Vlastnosti tříd složitosti

k-páskové Turingovy stroje

Věta 12.1 Je-li jazyk L přijímán nějakým k-páskovým DTS M_k v čase $t(n)$, pak je také přijímán nějakým 1-páskovým DTS M_1 v čase $O(t(n)^2)$.

Důkaz. (idea)

- Obsah k pásek stroje M_k můžeme zapsat na jednu pásku stroje M_1 za sebe a oddělit je vhodným oddělovačem. Pozici hlav M_k na pásce můžeme zakódovat vhodným označením symbolů, pod kterými se hlavy aktuálně nacházejí.
- Při simulaci kroku stroje M_k stroj M_1 dvakrát projde páskou – při jednom průchodu zjistí znaky pod hlavami M_k, při druhém je patřičně upraví.
- Jestliže je na některé simulované pásce stroje M_k nedostatek prostoru, je zapotřebí provést posun zbytku pásky stroje M_1, což si může opět vyžádat dva průchody touto páskou.
- Užitečná délka pásek stroje M_k je ovšem omezena na $t(n)$ a tudíž užitečná délka pásky stroje M_1 je omezena na $k.t(n) + k$, tj. $O(t(n))$.
- Simulace jednoho kroku M_k strojem M_1 je proto v $O(t(n))$.
- Takových kroků se provede $t(n)$ a tudíž M_1 přijímá L v čase $O(t(n)^2)$.

□

Determinismus a nedeterminismus

Věta 12.2 Je-li jazyk L přijímán nějakým NTS M_n v čase $t(n)$, pak je také přijímán nějakým DTS M_d v čase $2^{O(t(n))}$.

Důkaz. (idea) Ukážeme, jak může M_d simulovat M_n v uvedeném čase:

- Očíslujeme si přechody M_n jako $1, 2, ..., k$.
- M_d bude postupně simulovat veškeré možné posloupnosti přechodů M_n (obsah vstupní pásky si uloží na pomocnou pásku, aby ho mohl vždy obnovit; na jinou pásku si vygeneruje posloupnost přechodů z $\{1, 2, ..., k\}^*$ a tu simuluje).
- Vzhledem k možnosti nekonečných výpočtů M_n nelze procházet jeho možné výpočty do hloubky – budeme-li je ale procházet do šířky (tj. nejdřív všechny řetězce z $\{1, 2, ..., k\}^*$ délky 1, pak 2, pak 3, ...), určitě nalezneme nejkratší přijímající posloupnost přechodů pro M_n, existuje-li.
- Takto projdeme nanejvýš $O(k^{t(n)})$ cest, simulace každé z nich je v $O(t(n))$ a tudíž celkem využijeme nanejvýš čas $O(k^{t(n)})O(t(n)) = 2^{O(t(n))}$.

□

❖ Doposud nikdo nebyl schopen přijít s polynomiální simulací NTS pomocí DTS. **Zdá se** tedy, že nedeterminismus přináší značnou výhodu z hlediska časové složitosti výpočtů.

❖ Zatímco *se zdá*, že nedeterminismus přináší značnou výhodu z hlediska časové složitosti výpočtů, v případě prostorové složitosti je situace jiná:

Věta 12.3 (Savitchův teorém) $NSpace[s(n)] \subseteq DSpace[s^2(n)]$ pro každou prostorově zkonstruovatelnou funkci $s(n) \geq lg\ n$.

Důkaz. Uvažme NTS $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_F)$ rozhodující $L(M)$ v prostoru $s(n)$:

- Existuje $k \in \mathbb{N}$ závislé jen na $|Q|$ a $|\Gamma|$ takové, že pro libovolný vstup w, M projde nanejvýš $k^{s(n)}$ konfigurací o délce max. $s(n)$.
- To implikuje, že M provede pro w nanejvýš $k^{s(n)} = 2^{s(n)lg\ k}$ kroků.
- Pomocí DTS můžeme snadno implementovat proceduru $test(c, c', i)$, která otestuje, zda je možné v M dojít z konfigurace c do c' v 2^i krocích:
  procedure $test(c, c', i)$
  if $(i = 0)$ **then return** $((c = c') \vee (c \underset{M}{\vdash} c'))$
  else for all configurations c'' such that $|c''| \leq s(n)$ **do**
  if $(test(c, c'', i-1) \wedge test(c'', c', i-1))$ **then return** $true$
  return $false$

Důkaz pokračuje dále.

Pokračování důkazu.

- Všimněme si, že rekurzivním vyvoláváním $test$ vzniká strom o výšce i simulující posloupností svých listů posloupnost 2^i výpočetních kroků.
- Nyní k deterministické simulaci M postačí projít všechny akceptující konfigurace c_F takové, že $|c_F| \leq s(n)$, a ověřit, zda $test(c_o, c_f, \lceil s(n) lg\ k \rceil)$, kde c_0 je počáteční konfigurace.
- Každé vyvolání $test$ zabere prostor $O(s(n))$, hloubka rekurze je $\lceil s(n) lg\ k \rceil = O(s(n))$ a tedy celkově deterministicky simulujeme M v prostoru $O(s^2(n))$.
- Dodejme, že $s(n)$ může být zkonstruováno v prostoru $O(s(n))$ (jedná se o prostorově zkonstruovatelnou funkci) a tudíž neovlivňuje výše uvedené úvahy.

□

❖ Důsledkem Savitchova teorému jsou již dříve uvedené rovnosti:

- **PSPACE** $\equiv$ **NPSPACE**,
- **k-EXPSPACE** $\equiv$ **k-NEXPSPACE**.

Prostor kontra čas

❖ Intuitivně můžeme říci, že zatímco prostor může růste relativně pomalu, čas může růst výrazně rychleji, neboť můžeme opakovaně procházet týmiž buňkami pásky – opačně tomu být zřejmě nemůže (nemá smysl mít nevyužitý prostor).

Věta 12.4 *$NSpace[t(n)] \subseteq DTime[O(1)^{t(n)}]$ pro každou časově zkonstruovatelnou funkci $t(n) \geq lg\ n$.

Důkaz. Dá se použít do jisté míry podobná konstrukce jako u Savitchova teorému – blíže viz literatura. □ *

Věty o kompresi prostoru a zrychlení

Věta 12.5 Nechť M je DTS. Pak existuje ekvivalentní TS N takový, že

$$S_N(n) \leq \frac{S_M(n)}{2} + 2$$

Důkaz. (Idea) Abeceda stroje N obsahuje dvojice znaků abecedy stroje M. Obsah pásky $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stroje M pak bude reprezentován jako

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \ldots$$

□

Věta 12.6 Nechť M je DTS. Pak existuje ekvivalentní TS N takový, že

$$T_N(n) \leq \frac{T_M(n)}{2} + 2n$$

Důkaz. (Idea) Stroj N si předpočítá výsledky všech možných výpočtů délky 2 stroje M.

