

$$f_X. \quad T(X+1=0)$$

$$f_{X,Y,Z}. \quad ((X+1=Z) \wedge (Y+1=Z)) \rightarrow X=Y$$

de respuns
apla' noia' veni'

Jediny noia' model

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{+1} & 0 & \xrightarrow{+1} & 0 & \xrightarrow{+1} & 0 & \xrightarrow{+1} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \{ & \dots & \end{array}$$

$5n \quad 75n \quad 5n \quad 75n \quad 5n$

T je apla' pokud pro $4q$: $\underline{I+q}$ v $\underline{I+7q}$

Triviale plat' pro spornu teorii $\Rightarrow$ spad teorie je uia' apla'.

T je rozhodnutelný, pokud $L = \{\varphi \mid T \models \varphi\}$ je rozhodnutelný.

(2)

Douhá věta modelu je kompletní $\Rightarrow$ rozhodnutelný

- jiné stavem enumerovat všechny možné modely a u každého uvidět φ

T je úplný a efektivní $\Rightarrow$ Rozhodnutelný

T je efektivní $\Leftrightarrow$ existuje axiomatizace $\{A \mid A \text{ je axiom } T\}$ je rozhodnutelný

NTS u každé kandidátní dvojice - skenování formulí $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, [\varphi, \neg\varphi]$

- o každé rozhodnutí - jestli je axiom (12c kvůli efektivitě)
- nebo výsledky aplikace odvozovacího pravidla

úplný - postupem enumerací kandidátních dvojic najít každou dvojici
pro φ nebo $\neg\varphi$

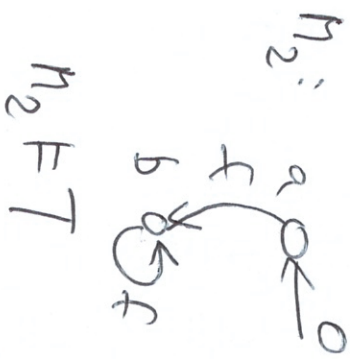
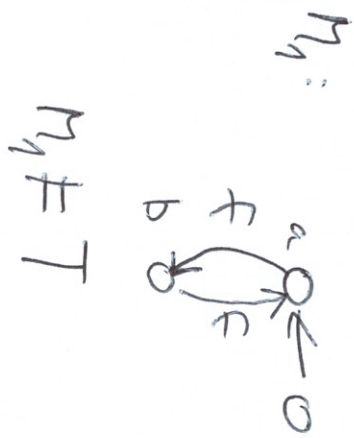
T je neúplný a efektivní $\Rightarrow$ existuje rozhodnutelný

Rozhodatel'ná' neupl'ná' teoríe

(3)

$$T = \{ \underline{f(0) \neq 0}, \exists g \forall x \ x=0 \vee x=g \}$$

→ Doučká' knu' m'ít' mínimál'ní 2 prvky
 — Doučká' knu' maximál'ní 2 prvky



M_1 model $\Rightarrow$ bezsporná'
 $M_1 \sim M_2$ jsou rozlišitelná'
 $\Rightarrow$ není upl'ná'

$\varphi: \forall x(f(x) \neq 0)$

$M_1 \models \varphi \wedge M_2 \not\models \varphi$

Je rozhodatel'ná' protož' máme
 — konec' počet modelů
 — všed' modely mají' konečnou derivaci

④

$\text{Kripke model } \mathcal{M}_1: \mathcal{K}x \left(x \neq 0 \vee \exists y. f(y) = x \right)$
 $\mathcal{M}_1: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{K}x & \text{false} \vee \exists y \begin{cases} y=a \\ y=b \end{cases} \\ \hline & \mathcal{K}x & \text{true} \vee \dots \end{array}$
 $\mathcal{M}_1 \models \varphi$

$\mathcal{M}_2: \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \mathcal{K}x & \text{false} \vee \exists y \begin{cases} y=a \\ y=b \end{cases} \\ \hline & \mathcal{K}x & \text{false} \vee \text{false} \end{array}$
 $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$

$\mathcal{M}_1 \models \varphi$
 $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$

Redukce na triviální

(5)

Dokážte, že trojic přirozených čísel s "1" a "x²" je nerozhodnutelná.
Redukce z T_{PA} ($M_1 + 1$)

