T je úplná a efektivní $\Rightarrow$ Rozhodnutelná ($= \exists$ TS t. ž. rozhoduje platnost každé formule φ v teorii T)

T je efektivní $\Leftrightarrow$ jazyk axiomů $\{A \mid A \text{ je axiom } T\}$ je rozhodnutelný

TS generuje schéma formulí $\varphi_1, \varphi_2, \dots \underline{\varphi_n}$ v lex. uspořádání a o každé rozhodneme, jestli je to důkaz φ ze vstupu

- efektivní $\longrightarrow$ můžeme ověřit, že φ_i je axiom
- odvozovací pravidla lze ověřit jednoduše
- úplná $\longrightarrow$ buď najdeme důkaz φ nebo $\neg\varphi$

T neúplná a efektivní $\Rightarrow$ Částečně rozhodnutelná

pro φ: $T \nvdash \varphi \wedge T \nvdash \neg\varphi$ potom algoritmus nezastaví

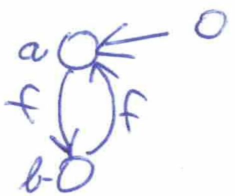
Rozhodnutelná neúplná teorie

$T = \{ f(0) \neq 0,\ \exists y \forall x\ x=0 \vee x=y \}$

- doména musí mít 2 prvky $0, f(0)$
- doména má max 2 prvky

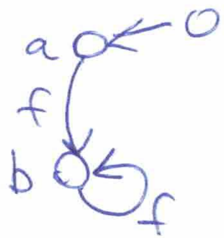
$\Rightarrow$ doména má 2 prvky

M_1:



$M_1 \models T$

M_2:



$M_2 \models T$

má model $\Rightarrow$ bezesporná

M_1 a M_2 rozlišíme φ: $\forall x (f(x) \neq 0)$ $\quad M_1 \not\models \varphi \quad M_2 \models \varphi$

$\Rightarrow$ není úplná

Je rozhodnutelná protože máme
- konečný počet modelů
- všechny modely mají konečnou doménu

Např. pro $\varphi: \underline{\forall x}\ x \neq 0 \vee \exists y\,(f(y) = x)$

M_1: $\underline{x = a}$ false $\underline{\vee}$ $\left\langle \begin{array}{ll} y = a & \text{false } \times \\ y = b & \text{true} \end{array} \right] \checkmark$

$x = b$ true $\vee$ … $\checkmark$

$\checkmark$ $M_1 \models \varphi$

M_2: $\underline{x = a}$ false $\vee$ $\left\langle \begin{array}{ll} y = a & \text{false } \times \\ y = b & \text{false} \end{array} \right] \times$

$x = b$

$M_2 \not\models \varphi$

$T \not\models \varphi$

Eliminace kvantifikátorů

vstup: $\exists x\, \varphi$

výstup: ψ (nemluví o x)

- Prvky z domény identifikujeme termy $a \equiv \underline{0}$ $b \equiv \underline{f(0)}$

můžeme eliminovat kvantifikátor $\exists x\, \varphi \Leftrightarrow \varphi[x/0] \vee \varphi[x/f(0)]$

Dokažte, že teorie přirozených čísel s „+" a „x^2" je nerozhodnutelná.
Redukcí z T_{PA} $(\mathbb{N}, +, *)$

– ukážu, že φ v PA mohu přepsat na φ' v aritmetice s „x^2" tak, že

$$\varphi \models T_{PA} \iff \varphi' \models T_{x^2}$$

– Víme, že $(a+b)^2 = a^2 + 2(a*b) + b^2$

$$\underline{2}(a*b) = (a+b)^2 - a^2 - b^2$$

Ve formuli φ v peanově aritmetice nahradíme $t*t'$ za x

$$\varphi' \equiv \varphi[t*t'/\underline{x}] \wedge \exists y (y = 2x) \wedge y = (t+t')^2 - t^2 - t'^2$$

Redukce je vyčíslitelná.

Kdyby T_{x^2} byla rozhodnutelná $\Rightarrow$ T_{PA} by byla taky rozhodnutelná

SPOR s Gödelovou větou o neúplnosti T_{PA}

Mějme teorii se signaturou $(\{Tom/0, Jerry/0\}, \{=/2, chases/2\})$, kde $=$ je standardní rovnost.

$$T = \{ \forall x\,(x = Jerry \lor x = Tom) \quad (1)$$
$$\neg(Jerry = Tom) \quad (2)$$
$$\forall x \forall y\,(chases(x,y) \Leftrightarrow (x = Tom \land y = Jerry)) \quad (3) \}$$

Je bezesporná, úplná, rozhodnutelná?

ax 1: $|D| \in \langle 1,2 \rangle$

ax 2: doména je alespoň dvouprvková

$\Rightarrow$ doména je dvouprvková

ax 3: chases je interpretováno jediným možným způsobem

$D = \{a,b\} \qquad \alpha_{Jerry} = a \qquad \alpha_{Tom} = b$

$\alpha_{chases} = \{(b,a)\}$

- T je bezesporná protože má model
- T je úplná protože má max. 1 model
- T je efektivní protože (T je konečná)

$\Rightarrow$ T je rozhodnutelná

Rozhodněte a zdůvodněte, zda může být T_{PA} redukovatelná na T?

Neexistuje, protože T je rozhodnutelná a z redukce $T_{PA} \leq T$ by plynula rozhodnutelnost T_{PA} — spor s větou o neúplnosti.

Modifikujme teorii T tak, že ax 3 bude následující:

$$\forall x \forall y \, (chases(x,y) \rightarrow (x = Tom \land y = Jerry))$$

- původní model s $\mathcal{A}_{chases} = \{(b,a)\}$ $\mathcal{A}_{Tom} = b$ $\mathcal{A}_{Jerry} = a$ je stále modelem T' $\Rightarrow$ T' je stále bezesporná
- druhý model: $\mathcal{A}'_{chases} = \emptyset$ rozlišitelná $\varphi : \exists x, \exists y (chases(x,y))$
  - existují 2 rozlišitelné modely $\Rightarrow$ T' není úplná
- Rozhodnutelná, protože počet modelů je konstantní a velikosti domény shora omezeny konstantou.

Uvažujme $T'' = T \setminus \{\neg(Jerry = Tom)\}$

- původní model T je modelem T''
- nový model M_2

$$D_{M_2} = \{a\}$$

$$\alpha_{Jerry}^{M_2} = \alpha_{Tom}^{M_2} = a$$

$$\alpha_{Chases}^{M_2} = \{(a,a)\}$$