LOGIKA VÝROKOVÁ:

- BOOL
- VÝROKOVÉ PROMĚNNÉ
- DALŠÍ FORMULE: $\vee, \wedge, \neg, \text{XOR}, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l}\text{BOOL}\\ \text{VÝROKOVÉ PROMĚNNÉ}\end{array}\right\} = \text{ATOM. FORMULE}$

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	1	1	1

$$(p \Rightarrow q) \equiv \neg p \vee q$$

PRED. LOGIKA

proměnné: x, y, z z **universa** (= datový typ)

term: proměnná $\underline{x}$

aplikace funkce $f(x)$, $g(x,y)$, $\cancel{y \leq z}$ $\underline{y+z}$

atom. formule: $\underline{P}(x,y)$, $x \leq y$, $\underline{x+z} \geq \underline{a+b}$

form: atom. formule, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, …, $\forall$, $\exists$

MNOŽINY: dobře (jednoznačně) definovaná kolekce různých prvků

- operace: $\cup$, $\cap$, $\setminus$, …
- predikáty: $\in$, $\subseteq$
- zápis: $\underline{\{}$ $\underline{\}}$

NE: $($ $)$ $<$ $>$

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 10 \geq 100\}$$

obecnější pojem: třída

— neexistuje množina všech množin

KARTÉZSKÝ SOUČIN MNOŽIN

— pro $n \geq 1$ a množiny $A_1, \dots, A_n$ definujeme kartézský součin

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n \}$$

— pro $n = 0$

$$\prod_{\emptyset} = \{ () \}$$

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$

$\mathit{string} \times \mathbb{N} \times \mathit{string}$ $\qquad$ $\mathit{string} = \{a, \dots, z\}^*$

Relace na množinách

- n-ární relace ρ na množinách $A_1, \dots, A_n$ je podmnožina $A_1 \times \dots \times A_n$

$$\rho \subseteq A_1 \times \dots \times A_n$$

$$\bar{\rho} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$$

$$\bar{\rho} = \{(a,b,c) \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}, \frac{a}{b} \leq c\}$$

Binární relace na množině A

$$\rho \subseteq A \times A$$

např. $\leq$

lze reprezentovat $A = \{a,b,c\}$

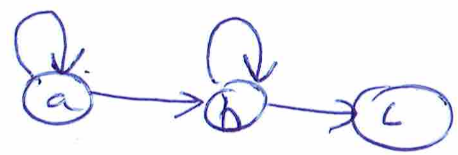
MNOŽINOVĚ:

$$\rho = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c)\}$$

MATICÍ

	a	b	c
a	1	1	0
b	0	1	1
c	0	0	0

GRAFOVĚ



VLASTNOSTI BIN. RELACÍ

a) ρ je souvislá: $\forall x, y \in A: x \neq y \Rightarrow x \rho y \vee y \rho x$

b) ρ je reflexivní: $\forall x \in A: x \rho x$

c) ρ je irreflexivní: $\forall x \in A: x \not\rho x$

d) ρ je symetrická: $\forall x, y \in A: x \rho y \Rightarrow y \rho x$

e) ρ je asymetrická: $\forall x, y \in A: x \rho y \Rightarrow y \not\rho x$

f) ρ je antisymetrická: $\forall x, y \in A: x \rho y \wedge y \rho x \Rightarrow x = y$

g) ρ je tranzitivní: $\forall x, y, z \in A: x \rho y \wedge y \rho z \Rightarrow x \rho z$

Pro ρ z příkladu

a) NE – protipříklad a, c

b) NE

c) NE

d) NE

e) NE

f) ANO

g) NE

TRANZITIVNÍ UZÁVĚR | $\rho \subseteq A \times A$

$\rho^+ \subseteq A \times A$ je tranzitivní uzávěr ρ

ρ^+: $\underline{a \rho^+ b} \overset{def}{\iff} \exists n \geq 1 \; \exists c_1, \dots, c_n \in A$:

$a = c_1 \wedge b = c_n$

$\forall 1 \leq i < n : c_i \rho c_{i+1}$

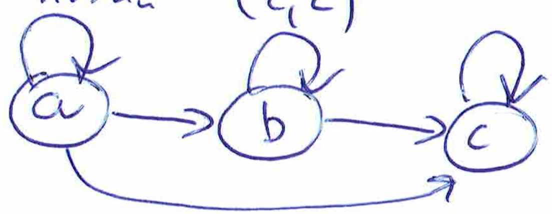
ρ z příkladu BUDE OBSAHOVAT NAVÍC HRANU (a,c)

– Warshallův algoritmus

REFLEXIVNÍ A TRANZITIVNÍ UZÁVĚR $\rho \subseteq A \times A$ je relace $\rho^* \subseteq A \times A$

$\rho^* = \rho^+ \cup ID_A$ $\qquad ID_A = \{(a,a) \mid a \in A\}$

– do příkladu doplníme hranu (a,c)

ρ^*: 

Relace ekvivalence na A

je relace ρ, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní

příklad: $\equiv_5$ (shoda zbytku po dělení 5)

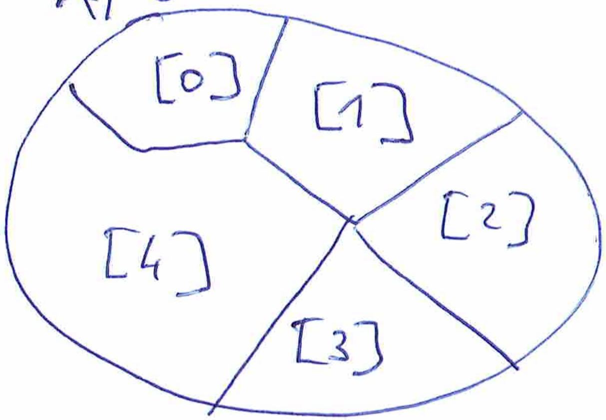
Ekvivalence definuje rozklad množiny A

$A/\equiv = \{ [\underline{a}] \mid a \in A \}$

↑ reprezentant

$[a] = \{ b \in A \mid b \equiv a \}$

$A/\equiv_5$



funkce z množiny A do B

~~funkce~~ relace $f \subseteq A \times B$ je funkce, pokud
- $\forall a \in A \ \exists b : (a,b) \in f$ [značíme $f(a)=b$]
- $\forall a \in A \ \forall b_1, b_2 : (a,b_1) \in f \wedge (a,b_2) \in f \Rightarrow \underline{b_1 = b_2}$

- injekce (jednoznačná funkce):

  $\forall a_1, a_2 \in A \wedge \forall b \in B : \quad f(a_1) = b \wedge f(a_2) = b \Rightarrow a_1 = a_2$
- surjekce (funkce na množinu):

  $\forall b \in B \ \exists a \in A : \ f(a) = b$

- bijekce : injekce $\wedge$ surjekce

KARDINALITA MNOŽINY: $|A|$

- konečné množiny je to počet prvků
- u nekonečných množin můžeme „porovnávat" navzájem

$|A| = |B| \overset{def}{\Longleftrightarrow}$ existuje funkce z A do B, která je bijekce

nekonečná $\boxed{\text{spočetná}}$ množina

- existuje bijekce do $\mathbb{N}$

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$$

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$$

Potenční množina množiny A

- značí se 2^A
- $2^A = \{ B \mid B \subseteq A \}$

$$2^{\{a,b\}} = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\} \}$$

pro konečná A platí $|2^A| = 2^{|A|}$

JAZYKY

Σ abeceda ~ konečná množina symbolů

$L \subseteq \Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$, kde $\Sigma^i = \underbrace{\Sigma \cdot \Sigma \cdot \ldots \cdot \Sigma}_{i\text{-krát}}$

$\Sigma^0 = \{\varepsilon\}$

Mějme jazyky $L_1 = \{a, b\}$ a $L_2 = \{a, \varepsilon\}$

- $L_1 \cup L_2 = \{a, b, \varepsilon\}$
- $L_1 \cap L_2 = \{a\}$
- $L_1 \setminus L_2 = \{b\}$