Ukážeme, že φ v PA mohou připsat na φ' v aritmetice s "1" a "x²"
tak, že

$$\cancel{PA} \models \varphi \Leftrightarrow T_{+2} \models \varphi'$$

$$\begin{aligned} \text{Víme, že} \quad (a+b)^2 &= a^2 + 2 \cdot (a \cdot b) + b^2 \\ 2 \cdot (a \cdot b) &= (a+b)^2 - a^2 - b^2 \end{aligned}$$

Ve formě φ v PA totiž aritmetice nahradíme $t * t'$ za x

$$\varphi' \equiv \varphi[t * t' / x] \wedge \exists y (y = x + x) \wedge y = (t + t')^2 - t^2 - t'^2$$

Redukce je vyčíslitelná

Když T_{+2} byla rozhodnutelná $\Rightarrow T_{PA}$ by byla rozhodnutelná

SPRÁVNĚ s Gödelova věta o neúplnosti PA

Glavna teorija i koncepti i se signature

$$T = \{ KX \mid (x = \text{serv} \vee x = \text{Tom}) \} \quad (1)$$

$$\neg (\text{serv} = \text{Tom}) \quad (2)$$

$$KXK_y (\text{chases}(K_y) \Leftrightarrow (x = \text{Tom} \wedge y = \text{serv})) \quad (3)$$

Je bezopasna i upliva, voshodutelnost?

$$\begin{aligned} ax1. & \quad |D| \text{ maksimalno } 2 \\ ax2. & \quad |D| \geq 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow |D| = 2$$

ax3. chases i interpretacija jedinica nozija zbrojena

$$\eta: D = \{a, b\} \quad \alpha_{\text{serv}} = a \quad \alpha_{\text{Tom}} = b \quad \alpha_{\text{chases}} = \{(b, a)\}$$

- T i bezopasna i upliva model
 - T i upliva i maksimalna model
 - T i efektivna i prototip i koncept model
- } $\Rightarrow$ T i voshodutelnost

Poshodite a dokazite zdu mit existovat veduce z T_{PA} n. T ? 7

Nexistuji postoj T j rozhodnutim, jathero T_{PA} nem.
Existence veduce $T_{PA} \leq T$ spor s bodlovou vitou o neuplatnosti PA

Modifikujme teorii T tak, ic ax 3 bude mistejici :

$$KxTh (chues(x_1g) \rightarrow (x = T_{ou} \wedge y = y_{eng}))$$

Puvodni model s $\Delta_{CHUES} = \{(b, a)\}$ $\Delta_{T_{ou}} = b$ $\Delta_{y_{eng}} = a$
j stle modelen T $\Rightarrow T$ j stle bezupov.

Puvni model

$$\Delta_{CHUES} = \emptyset$$

$$\Delta_{T_{ou}} = b \quad \Delta_{y_{eng}} = a$$

Poslize formul' $\varphi \equiv \exists x \exists y. chues(x_1g)$

$\Rightarrow T$ j neupln.

Poshodnutim j postoj vich modely jrou koncni.

$$M_{n+1} T'' = T \setminus \{ \tau(\text{Jury} = \text{Tom}) \}$$

(8)

- Päraku' model T & models T''
- 'nou' model n_2 : $D_{n_2} = \{a\}$

$$d_{\text{Jury}} = a$$

$$d_{\text{Tom}} = a$$

$$d_{\text{CHASES}} = \{ (a, a) \}$$

Non tetric $(N, t, \cdot)$ $(R, t, \cdot)$ equivalent? 9

$$\varphi: X \times Y: x=y \vee \exists z. [(x < z \wedge z < y) \vee (y < z \wedge z < x)]$$

Uvazujte tetric Realych cisel s operacemi $+$ a $\ln$.
 Dokazte, ze T_R není rozhodnutelná. Pouze vzhledem k T_R

$$\forall n, \exists \varepsilon \quad \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$\forall f$ formální φ nahradíme $t * t'$ za novou proměnnou x

$$\varphi' \equiv \varphi [t * t' / x] \wedge \exists y. \quad y = \ln x \quad \wedge \quad y = \ln(t) + \ln(t')$$