□

Uzavřenost vůči doplňku

❖ Doplňkem třídy rozumíme třídu jazyků, které jsou doplňkem jazyků dané třídy. Tedy označíme-li doplněk třídy $\mathcal{C}$ jako $co\text{-}\mathcal{C}$, pak $L \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \overline{L} \in co\text{-}\mathcal{C}$. U rozhodování problémů toto znamená rozhodování komplementárního problému (prázdnost x neprázdnost apod.).

❖ Prostorové třídy jsou obvykle uzavřeny vůči doplňku:

Věta 12.7 *Jestliže $s(n) \geq lg\ n$, pak $NSpace(s(n)) = co\text{-}NSpace(s(n))$.

Důkaz. Jedná se o teorém Immermana a Szelepcsényiho – důkaz viz literatura. □ *

❖ Pro časové třídy je situace jiná:

- Některé třídy jako **P** či **EXP** jsou uzavřeny vůči doplňku.
- U jiných významných tříd zůstává otázka uzavřenosti vůči doplňku otevřená. Proto má smysl hovořit např. i o třídách jako:
  - **co-NP** či
  - **co-NEXP**.

Věta 12.8 Třída **P** je uzavřena vůči doplňku.

Důkaz. (idea) Základem je to, že ukážeme, že jestliže jazyk L nad Σ může být přijat DTS M v polynomiálním čase, pak také existuje DTS M', který L rozhoduje v polynomiálním čase, tj. $L = L(M')$ a existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $w \in \Sigma^*$ M' zastaví v čase $O(|w|^k)$:

- M' na začátku výpočtu určí délku vstupu w a vypočte $p(|w|)$, kde $p(n)$ je polynom určující složitost přijímání strojem M. Na speciální dodatečnou pásku uloží $p(|w|)$ symbolů.
- Následně M' simuluje M, přičemž za každý krok umaže jeden symbol z dodatečné pásky. Pokud odebere z této pásky všechny symboly a M by mezitím nepřijal, M' abnormálně ukončí výpočet (odmítne).
- M' evidentně přijme všechny řetězce, které přijme M na to mu stačí $p(n)$ simulovaných kroků a nepřijme všechny řetězce, které by M nepřijal – pokud M nepřijme v $p(n)$ krocích, nepřijme vůbec. M' však vždy zastaví v $O(p(n))$ krocích.

□

Ostrost hierarchie tříd

❖ Z dosavadního můžeme shrnout, že platí následující:

- **LOGSPACE** $\subseteq$ **NLOGSPACE** $\subseteq$ **P** $\subseteq$ **NP**
- **NP** $\subseteq$ **PSPACE** $=$ **NPSPACE** $\subseteq$ **EXP** $\subseteq$ **NEXP**
- **NEXP** $\subseteq$ **EXPSPACE** $=$ **NEXPSPACE** $\subseteq$ **2-EXP** $\subseteq$ **2-NEXP** $\subseteq$ ...
- ... $\subset$ **ELEMENTARY** $\subset$ **PR** $\subset$ **R** $\subset$ **RE** [a]

❖ Řada otázek ostrosti uvedených vztahů pak zůstává otevřená, nicméně z tzv. teorému hierarchie (nebudeme ho zde přesně uvádět, neboť je velmi technický – zájemci ho naleznou v literatuře) plyne, že exponenciální „mezery“ mezi třídami jsou „ostré“:

- **LOGSPACE**, **NLOGSPACE** $\subset$ **PSPACE**,
- **P** $\subset$ **EXP**,
- **NP** $\subset$ **NEXP**,
- **PSPACE** $\subset$ **NEXPSPACE**,
- **EXP** $\subset$ **2-EXP**, ...

[a] Bez důkazu jsme doplnili, že $\mathbf{ELEMENTARY} \subset \mathbf{PR}$.

Jazyky $\mathcal{C}$-těžké a $\mathcal{C}$-úplné

❖ Až doposud jsme třídy používali jako horní omezení složitosti problémů. Všimněme si nyní omezení dolního – to zavedeme pomocí redukovatelnosti třídy problémů na daný problém.

Definice 12.1 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí. Jazyk $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ je $\mathcal{R}$ redukovatelný (přesněji $\mathcal{R}$ many-to-one reducible) na jazyk $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$, což zapisujeme $L_1 \leq_{\mathcal{R}}^m L_2$, jestliže existuje funkce f z $\mathcal{R}$ taková, že $\forall w \in \Sigma_1^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$.

Definice 12.2 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí a $\mathcal{C}$ třída jazyků. Jazyk L_0 je $\mathcal{C}$-těžký ($\mathcal{C}$-hard) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, jestliže $\forall L \in \mathcal{C} : L \leq_{\mathcal{R}}^m L_0$.

Definice 12.3 Nechť $\mathcal{R}$ je třída funkcí a $\mathcal{C}$ třída jazyků. Jazyk L_0 nazveme $\mathcal{C}$-úplný ($\mathcal{C}$-complete) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti, jestliže $L_0 \in \mathcal{C}$ a L_0 je $\mathcal{C}$-těžký ($\mathcal{C}$-hard) vzhledem k $\mathcal{R}$ redukovatelnosti.

Nejběžnější typy úplnosti

❖ Uveďme nyní nejběžněji používané typy úplnosti – všimněme si, že je použita redukovatelnost dostatečně silná na to, aby bylo možné najít úplné problémy vůči ní a na druhou stranu nebyly příslušné třídy triviálně redukovány na jejich (možné) podtřídy:

- **NP**, **PSPACE**, **EXP** úplnost je definována vůči polynomiální redukovatelnosti (tj. redukovatelnosti pomocí DTS pracujících v polynomiálním čase),
- **P**, **NLOGSPACE** úplnost definujeme vůči redukovatelnosti v deterministickém logaritmickém prostoru,
- **NEXP** úplnost definujeme vůči exponenciální redukovatelnosti (tj. redukovatelnosti pomocí DTS pracujících v exponenciálním čase).

Polynomiální redukce

Definice 12.4 *Polynomiální redukce* jazyka L_1 nad abecedou Σ_1 na jazyk L_2 nad abecedou Σ_2 je funkce $f : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$, pro kterou platí:

1. $\forall w \in \Sigma_1^* : w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$
2. f je vyčíslitelná DTS v polynomiálním čase.

Existuje-li polynomiální redukce jazyka L_1 na L_2, říkáme, že L_1 se *(polynomiálně) redukuje na* L_2 a píšeme $L_1 \leq_P^m L_2$.

Věta 12.9 Je-li $L_1 \leq_P^m L_2$ a L_2 je ve třídě P, pak L_1 je ve třídě P.

