2 a w_3 (tj. $w = w_1 w_2 w_3$). Toto rozdělení zkonstruuje a ověří požadovanou vlastnost (tj. $w_1 \in L \wedge w_2 \in L \wedge w_3 \in L$) v $O(n) + 3 \cdot O(n^3)$ a tudíž celková složitost M' je v $O(n^3)$. Tudíž $k = 3$.

Příklad na analýzu složitosti II

Uvažme jazyk

$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2$ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,

pro které existuje valuace proměnných $\bar{v}$ taková, že $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}$.

Poznámka: $\Phi_i(\bar{v}) \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ označuje, zda je formule Φ_i pravdivá při valuaci proměnných $\bar{v}$.

Příklad na analýzu složitosti II

Uvažme jazyk

$$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2 \text{ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,}$$
$$\text{pro které existuje valuace proměnných } \bar{v} \text{ taková, že } \Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}.$$

Poznámka: $\Phi_i(\bar{v}) \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ označuje, zda je formule Φ_i pravdivá při valuaci proměnných $\bar{v}$.

Nejdříve ukážeme, že $L_{NE} \in \mathbf{EXP}$.

- Sestrojíme DTS M, t.ž. $L(M) = L_{NE}$ a M pracuje v exponenciálním čase.
- M postupně generuje (např. v lexikografickém pořadí) jednotlivé valuace $\bar{v}$ proměnných z formule Φ_1 a Φ_2.
- Pro každou valuaci $\bar{v}$ M vyhodnotí $\Phi_1(\bar{v})$ a $\Phi_2(\bar{v})$ (lineární průchod oběma formulemi).
- Pokud $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})$, tak M akceptuje. Pokud prošel všechny valuace a neakceptoval, tak zamítne.
- Pokud Φ_1 a Φ_2 obsahuje n proměnných, pak existuje 2^n různých valuací. Složitost M je tedy v $O(2^n \cdot n) \subseteq O\left(2^{2n}\right) \subseteq \mathbf{EXP}$.

Příklad na analýzu složitosti II

Uvažme jazyk

$$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2 \text{ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,}$$
$$\text{pro které existuje valuace proměnných } \bar{v} \text{ taková, že } \Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}.$$

Nyní ukážeme, že $L_{NE} \in \mathbf{NP}$.

- Sestrojíme NTS M, t.ž. $L(M) = L_{NE}$ a M pracuje v polynomiálním čase.
- M nedeterministicky zvolí (uhádne) valuaci $\bar{v}$ proměnných z formule Φ_1 a Φ_2.
- M vyhodnotí $\Phi_1(\bar{v})$ a $\Phi_2(\bar{v})$ (lineární průchod oběma formulemi).
- Pokud $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})$, tak M akceptuje. V opačném případě zamítne.
- Složitost M je tedy v $O(n)$. Ukázali jsme, že pro L_{NE} existuje polynomiální verifikátor.

Připomeňme, že $L_{NE} \in \mathbf{EXP}$ plyne taktéž přímo z $L_{NE} \in \mathbf{NP}$.

Těžkost a Úplnost

Jazyky $\mathcal{C}$-těžké a $\mathcal{C}$-úplné

❖ Až doposud jsme třídy používali jako horní omezení složitosti problémů. Všimněme si nyní omezení dolního – to zavedeme pomocí redukovatelnosti třídy problémů na daný problém.

Definice 5.8 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí. Jazyk $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ je $\mathcal{R}$ redukovatelný (přesněji $\mathcal{R}$ many-to-one reducible) na jazyk $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, což zapisujeme $L_1 \leq_{\mathcal{R}}^m L_2$, jestliže existuje funkce f z $\mathcal{R}$ taková, že $\forall w \in \Sigma_1^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.

Definice 5.9 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí a $\mathcal{C}$ třída jazyků. Jazyk L_0 je $\mathcal{C}$-těžký ($\mathcal{C}$-hard) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, jestliže $\forall L \in \mathcal{C} : L \leq_{\mathcal{R}}^m L_0$.

Definice 5.10 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí a $\mathcal{C}$ třída jazyků. Jazyk L_0 nazveme $\mathcal{C}$-úplný ($\mathcal{C}$-complete) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, jestliže $L_0 \in \mathcal{C}$ a L_0 je $\mathcal{C}$-těžký ($\mathcal{C}$-hard) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti.

Nejběžnější typy úplnosti

❖ Uveďme nyní nejběžněji používané typy úplnosti – všimněme si, že je použita redukovatelnost dostatečně silná na to, aby bylo možné najít úplné problémy vůči ní a na druhou stranu nebyly příslušné třídy triviálně redukovány na jejich (možné) podtřídy:

- **NP**, **PSPACE**, **EXP** úplnost je definována vůči polynomiální redukovatelnosti (tj. redukovatelnosti pomocí DTS pracujících v polynomiálním čase),
- **P**, **NLOGSPACE** úplnost definujeme vůči redukovatelnosti v deterministickém logaritmickém prostoru,
- **NEXP** úplnost definujeme vůči exponenciální redukovatelnosti (tj. redukovatelnosti pomocí DTS pracujících v exponenciálním čase).