$L_1^* = \{\varepsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$

$L_1^+ = \{a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}$

$L_2^+ = \{a, \varepsilon, aa, aaa, \ldots\}$

GRAMATIKY

$$G = (N, \Sigma, P, S) \qquad S \in N \wedge N \cap \Sigma = \emptyset$$

$$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$$

relace přímé derivace

$$\forall \alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^* : \quad \underline{\alpha} \underset{G}{\Rightarrow} \underline{\beta} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \gamma, \delta :$$

$$\alpha = \underline{\gamma X \delta}, \; \beta = \underline{\gamma 3 \delta} \wedge (X, 3) \in P$$

$$L(G) = \{ w \in \underline{\Sigma^*} \mid S \underset{G}{\Rightarrow}^* \underline{w} \}$$

CHOMSKÉHO KLASIFIKACE

Typ 3: pravidla tvaru (pravé reg. gramatiky)

$$A \to aB \mid a \mid \varepsilon, \quad \text{kde } A \in N, B \in N, a \in \Sigma$$

Typ 2: $A \to \alpha$, kde $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ bezkontextové

Typ 1: (kontextové)

$\underline{\beta} A \gamma \to \underline{\beta} \alpha \gamma$ $A \in N$, $\beta, \gamma \in (N \cup \Sigma)^*$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^+$

nebo $\underline{S \to \varepsilon}$, za předpokladu že S není na pravé straně žádného pravidla.

Typ: 0 obecné

UVAŽUJME $G_1 = (\{S\}, \{0,1\}, P_1, S)$, kde

$$P_1 : S \rightarrow 1S1 \mid 0S0 \mid \varepsilon$$

- bezkontextová gramatika
- $L(G_1) = \{ ww^R \mid w \in \{0,1\}^* \}$
- <u>bezkontextový jazyk</u> – existuje bezkontextová gram.
  – neexistuje regulárna gramatika

$G_2 = (\{S, Z\}, \{a, b\}, P_2, S)$, kde

$$P_2 : S \rightarrow aSb \mid Z$$
$$Z \rightarrow \underline{aZ} \mid \underline{Zb} \mid \varepsilon$$

- bezkontextová
- $L(G_2) = \{a^m b^n \mid m,n \geq 0\} = \underline{\{a\}^*} \, \underline{\{b\}^*}$
  $= L(a^* b^*)$

$$S \rightarrow aSb \rightarrow \underline{a \ldots a} S \underline{b \ldots b} \rightarrow Z \rightarrow \underline{a^m} Z \underline{b^n}$$

jazyk je regulární, protože existuje $G_3 = (\{S, Z\}, \{a, b\}, P_3, S)$ 14

$$S \to aS \mid Z$$
$$Z \to bZ \mid \varepsilon$$

ZAPIŠTE GRAMATIKU TYPU 2, KTERÁ GENERUJE JAZYK

$$L = \{ w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) = \#_1(w) \}$$

počet znaků v řetězci

$$G = (\{S\}, \{0,1\}, P, S)$$

$$S \to \varepsilon \mid 0\underline{S}1\underline{S} \mid 1S0S$$

$$S \Rightarrow 0S1\underline{S} \Rightarrow 0\underline{S}11S0S \Rightarrow 011S0S \Rightarrow 011S0 \Rightarrow$$
$$0110\underline{S}1\underline{S}0 \overset{2}{\Rightarrow} \underline{011010}$$

ODPOVÍDÁ JAZYKU ZÁVOREK $1 = $ "(" $0 = $ ")"

1) Zapište konečný automat přijímající jazyk

$L = \{ b^n a c^m \mid n \geq 2, \exists k \geq 0 : m = 3k \}$

KA ~~za~~ $M = (Q, \underbrace{\{a, b, c\}}_{\Sigma}, q_0, \delta, F)$

$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$