Důkaz. Nechť M_f je Turingův stroj, který provádí redukci f jazyka L_1 na L_2 a nechť $p(x)$ je jeho časová složitost. Pro libovolné $w \in L_1$ výpočet $f(w)$ vyžaduje nanejvýš $p(|w|)$ kroků a produkuje výstup maximální délky $p(|w|) + |w|$.
Nechť M_2 přijímá jazyk L_2 v polynomiálním čase daném polynomem $q(x)$.
Uvažujme Turingův stroj, který vznikne kompozicí $M_f M_2$. Tento stroj přijímá jazyk L_1 tak, že pro každé $w \in L_1$ udělá stroj $M_f M_2$ maximálně $p(|w|) + q(p(|w|) + |w|)$ kroků, což je polynomem ve $|w|$ a tedy L_1 leží ve třídě P. □

SAT-problém

Problém splnitelnosti – SAT problém

❖ Nechť $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ je konečná množina Booleovských proměnných (prvotních formulí výrokového počtu). *Literálem* nazveme každou proměnnou v_i nebo její negaci $\overline{v_i}$. *Klausulí* nazveme výrokovou formuli obsahující pouze literály spojené výrokovou spojkou $\vee$ (nebo).

Příklady klausulí: $v_1 \vee \overline{v_2}$, $v_2 \vee v_3$, $\overline{v_1} \vee \overline{v_3} \vee v_2$.

❖ *SAT-problém* lze formulovat takto: Je dána množina proměnných V a množina klausulí nad V. Je tato množina klausulí splnitelná?

❖ Každý konkrétní SAT-problém můžeme zakódovat jediným řetězcem takto: Nechť $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, každý literál v_i zakódujeme řetězcem délky m, který obsahuje samé 0 s výjimkou i-té pozice, která obsahuje symbol p, jde-li o literál v_i, nebo n, jde-li o literál $\overline{v_i}$. Klausuli reprezentujeme seznamem zakódovaných literálů oddělených symbolem $/$. SAT-problém bude seznam klausulí uzavřených v aritmetických závorkách.

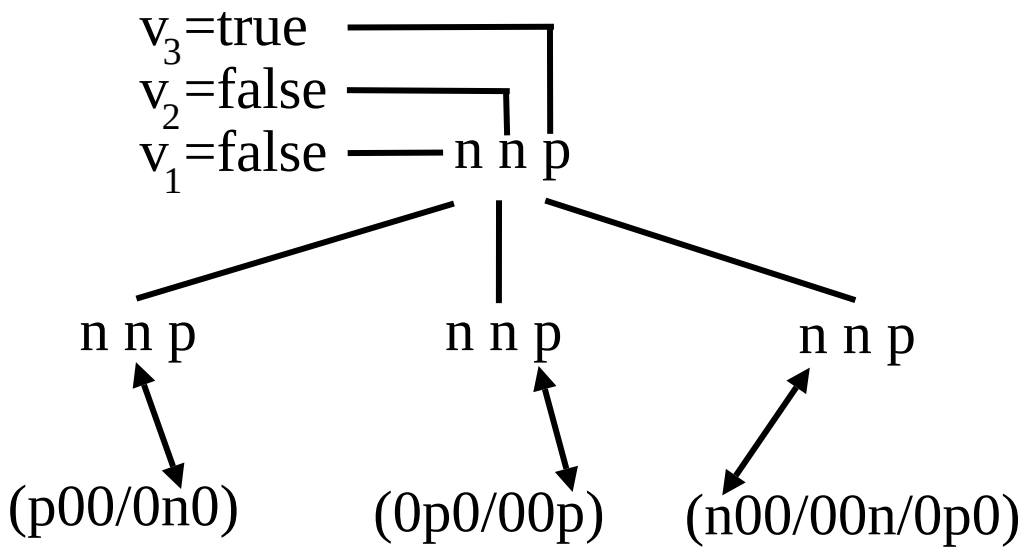
Příklad 12.1 SAT-problém obsahuje proměnné v_1, v_2, v_3 a klausule $v_1 \vee \overline{v_2}$, $v_2 \vee v_3$, $\overline{v_1} \vee \overline{v_3} \vee v_2$ bude reprezentována řetězcem: $(p00/0n0)(0p0/00p)(n00/00n/0p0)$.

❖ Označme L_{SAT} jazyk obsahující řetězce tohoto typu, které reprezentují splnitelné množiny klausulí.

Řetězec $(p00/0n0)(0p0/00p)(n00/00n/0p0)$ je prvkem L_{SAT} $(v_1 = F, v_2 = F, v_3 = T)$, na rozdíl od řetězce $(p00/0p0)(n00/0p0)(p00/0n0)(n00/0n0)$, který je kódem nesplnitelné množiny klausulí $v_1 \vee v_2$, $\overline{v_1} \vee v_2$, $v_1 \vee \overline{v_2}$, $\overline{v_1} \vee \overline{v_2}$.

❖ Přiřazení pravdivostních hodnot budeme reprezentovat řetězcem z $\{p, n\}^+$, kde p v i-té pozici představuje přiřazení $v_i \approx$ true a n v i-té pozici představuje přiřazení $v_i \approx$ false.

❖ Pak test, zda určité hodnocení je modelem množiny klausulí (množina klausulí je pro toto hodnocení splněna), je velmi jednoduchý a ilustruje ho obrázek:



❖ Na uvedeném principu můžeme zkonstruovat nedeterministický Turingův stroj, který přijímá jazyk L_{SAT} v polynomiálním čase. Zvolíme 2-páskový Turingův stroj, který:

1. začíná kontrolou, zda vstup reprezentuje množinu klausulí,
2. na 2. pásku nageneruje řetězec z $\{n, p\}^m$ nedeterministickým způsobem,
3. posouvá hlavu na 1. pásce a testuje, zda pro dané ohodnocení (na 2. pásce) je množina klausulí splnitelná.

Tento proces může být snadno implementován s polynomiální složitostí přijetí v závislosti na délce vstupního řetězce a tedy $L_{SAT} \in NP$.

❖ Princip „guess & check“ použitý výše se často užívá při ukázání členství v **NP**.

Věta 12.10 *Cookův teorém:* Je-li L libovolný jazyk z NP, pak $L \leq_P^m L_{SAT}$.

Hlavní myšlenka důkazu: Protože $L \in NP$, existuje nedeterministický Turingův stroj M a polynom $p(x)$ tak, že pro každé $w \in L$ stroj M přijímá w v maximálně $p(|w|)$ krocích. Jádro důkazu tvoří konstrukce polynomiální redukce f z L na L_{SAT}: Pro každý řetězec $w \in L$ bude $f(w)$ množina klausulí, které jsou splnitelné, právě když M přijímá w.

***NP**-úplné jazyky*

❖ Po objevení Cookova teorému se ukázalo, že mnoho dalších **NP** jazyků má vlastnost podobnou jako L_{SAT}, t.j. jsou polynomiálními redukcemi ostatních **NP** jazyků.

