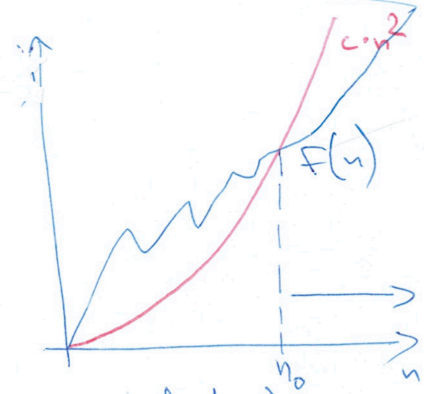
TIN cvičení složitost

① Dokažte, že $100n^3+42n^2-8 \notin O(n^2)$

Důkaz sporem:

- předpokládejme, že $\underbrace{100n^3+42n^2-8}_{f(n)} \in O(n^2)$
- z def. O notace plyne, že

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall n \geq n_0 : 100n^3+42n^2-8 \leq c \cdot n^2$$



- uvažme libovolné, dostatečně velké n_0 a c takové, že

$$\forall n \geq n_0 : 100n^3+42n^2-8 \leq c \cdot n^2 \iff$$

$$\iff \forall n \geq n_0 : \quad 1 \leq \frac{c \cdot n^2}{100n^3+42n^2-8}$$

(pro dostatečně velké n hodnota jmenovatele zajisté není 0)

- zkoumejme $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c \cdot n^2}{100n^3+42n^2-8} =$ [použijeme L'Hospitalovo pravidlo, protože čitatel i jmenovatel jdou k ∞ pro $n \to \infty$]

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot c \cdot n}{300n^2+84n} = [\text{———— " ————}]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2c}{600n+84} = 0$$

- spor, protože nemůže současně platit, že výše uvedený podíl ≥ 1 a pro $n \to \infty$ se jeho hodnota blíží 0. □

(2) Dokažte, že $O(n^2) \subset O(2^n)$: a) $O(n^2) \subseteq O(2^n)$

- uvažme libovolné $F(n) \in O(n^2)$. Ukážeme, že $F(n) \in O(2^n)$
- z toho, že $F(n) \in O(n^2)$, plyne:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists c \in \mathbb{R}^+\ \forall n \geq n_0 : F(n) \leq c \cdot n^2$$

- intuitivně: $c \cdot n^2$ roste od určitého okamžiku stejně nebo rychleji jako $F(n)$ a drží se nad $F(n)$.
- ukážeme, že 2^n roste ještě rychleji
- studujeme limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{c \cdot n^2} \overset{\text{(L'Hospital)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d\,2^n}{dn}}{\frac{d\,c \cdot n^2}{dn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2) \cdot 2^n}{2 \cdot c \cdot n} \overset{\text{(L'Hospital)}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)^2 \cdot 2^n}{2 \cdot c} = \infty$$

- tedy 2^n roste rychleji, než $c \cdot n^2$ a tedy nutně $\exists c' \in \mathbb{R}^+ \exists n_0' \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \geq n_0' : c \cdot n^2 \leq c' \cdot 2^n$ a tudíž také $F(n) \leq c' \cdot 2^n$
- tedy $F(n) \in O(2^n)$

b) $2^n \notin O(n^2)$: sporem, podobně jako př. (1), za DÚ

$\square$

ze života: dokažte, že $O\left(n^k (0{,}76n)^{nk}\right) \subset O\left(k \cdot 3^n \cdot (2n+1)^{nk}\right)$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ (pro zajímavost)

③ Sestrojte TS přijímající jazyk $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\}$ a analyzujte jeho časovou a prostorovou složitost.

počet ne-Δ znaků na pásce

Idea řešení: zkonstruujeme TS M, který přijímá L_3 takto:

1op [1) M udělá z počátečního Δ na pásce krok doprava, pokud tam je Δ, přijme

2op [2) M si zapamatuje symbol pod hlavou ve stavovém řízení a přepíše jej za Δ, udělá krok doprava, pokud tam je Δ, přijme.

(k+1)op [3) M posouvá hlavu na pásce doprava, dokud nenarazí na Δ, pak se posune doleva.

1op [4) M zkontroluje, že má pod hlavou zapamatovaný symbol (pokud ne, odmítne vstup) a přepíše jej na Δ.

(k+2)op [5) M udělá krok vlevo, pokud je tam Δ, přijme, jinak se posouvá doleva než narazí na Δ a udělá krok vpravo; pak pokračuje 2).