Příklady složitosti problémů

❖ Příklady $\mathbf{LOGSPACE}$ problémů:

- existence cesty mezi dvěma uzly v neorientovaném grafu.

❖ Příklady $\mathbf{NLOGSPACE}$-úplných problémů:

- existence cesty mezi dvěma uzly v orientovaném grafu,
- 2-SAT (*SATisfiability*), tj. splnitelnost výrokových formulí tvaru konjunkce disjunkcí dvou literálů (literál je výroková proměnná nebo její negace), např. $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$.

❖ Příklady $\mathbf{P}$-úplných problémů:

- splnitelnost konjunkce Hornových klauzulí $(p \wedge q \wedge ... \wedge t) \Rightarrow u$, kde p, q, ... jsou atomické formule výrokové logiky (výrokové proměnné),
  - nerozhodnutelné v predikátové podobě
- náležitost řetězce do jazyka bezkontextové gramatiky: algoritmus „CYK“ založený na dynamickém programování (Cocke, Younger, Kasami) – $O(n^3)$,
- topologické uspořádání – pořadí uzlů při průchodu grafem do hloubky (pro dané řazení přímých následníků).

❖ Příklady $\mathbf{NP}$-úplných problémů:

- splnitelnost Booleovských formulí (SAT, 3SAT)
- řada grafových a množinových problémů (viz výše)
- problém obchodního cestujícího,
- „knapsack“ – máme položky s váhou a hodnotou, maximalizujeme hodnotu tak, aby váha nepřekročila určitou mez.

❖ Příklady co-$\mathbf{NP}$-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů bez iterace.

❖ Příklady **PSPACE**-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů,
- náležitost řetězce do jazyka kontextové gramatiky,
- inkluze jazyků nedeterministických konečných automatů,
- model checking formulí lineární temporální logiky (LTL – výroková logika doplněná o temporální operátory *until*, *always*, *eventually*, *next-time*) vůči velikosti formule.

❖ Příklady **EXP**-úplných problémů:

- inkluze jazyka bezkontextové gramatiky v jazyce NKA (opačná $\subseteq$ nerozh.),
- inkluze nedeterministických konečných *stromových automatů*, zobecňujících přechody KA do podoby $p \xrightarrow{a} (q_1, \ldots, q_n)$,
- inkluze pro tzv. *visibly push-down* jazyky (operace push/pop, které provádí přijímající automat, jsou součástí vstupního řetězce),
- nejlepší tah v šachu (zobecněno na šachovnici $n \times n$),
- model checking procesů s neomezeným zásobníkem (rekurzí) vůči zafixované formuli logiky větvícího se času (CTL) – tj. EXP ve velikosti procesu.

❖ Příklady **EXPSPACE**-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů doplněných o operaci kvadrát (tj. r^2).

❖ **k-EXP** / **k-EXPSPACE**:

- rozhodování splnitelnosti formulí Presburgerovy aritmetiky – tj. celočíselné aritmetiky se sčítáním, porovnáváním (ne násobením – to vede na tzv. Peanovu aritmetiku, která je již nerozhodnutelná) a kvantifikací prvního řádu (např. $\forall x, y : x \leq x + y$) je problém, který je v **3-EXP** (**2-EXPSPACE**-úplný).

❖ Problémy mimo **ELEMENTARY**:

- ekvivalence regulárních výrazů doplněných o negaci,
- rozhodování splnitelnosti formulí logiky WS1S – celočíselná aritmetika s operací $+1$ a kvantifikací prvního a druhého řádu (tj. pro každou/existuje hodnota, resp. množina hodnot, taková, že ... – např. $\exists A : \forall x \in A : x + 1 \notin A$),
- verifikace dosažitelnosti v tzv. *Lossy Channel Systems* – procesy komunikující přes neomezenou, ale ztrátovou frontu (cokoliv se může kdykoliv ztratit).

Prvočíselný rozklad

- Problém rozkladu daného celého čísla na součin prvočísel.
- Velmi důležitý problém pro kryptografii.
- Rozhodovací problém: Rozhodni, jestli pro daná čísla n a k existuje číslo $1 < p < k$, které dělí číslo n.
- Ví se, že je v **NP** $\cap$ **co-NP**.
- Neví se, zda je v **P**, ani zda je **NP**-úplný.
- Existuje polynomiální algoritmus pro test je dané číslo prvočíslo.
- Existuje polynomiální algoritmus pro kvantové počítače, který počítá rozklad.