❖ Tyto jazyky se – jak již víme – nazývají ***NP**-úplné* (**NP**-complete) jazyky.

❖ Kdyby se ukázalo, že libovolný z těchto jazyků je v **P**, pak by muselo platit **P** $=$ **NP**; naopak důkaz, že některý z nich leží mimo **P** by znamenalo **P** $\subset$ **NP**.

Význačné NP-úplné problémy

- *Satisfiability*: Je boolovský výraz splnitelný?
- *Clique*: Obsahuje neorientovaný graf kliku velikosti k?
- *Vertex cover*: Má neorientovaný graf dominantní množinu mohutnosti k?
- *Hamilton circuit*: Má neorientovaný graf Hamiltonovskou kružnici?
- *Colorability*: Má neorientovaný graf chromatické číslo k?
- *Directed Hamilton circuit*: Má neorientovaný graf Hamiltonovský cyklus?
- *Set cover*: Je dána třída množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Existuje podtřída k množin $S_{i_1}, S_{i_2}, \ldots, S_{i_k}$ taková, že $\bigcup_{j=1}^{k} S_{i_j} = \bigcup_{j=1}^{n} S_j$?
- *Exact cover*: Je dána třída množin $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Existuje množinové pokrytí (set cover) tvořené podtřídou po dvojicích disjunktních množin?

Příklad na analýzu složitosti I

Uvažme jazyk

$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2$ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,

pro které existuje valuace proměnných $\bar{v}$ taková, že $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}$.

Poznámka: $\Phi_i(\bar{v}) \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ označuje, zda je formule Φ_i pravdivá při valuaci proměnných $\bar{v}$.

Příklad na analýzu složitosti I

Uvažme jazyk

$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2$ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,
pro které existuje valuace proměnných $\bar{v}$ taková, že $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}$.

Poznámka: $\Phi_i(\bar{v}) \in \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ označuje, zda je formule Φ_i pravdivá při valuaci proměnných $\bar{v}$.

Nejdříve ukážeme, že $L_{NE} \in \mathbf{EXP}$.

- Sestrojíme DTS M, t.ž. $L(M) = L_{NE}$ a M pracuje v exponenciálním čase.
- M postupně generuje (např. v lexikografickém pořadí) jednotlivé valuace $\bar{v}$ proměnných z formule Φ_1 a Φ_2.
- Pro každou valuaci $\bar{v}$ M vyhodnotí $\Phi_1(\bar{v})$ a $\Phi_2(\bar{v})$ (lineární průchod oběma formulemi).
- Pokud $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})$, tak M akceptuje. Pokud prošel všechny valuace a neakceptoval, tak zamítne.
- Pokud Φ_1 a Φ_2 obsahuje n proměnných, pak existuje 2^n různých valuací. Složitost M je tedy v $O(2^n \cdot n) \subseteq O\left(2^{2n}\right) \subseteq \mathbf{EXP}$.

Příklad na analýzu složitosti II

Uvažme jazyk

$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2$ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,
pro které existuje valuace proměnných $\bar{v}$ taková, že $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}$.

Nyní ukážeme, že $L_{NE} \in \mathbf{NP}$.

- Sestrojíme NTS M, t.ž. $L(M) = L_{NE}$ a M pracuje v polynomiálním čase.
- M nedeterministicky zvolí (uhádne) valuaci $\bar{v}$ proměnných z formule Φ_1 a Φ_2.
- M vyhodnotí $\Phi_1(\bar{v})$ a $\Phi_2(\bar{v})$ (lineární průchod oběma formulemi).
- Pokud $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})$, tak M akceptuje. V opačném případě zamítne.
- Složitost M je tedy v $O(n)$. Ukázali jsme, že pro L_{NE} existuje polynomiální verifikátor.

Připomeňme, že $L_{NE} \in \mathbf{EXP}$ plyne taktéž přímo z $L_{NE} \in \mathbf{NP}$.

Příklad na analýzu složitosti III

Najděte co nejmenší k takové, aby platilo

a) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in DTIME[n^k]$

b) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in NTIME[n^k]$.

Uveďte hlavní myšlenku důkazu (zahrnující konstrukci požadovaného Turingova stroje a jeho časovou analýzu), že pro nalezené k implikace platí. Nedokazujte minimalitu k.

Příklad na analýzu složitosti III

Najděte co nejmenší k takové, aby platilo

a) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in DTIME[n^k]$

b) $L \in DTIME[n^3] \Rightarrow \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\} \in NTIME[n^k]$.

Uveďte hlavní myšlenku důkazu (zahrnující konstrukci požadovaného Turingova stroje a jeho časovou analýzu), že pro nalezené k implikace platí. Nedokazujte minimalitu k.

Označíme $L' = \{w \in \Sigma^* \mid \exists w_1, w_2, w_3 \in L \text{ t.ž. } w = w_1 w_2 w_3\}$

a) Sestrojíme DTS M' akceptující L'. M' systematicky prochází všechny rozdělení vstupního slova w ($|w| = n$) na podslova w_1, w_2 a w_3 (tj. $w = w_1 w_2 w_3$). Těchto rozdělení je $O(n^2)$ (potřebujeme umístit 2 "zarážky"). Konstrukce každého rozdělení je v $O(n)$. Pro každé rozdělení zkontrolujeme, zda $w_1 \in L \wedge w_2 \in L \wedge w_3 \in L$, tj. 3-krát voláme DTS M, který akceptuje L v $O(n^3)$. Celkově složitost M' je: $O(n^2) \cdot (O(n) + 3 \cdot O(n^3)) = O(n^5)$. Tudíž $k = 5$.

b) Sestrojíme NTS M' akceptující L'. M' nedeterministicky rozdělí vstupní slovo w na podslova w_1, w_2 a w_3 (tj. $w = w_1 w_2 w_3$). Toto rozdělení zkonstruuje a ověří požadovanou vlastnost (tj. $w_1 \in L \wedge w_2 \in L \wedge w_3 \in L$) v $O(n) + 3 \cdot O(n^3)$ a tudíž celková složitost M' je v $O(n^3)$. Tudíž $k = 3$.

Příklad na polynomiální redukci

Uvažme jazyk

$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2$ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,
pro které existuje valuace proměnných $\bar{v}$ taková, že $\Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}$.

Nyní ukážeme, že L_{NE} je $\mathbf{NP}$-těžký což nám s předchozím důkazem dá $\mathbf{NP}$-úplnost.

Příklad na polynomiální redukci

Uvažme jazyk

$$L_{NE} = \{(\Phi_1, \Phi_2) \mid \Phi_1, \Phi_2 \text{ jsou výrokové formule v konjunktivní normální formě,}$$
$$\text{pro které existuje valuace proměnných } \bar{v} \text{ taková, že } \Phi_1(\bar{v}) \neq \Phi_2(\bar{v})\}.$$

Nyní ukážeme, že L_{NE} je $\mathbf{NP}$-těžký což nám s předchozím důkazem dá $\mathbf{NP}$-úplnost.