časová složitost: $\overset{(1)}{1} + \underbrace{\underbrace{\overset{(2)}{2} + \overset{(3)}{n} + \overset{(4)}{1} + \overset{(5)}{n}} + \underbrace{\overset{(2)}{2} + \overset{(3)}{(n-2)} + \overset{(4)}{1} + (n-2) + \dots}}_{n/2 \text{ krát}} =$

$$= 1 + (3 + 2n) + (3 + 2(n-2)) + (3 + 2(n-4)) + \dots =$$

$$= 1 + 3 \cdot \frac{n}{2} + 2(n + (n-2) + (n-4) + \dots) =$$

$$= 1 + 3 \cdot \frac{n}{2} + 2(2 + 4 + \dots + n) = 1 + 3 \cdot \frac{n}{2} + 2 \cdot \overbrace{\frac{n}{2} \cdot \frac{n+2}{2}}^{\text{součet aritm. posloupnosti}} =$$

$$= 1 + \frac{3}{2} n + \frac{n^2 + 2n}{2} = 1 + \frac{3}{2} n + n + \frac{n^2}{2} = 1 + 2\tfrac{1}{2} n + \frac{1}{2} n^2 \in O(n^2)$$

prostorová složitost: $n \in O(n)$ – celý vstup přepíše

3) b) [Dokažte, že $L_3 \in DTime[n]$]

- zkonstruujeme 2-páskový TS N, který přijímá jazyk L_3 takto:

$n+1$ [1) N přesune hlavu na 1. pásce za konec vstupu

$O(n)$ [2) N přesouvá hlavu na 1. pásce zpět doleva a současně čtené znaky přepisuje zleva doprava na 2. pásku (po dokončení bude na 1. pásce w a na 2. pásce w^R)

$n+1$ [3) N přesune hlavu na 2. pásce zpět na začátek

$O(n)$ [4) N prochází současně obě pásky a kontroluje jejich shodu. Najde-li rozdílné symboly na stejné pozici, odmítne. Jinak po projití obou pásek přijme

časová složitost: $n+1 + O(n) + n+1 + O(n) = O(n)$

prostorová složitost: $n \in O(n)$

↑ zapisuje na n buněk 2. pásky

□

4b) Uvažme orientovaný graf $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů (číslovaných přirozenými čísly od 0) a E je množina hran. Dále uvažme konečnou množinu barev K a zobrazení $c : E \to K$.

Pro libovolné $v_s, v_e \in V$ definujme predikát P: $P(v_s, v_e) = \texttt{true} \iff \exists k \in K :$ existuje cesta

$$v_0, e_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n : v_s = v_0 \wedge v_e = v_n \wedge \forall\, 0 \leq i < n : e_i = (v_i, v_{i+1}) \wedge e_i \in E \wedge c(e_i) = k.$$

Uvažme algoritmus $cPath(G, v_s, v_e)$, který má na vstupu graf G a jeho dva libovolné vrcholy v_s a v_e. $cPath(G, v_s, v_e)$ vrací $\texttt{true} \iff P(v_s, v_e) = \texttt{true}$

i) Analyzujte asymptotickou časovou složitost algoritmu $cPath(G, v_s, v_e)$ v nejhorším případě.

ii) Analyzujte asymptotickou časovou složitost algoritmu $cPath(G, v_s, v_e)$ v nejlepším případě. $O(1)$

iii) Navrhněte algoritmus $cPath^+(G, v_s, v_e)$, který řeší stejný problém a má lepší asymptotickou časovou složitost v nejhorším případě. Analyzujte tuto složitost.

```
Function cPath(G, v_s, v_e)
  for int n := 1; n < |V|; n := n + 1 do
    foreach cestu v_0, e_0, v_1, ..., v_{n-1}, e_{n-1}, v_n v G do
      if v_0 ≠ v_s ∨ v_n ≠ v_e then continue
      color := c(e_0)
      res := 1
      for int i := 1; i < n; i := i + 1 do
        if c(e_i) ≠ color then res := 0; break
      if res = 1 then return true
  return false
```

$|V|^{n+1} \cdot O(n)$

$O(n)$

$O(n)$

$$\sum_{n=1}^{|V|-1} |V|^{n+1} \cdot O(n) \leq |V| \cdot |V|^{|V|+1} \cdot O(|V|) = O\left(|V|^{|V|+3}\right)$$

pro každou barvu

DFS/BFS... $O(|E|)$

(60 bodů)

Poznámka 1: Předpokládejte uniformní cenové kritérium, kde složitost každého řádku programu je 1.

Poznámka 2: Časovou složitost analyzujte vzhledem k velikosti množin V a E.

Poznámka 3: V bodě iii) můžete předpokládat, že G je efektivně representován pomocí seznamu následníků Adj, kde $Adj(v, c)$ vrací v konstantním čase množinu hran s barvou c, které vycházejí z vrcholu v.