- Ukážeme, že $L_{SAT} \leq_P^m L_{NE}$. Bez ztráty na obecnosti uvažme, že

  $$L_{SAT} = \{\Phi \mid \Phi \text{ je výroková formule v konjunktivní normální formě,}$$
  $$\text{pro kterou existuje valuace proměnných } \bar{v} \text{ taková, že } \Phi(\bar{v}) = \text{true}\}$$

- Sestrojíme funkci f (vyčíslitelnou DTS v polynomiálním čase), pro kterou platí $f(\Phi) = (\Phi_1, \Phi_2)$ a $\Phi \in L_{SAT} \iff (\Phi_1, \Phi_2) \in L_{NE}$.
- Stačí položit $\Phi_1 \equiv \Phi$ a $\Phi_2 \equiv x_1 \wedge \overline{x_1}$ (x_1 je proměnná a tudíž Φ_2 je kontradikce).

$$\Phi \in L_{SAT} \Rightarrow \exists \bar{v} : \Phi_1(\bar{v}) = \text{true} \wedge \Phi_2(\bar{v}) = \text{false} \Rightarrow (\Phi_1, \Phi_2) \in L_{NE}$$

$$\Phi \notin L_{SAT} \Rightarrow \forall \bar{v} : \Phi_1(\bar{v}) = \text{false} = \Phi_2(\bar{v}) \Rightarrow (\Phi_1, \Phi_2) \notin L_{NE}$$

Příklady analýzy složitosti mimo Turingovi stroje

Reprezentace grafů

Graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a E je množina hran

- neorientovaný graf: $E = \{\{u, v\} \mid u, v \in V \wedge u \neq v\}$
- orientovaný graf: $E = \{(u, v) \mid u, v \in V\}$

❖ Jak efektivně reprezentovat E

	prostor	dotaz na hranu mezi u, v	vrať následníky u
seznam hran	$O(\|E\|)$	$O(\|E\|)$	$O(\|E\|)$
matice sousednosti	$O(\|V\|^2)$	$O(1)$	$O(\|V\|)$
seznam následníků	$O(\|V\| + \|E\|)$	$O(deg(u)) \leq O(\|V\|)$	$O(deg(u)) \leq O(\|V\|)$
množina následníků	$O(\|V\| + \|E\|)$	$O(log(deg(u)) \leq O(\|V\|)$	$O(deg(u)) \leq O(\|V\|)$

* $deg(u)$ značí počet následníků vrcholu u (výstupní stupeň).

❖ Poznámka: V případě reprezentace pomocí množiny následníků, složitost dotazu na hranu záleží na datové struktuře použité pro reprezentaci množiny (stromy, hashovací tabulka). Pro jednoduchost budeme předpokládat, že dotaz na hranu umíme v $O(1)$.

Souvislost v neorientovaném grafu

- Problém: Je daný graf souvislý: $\forall u, v \in G : \mathrm{cesta}(u, v)$

$\mathrm{cesta}(v_1, v_n) \Leftrightarrow \exists$ posloupnost $v_1 e_1 v_2 e_2 \ldots e_{n-1} v_n \ : \forall 1 \leq i < n : e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \wedge e_i \in E$

- Naivní algoritmus

$s := \mathrm{randomNode}(G)$

$reach := \{s\}, new := true$

while new **do**

  $new := false$

  foreach $\{u, v\} \in E$ **do**

    if $|\{u, v\} \cap reach| = 1$ **then**

      $reach := reach \cup \{u, v\}$

      $new := true$

return $V = reach$

Souvislost v neorientovaném grafu

- Naivní algoritmus

$s := \text{randomNode}(G)$

$reach := \{s\}, new := true$

while new **do**

  $new := false$

  foreach $\{u, v\} \in E$ **do**

    if $|\{u, v\} \cap reach| = 1$ **then**

      $reach := reach \cup \{u, v\}$

      $new := true$

return $V = reach$

- Složitost: $O(|V| \cdot |E|)$

Souvislost v neorientovaném grafu

- Asymptoticky optimální algoritmus

foreach $v \in V$ **do** $v.visited := false$

$s :=$ randomNode(G), $s.visited := true$, $reach := \{s\}$

Q.enqueue(s)

while Q.notEmpty$()$ **do**

  $v := Q$.dequeue$()$

  foreach $u \in Adj(v)$ **do**

    if $u.visited = false$ **then**

      $u.visited := true$, $reach := reach \cup \{u\}$

      Q.enqueue(u)

return $V = reach$

Souvislost v neorientovaném grafu

- Asymptoticky optimální algoritmus

foreach $v \in V$ **do** $v.visited := false$

$s :=$ randomNode(G), $s.visited := true$, $reach := \{s\}$

Q.enqueue(s)

while Q.notEmpty$()$ **do**

  $v := Q$.dequeue$()$

  foreach $u \in Adj(v)$ **do**

    if $u.visited = false$ **then**

      $u.visited := true$, $reach := reach \cup \{u\}$

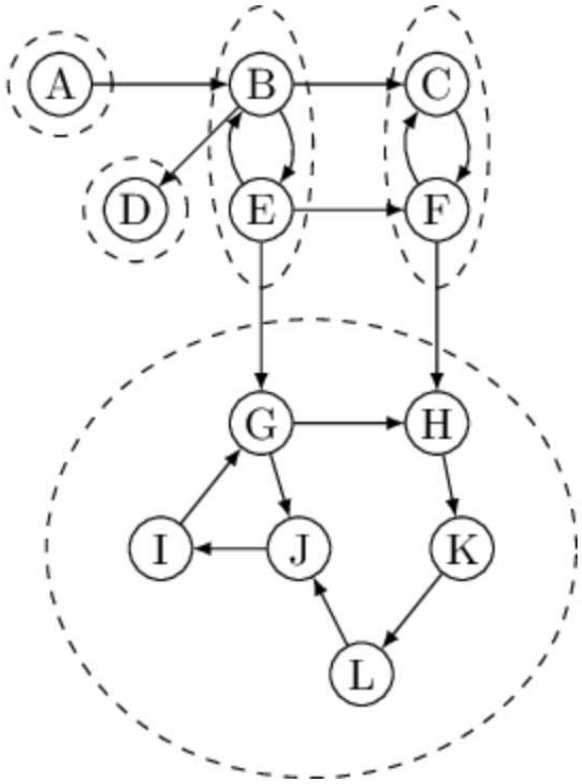
      Q.enqueue(u)

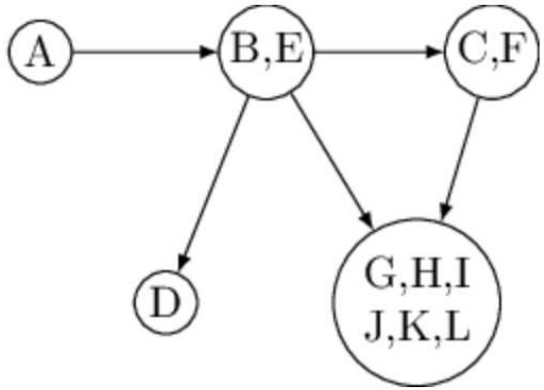
return $V = reach$

- Složitost: $O(|V| + |E|)$

Rozklad na silně souvislé komponenty

- Rozklad orientovaného grafu na silně souvislé komponenty





Rozklad na silně souvislé komponenty

- Naivní algoritmus

$SCC := \emptyset$
while $|V| \neq 0$ **do**
  $s := \text{randomNode}(G)$
  $FWD := Reach(s, G)$ `// states reachable from` s `including` s
  $BWD := Reach(s, G^T)$ `// on transposed G (backward edges)`
  $C := FWD \cap BWD$
  $SCC := SCC \cup \{C\}$
  $V := V \setminus C$
return SCC

Rozklad na silně souvislé komponenty

- Naivní algoritmus

$SCC := \emptyset$
while $|V| \neq 0$ **do**
  $s := \text{randomNode}(G)$
  $FWD := Reach(s, G)$ `// states reachable from` s `including` s
  $BWD := Reach(s, G^T)$ `// on transposed G (backward edges)`
  $C := FWD \cap BWD$
  $SCC := SCC \cup \{C\}$
  $V := V \setminus C$
return SCC

- Složitost: $O((|V| + |E|) \cdot |V|)$

Rozklad na silně souvislé komponenty

- Tarjanův algoritmus – modifikace DFS
- Začněme s DFS, který pro každý vrchol počítá čas návštěvy ($v.time$)

Function `Main`(G)
- **foreach** $v \in V$ **do** $v.time = -1$
- $gTime := 0$
- **foreach** $v \in V$ **do**
  - **if** $v.time = -1$ **then**
    - $gTime := gTime + 1$
    - $v.time := gTime$
    - `DFS`(v)

Function `DFS`$(v \in V)$
- **foreach** $u \in Adj(v)$ **do**
  - **if** $u.time := -1$ **then**
    - $gTime := gTime + 1$
    - $u.time := gTime$
    - `DFS`(u)

- Složitost: $O(|V| + |E|)$

Tarjanův algoritmus

- Budeme počítat $v.low$ and udržovat zásobník vrcholů, které nejsou v SCC.

$$v.low = \min\{u.time \mid \mathrm{Reach}(v,u) \text{ a } u \text{ byl objeven během volani } \texttt{DFS}(v)\}$$

Function `Main`(G)
- **foreach** $v \in V$ **do**
  - $v.time = -1$
- $gTime := 0$
- **foreach** $v \in V$ **do**
  - **if** $v.time = -1$ **then**
    - $gTime := gTime + 1$
    - $v.time := gTime$
    - $v.low := gTime$
    - $stack.\mathrm{push}(v)$
    - `DFS`(v)
- **return** $SCCs$

Function `DFS`$(v \in V)$
- **foreach** $u \in Adj(v)$ **do**
  - **if** $u.time = -1$ **then**
    - $gTime := gTime + 1$
    - $u.time := u.low := gTime$
    - $stack.\mathrm{push}(u)$
    - `DFS`(u)
    - $v.low := \min\{v.low, u.low\}$
  - **else if** $u \in stack$ **then**
    - $v.low = \min\{v.low, u.time\}$
- **if** $v.time = v.low$ **then** pop the $stack$ down to v to create new SCC

Tarjanův algoritmus

- Budeme počítat $v.low$ and udržovat zásobník vrcholů, které nejsou v SCC.

$$v.low = \min\{u.time \mid \text{Reach}(v,u) \text{ a } u \text{ byl objeven během volani } \texttt{DFS}(v)\}$$

```
Function Main(G)
    foreach v ∈ V do
        v.time = −1
    gTime := 0
    foreach v ∈ V do
        if v.time = −1 then
            gTime := gTime + 1
            v.time := gTime
            v.low := gTime
            stack.push(v)
            DFS(v)
    return SCCs
```

```
Function DFS(v ∈ V)
    foreach u ∈ Adj(v) do
        if u.time = −1 then
            gTime := gTime + 1
            u.time := u.low := gTime
            stack.push(u)
            DFS(u)
            v.low := min{v.low, u.low}
        else if u ∈ stack then
            v.low = min{v.low, u.time}
    if v.time = v.low then pop the stack
     down to v to create new SCC
```

- Složitost: $O(|V| + |E|)$

Příslušnost do bezkontextového jazyka

- Uvažme bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF a slovo w.
- Platí, že $w \in L(G)$?
- Připomeňme, že pokud $w \in L(G)$ pak $S \Rightarrow_G^p w \wedge p = 2|w| - 1$ (délka odvození je daná)

Příslušnost do bezkontextového jazyka

- Uvažme bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF a slovo w.
- Platí, že $w \in L(G)$?
- Připomeňme, že pokud $w \in L(G)$ pak $S \Rightarrow_G^p w \wedge p = 2|w| - 1$ (délka odvození je daná)

Příslušnost do bezkontextového jazyka

- Uvažme bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF a slovo w.
- Platí, že $w \in L(G)$?
- Připomeňme, že pokud $w \in L(G)$ pak $S \Rightarrow_G^p w \wedge p = 2|w| - 1$ (délka odvození je daná)

```
foreach derivation tree T in G of the depth p do
    if leafs of T form w then
        return true
return false
```

Příslušnost do bezkontextového jazyka

- Uvažme bezkontextovou gramatiku $G = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF a slovo w.
- Platí, že $w \in L(G)$?
- Připomeňme, že pokud $w \in L(G)$ pak $S \Rightarrow_G^p w \wedge p = 2|w| - 1$ (délka odvození je daná)

```
foreach derivation tree T in G of the depth p do
    if leafs of T form w then
        return true
return false
```

- Složitost: $2^{O(|w|)}$ algoritmus projde všechny odvození s délkou $O(|w|)$
  - připomeňme

$$2^{O(f(n))} = \{g(n) \in \mathcal{F} \mid \exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow g(n) \leq 2^{c.f(n)}\}$$

  - pro jednoduchost zanedbáváme $|P|$

Příslušnost do bezkontextového jazyka

❖ Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus (dynamické programování)

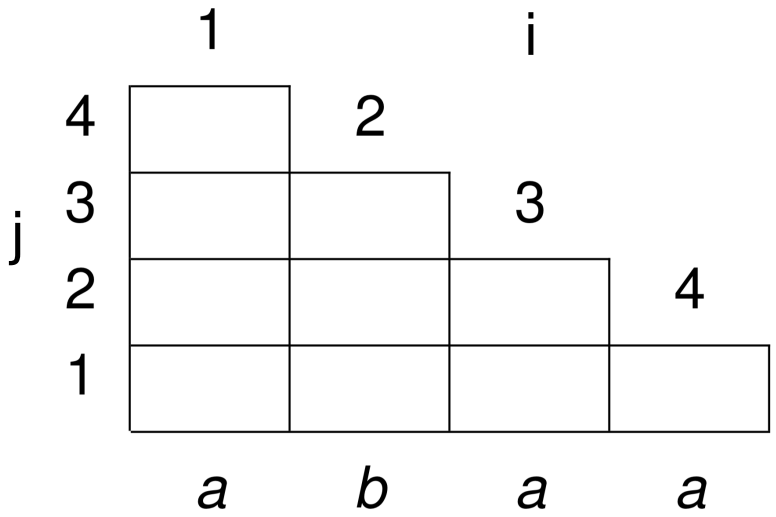
❖ Hlavní myšlenka: pro každé neprázdné podslovo u slova w (začíná na indexu i a má délku j) spočítáme množinu všech neterminálů z kterých lze u odvodit

$$T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* w_i w_{i+1} \dots w_{i+j-1}\}$$

❖ Příklad

$S \to AB \mid SS \mid a$
$A \to AA \mid BC \mid a$
$B \to AB \mid b$
$C \to SA \mid b$

$w = abaa$



Příslušnost do bezkontextového jazyka

❖ Cocke-Younger-Kasami (CYK) algoritmus (dynamické programování)

❖ Hlavní myšlenka: pro každé neprázdné podslovo u slova w (začíná na indexu i a má délku j) spočítáme množinu všech neterminálů z kterých lze u odvodit

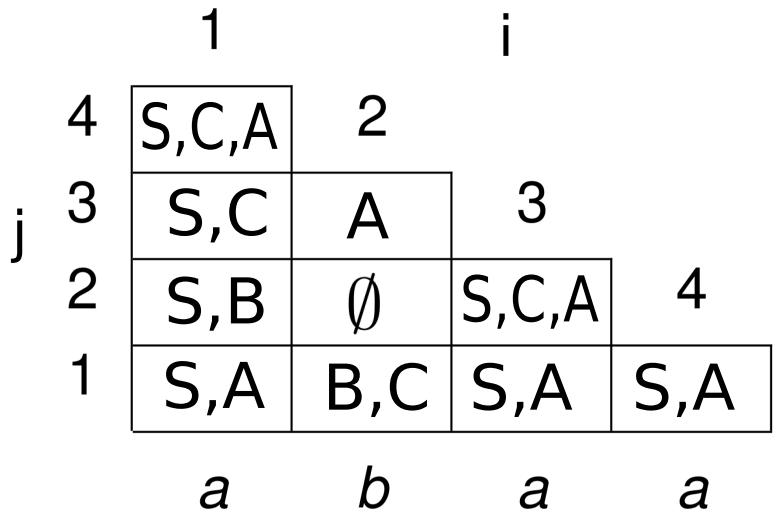
$$T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow_G^* w_i w_{i+1} \dots w_{i+j-1}\}$$

❖ Příklad

$S \to AB \mid SS \mid a$
$A \to AA \mid BC \mid a$
$B \to AB \mid b$
$C \to SA \mid b$

$w = abaa$

❖ $w \in L(G)$ jelikož $S \in T_{1,4}$



Cocke-Younger-Kasami algoritmus

Vstup: gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF, slovo $w = w_1 \dots w_n \neq \varepsilon$
Výstup: množiny $T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow^* w_i \dots w_{i+j-1}\}$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
    $T_{i,1} \leftarrow \emptyset$
    for každé pravidlo tvaru $(A \to a) \in P$ **do**
        if $a = w_i$ **then** $T_{i,1} \leftarrow T_{i,1} \cup \{A\}$
    od
od
for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
    for $i \leftarrow 1$ **to** $n - j + 1$ **do**
        $T_{i,j} \leftarrow \emptyset$
        for $k \leftarrow 1$ **to** $j - 1$ **do**
            for každé pravidlo tvaru $(A \to BC) \in P$ **do**
                if $B \in T_{i,k} \ \wedge \ C \in T_{i+k,j-k}$ **then** $T_{i,j} \leftarrow T_{i,j} \cup \{A\}$
            od
        od
    od
od

Cocke-Younger-Kasami algoritmus

Vstup: gramatika $\mathcal{G} = (N, \Sigma, P, S)$ v CNF, slovo $w = w_1 \dots w_n \neq \varepsilon$
Výstup: množiny $T_{i,j} = \{X \in N \mid X \Rightarrow^* w_i \dots w_{i+j-1}\}$

for $i \leftarrow 1$ **to** n **do**
  $T_{i,1} \leftarrow \emptyset$
  for každé pravidlo tvaru $(A \to a) \in P$ **do**
    if $a = w_i$ **then** $T_{i,1} \leftarrow T_{i,1} \cup \{A\}$
  od
od
for $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
  for $i \leftarrow 1$ **to** $n - j + 1$ **do**
    $T_{i,j} \leftarrow \emptyset$
    for $k \leftarrow 1$ **to** $j - 1$ **do**
      for každé pravidlo tvaru $(A \to BC) \in P$ **do**
        if $B \in T_{i,k} \ \wedge \ C \in T_{i+k,j-k}$ **then** $T_{i,j} \leftarrow T_{i,j} \cup \{A\}$
      od
    od
  od
od

- Složitost: $O(|w|^3)$
  - opět zanedbáváme $|P|$ – jinak $O(|w|^3 \cdot |P|)$

Univerzalita NKA

- Pro daný nedeterministický konečný automat $A = \{Q, \Sigma, \delta, s_0, F\}$ rozhodni zda

$$L(A) \neq \Sigma^*.$$

- Naivní algoritmus

Construct deterministic finite automaton A' such that $L(A) = L(A')$;
if *exists in* A' *a path from* $\{s_0\}$ *to* S *where* $F \cap S = \emptyset$ **then**
  return $true$
else
  return $false$

Univerzalita NKA

- Pro daný nedeterministický konečný automat $A = \{Q, \Sigma, \delta, s_0, F\}$ rozhodni zda

$$L(A) \neq \Sigma^*.$$

- Naivní algoritmus

```
Construct deterministic finite automataon A' such that L(A) = L(A');
if exists in A' a path from {s_0} to S where F ∩ S = ∅ then
  | return true
else
  | return false
```

- Prostorová složitost: $2^{O(|Q|)}$
  - deterministický automat může mít až exponenciální počet stavů
  - dále si musíme uložit přechodovou relaci
- Časová složitost: $2^{O(|Q|)}$
  - hledání neakceptující cesty v exponenciálně velkém automatu

Univerzalita NKA

- Pro daný NKA $A = \{Q, \Sigma, \delta, s_0, F\}$ rozhodni zda $L(A) \neq \Sigma^*$.

- Algoritmus pracující v nedeterministickém polynomiálním prostoru
  - on-the-fly determinizace
  - uhodnutí neakceptující cesty

$counter := 0;$
$makroState := \{s_0\};$
while $counter \leq 2^{|Q|}$ **do**
  if $makroState \cap F = \emptyset$ **then**
    return $true$
  $a :=$ `nondeterministically choose from` $\Sigma;$
  $makroState := \bigcup_{q \in makroState} \delta(q, a);$
  $counter := counter + 1;$
return $false$

Univerzalita NKA

- Pro daný NKA $A = \{Q, \Sigma, \delta, s_0, F\}$ rozhodni zda $L(A) \neq \Sigma^*$.

- Algoritmus pracující v nedeterministickém polynomiálním prostoru
  - on-the-fly determinizace
  - uhodnutí neakceptující cesty

$counter := 0;$
$makroState := \{s_0\};$
while $counter \leq 2^{|Q|}$ **do**
  if $makroState \cap F = \emptyset$ **then**
    return $true$
  $a :=$ `nondeterministically choose from` $\Sigma;$
  $makroState := \bigcup_{q \in makroState} \delta(q, a);$
  $counter := counter + 1;$
return $false$

- Prostorová složitost: $O(|Q|) \subseteq$ **NPSPACE** = **PSPACE**
  - pamatujeme si jen 2 makrostavy (každý max $|Q|$) a $counter$ ($log(2^{|Q|}) \in O(|Q|)$)

Univerzalita NKA

- Pro daný NKA $A = \{Q, \Sigma, \delta, s_0, F\}$ rozhodni zda $L(A) \neq \Sigma^*$.

- Algoritmus pracující v nedeterministickém polynomiálním prostoru
  - on-the-fly determinizace
  - uhodnutí neakceptující cesty

$counter := 0;$
$makroState := \{s_0\};$
while $counter \leq 2^{|Q|}$ **do**
  if $makroState \cap F = \emptyset$ **then**
    return $true$
  $a :=$ `nondeterministically choose from` $\Sigma;$
  $makroState := \bigcup_{q \in makroState} \delta(q, a);$
  $counter := counter + 1;$
return $false$

- Časová složitost stále v $2^{O(|Q|)}$
  - pozor není v **NP**, jelikož délka cesty může být exponenciální k $|Q|$ – její ověření není v **P**

Příklady složitosti problémů

❖ Příklady $\mathbf{LOGSPACE}$ problémů:

- existence cesty mezi dvěma uzly v neorientovaném grafu.

❖ Příklady $\mathbf{NLOGSPACE}$-úplných problémů:

- existence cesty mezi dvěma uzly v orientovaném grafu,
- 2-SAT (*SATisfiability*), tj. splnitelnost výrokových formulí tvaru konjunkce disjunkcí dvou literálů (literál je výroková proměnná nebo její negace), např. $(x_1 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_3)$.

❖ Příklady $\mathbf{P}$-úplných problémů:

- splnitelnost konjunkce Hornových klauzulí $(p \wedge q \wedge ... \wedge t) \Rightarrow u$, kde p, q, ... jsou atomické formule výrokové logiky (výrokové proměnné),
  - nerozhodnutelné v predikátové podobě
- náležitost řetězce do jazyka bezkontextové gramatiky: algoritmus „CYK“ založený na dynamickém programování (Cocke, Younger, Kasami) – $O(n^3)$,
- topologické uspořádání – pořadí uzlů při průchodu grafem do hloubky (pro dané řazení přímých následníků).

❖ Příklady $\mathbf{NP}$-úplných problémů:

- splnitelnost Booleovských formulí (SAT, 3SAT)
- řada grafových a množinových problémů (viz výše)
- problém obchodního cestujícího,
- „knapsack“ – máme položky s váhou a hodnotou, maximalizujeme hodnotu tak, aby váha nepřekročila určitou mez.

❖ Příklady co-$\mathbf{NP}$-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů bez iterace.

❖ Příklady $\mathbf{PSPACE}$-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů,
- náležitost řetězce do jazyka kontextové gramatiky,
- inkluze jazyků nedeterministických konečných automatů,
- model checking formulí lineární temporální logiky (LTL – výroková logika doplněná o temporální operátory *until*, *always*, *eventually*, *next-time*) vůči velikosti formule.

❖ Příklady $\mathbf{EXP}$-úplných problémů:

- inkluze jazyka bezkontextové gramatiky v jazyce NKA (opačná $\subseteq$ nerozh.),
- inkluze nedeterministických konečných *stromových automatů*, zobecňujících přechody KA do podoby $p \xrightarrow{a} (q_1, \ldots, q_n)$,
- inkluze pro tzv. *visibly push-down* jazyky (operace push/pop, které provádí přijímající automat, jsou součástí vstupního řetězce),
- nejlepší tah v šachu (zobecněno na šachovnici $n \times n$),
- model checking procesů s neomezeným zásobníkem (rekurzí) vůči zafixované formuli logiky větvícího se času (CTL) – tj. EXP ve velikosti procesu.

❖ Příklady $\mathbf{EXPSPACE}$-úplných problémů:

- ekvivalence regulárních výrazů doplněných o operaci kvadrát (tj. r^2).

❖ **k-EXP / k-EXPSPACE**:

- rozhodování splnitelnosti formulí Presburgerovy aritmetiky – tj. celočíselné aritmetiky se sčítáním, porovnáváním (ne násobením – to vede na tzv. Peanovu aritmetiku, která je již nerozhodnutelná) a kvantifikací prvního řádu (např. $\forall x, y : x \leq x + y$) je problém, který je v **3-EXP** (**2-EXPSPACE**-úplný).

❖ Problémy mimo **ELEMENTARY**:

- ekvivalence regulárních výrazů doplněných o negaci,
- rozhodování splnitelnosti formulí logiky WS1S – celočíselná aritmetika s operací $+1$ a kvantifikací prvního a druhého řádu (tj. pro každou/existuje hodnota, resp. množina hodnot, taková, že ... – např. $\exists A : \forall x \in A : x + 1 \notin A$),
- verifikace dosažitelnosti v tzv. *Lossy Channel Systems* – procesy komunikující přes neomezenou, ale ztrátovou frontu (cokoliv se může kdykoliv ztratit).

Prvočíselný rozklad

- Problém rozkladu daného celého čísla na součin prvočísel.
- Velmi důležitý problém pro kryptografii.
- Ví se, že je v **NP** ∩ **co-NP**.
- Neví se, zda je v **P**, ani zda je **NP**-úplný.
- Existuje polynomiální algoritmus pro test je dané číslo prvočíslo.
- Existuje polynomiální algoritmus pro kvantové počítače, který počítá rozklad.