3. cvičení: Bezkontextové jazyky a rozhodnutelnost

Tomáš Kocourek

Brno University of Technology, Faculty of Information Technology
Božetěchova 1/2. 612 66 Brno - Královo Pole
xkocou10@fit.vutbr.cz

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY FACULTY OF INFORMATION TECHNOLOGY

October 25, 2024

Příklad 1

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^R v^R \mid u \in \{a, b\}^* \wedge v \in \{c, d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^R vu^R \mid u \in \{a, b\}^* \wedge v \in \{c, d\}^*\}$$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^Rv^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^Rvu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

- L_1 není bezkontextový, to dokážeme pomocí Pumping lemmatu

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^R v^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^R vu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

- L_1 není bezkontextový, to dokážeme pomocí Pumping lemmatu
- Uvažujme o libovolném $k > 0$ a pro každé takové k vyberme slovo $z = (a^k b^k)(c^k d^k)(b^k a^k)(d^k c^k)$

Příklad 1

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^R v^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^R vu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

- L_1 není bezkontextový, to dokážeme pomocí Pumping lemmatu
- Uvažujme o libovolném $k > 0$ a pro každé takové k vyberme slovo $z = (a^k b^k)(c^k d^k)(b^k a^k)(d^k c^k)$
- Pro každé takové slovo z uvažujme o všech rozděleních $z = uvwxy$, kde $|vx| > 0$ a $|vwx| \leq k$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^Rv^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^Rvu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

- L_1 není bezkontextový, to dokážeme pomocí Pumping lemmatu
- Uvažujme o libovolném $k > 0$ a pro každé takové k vyberme slovo $z = (a^kb^k)(c^kd^k)(b^ka^k)(d^kc^k)$
- Pro každé takové slovo z uvažujme o všech rozděleních $z = uvwxy$, kde $|vx| > 0$ a $|vwx| \leq k$
- Všechna taková rozdělení zařadíme do dvou tříd:

Příklad 1

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^Rv^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^Rvu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

- L_1 není bezkontextový, to dokážeme pomocí Pumping lemmatu
- Uvažujme o libovolném $k > 0$ a pro každé takové k vyberme slovo $z = (a^k b^k)(c^k d^k)(b^k a^k)(d^k c^k)$
- Pro každé takové slovo z uvažujme o všech rozděleních $z = uvwxy$, kde $|vx| > 0$ a $|vwx| \leq k$
- Všechna taková rozdělení zařadíme do dvou tříd:
  1. část vwx obsahuje jediný typ symbolu
  2. část vwx obsahuje dva typy symbolů

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^Rv^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^Rvu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

6. část vwx obsahuje jediný typ symbolu

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^R v^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^R vu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

6. část *vwx* obsahuje jediný typ symbolu
   - potom volbou $i = 0$ narušíme počty tohoto symbolu s dalším párujícím výskytem tohoto symbolu ve slově

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^Rv^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^Rvu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

6. část vwx obsahuje jediný typ symbolu
   - potom volbou $i = 0$ narušíme počty tohoto symbolu s dalším párujícím výskytem tohoto symbolu ve slově
7. část vwx obsahuje dva typy symbolů

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte a dokažte, zda jsou tyto jazyky bezkontextové:

$$L_1 = \{uvu^Rv^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$
$$L_2 = \{uv^Rvu^R \mid u \in \{a,b\}^* \wedge v \in \{c,d\}^*\}$$

Řešení

6. část vwx obsahuje jediný typ symbolu
   - potom volbou $i = 0$ narušíme počty tohoto symbolu s dalším párujícím výskytem tohoto symbolu ve slově
7. část vwx obsahuje dva typy symbolů
   - potom volbou $i = 0$ narušíme počty těchto symbolu s dalšími párujícími výskyty tohoto symbolu ve slově

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3(c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3(b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3(c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3(b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u = \epsilon$
- $v = a$
- $w = \epsilon$
- $x = \epsilon$
- $y = a^2 a^k a^k$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3(c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3(b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u = a^3 c^k a^k$
- $v = b$
- $w = b$
- $x = b$
- $y = b^{k-3} c^k a^k b^k$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u = a^3$
- $v = b$
- $w = \epsilon$
- $x = \epsilon$
- $y = b^{k-1} c^k b^k c^k$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \land m, n \geq 0 \land w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

Nepatří do jazyka L

Příklad 2

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \land m, n \geq 0 \land w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

Není závislé na k

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \land m, n \geq 0 \land w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$L = \{a^k wb^m wb^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u = \epsilon$
- $v = a$
- $w = \epsilon$
- $x = \epsilon$
- $y = a^2 c^k a^k c^k a^k$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \land m, n \geq 0 \land w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

Vhodný výběr slova

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \wedge m, n \geq 0 \wedge w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

- $u =$
- $v =$
- $w =$
- $x =$
- $y =$

Pumping lemma pro bezkontextové jazyky

Rozhodněte o vhodnosti slov pro důkaz nebezkontextovosti jazyka L pomocí Pumping lemmatu pro $\mathcal{L}_2$, kde

$$L = \{a^k w b^m w b^n \mid k > 2 \land m, n \geq 0 \land w \in \{a, b, c\}^*\} \cup \{a^3\}\{b, c\}^*$$

Slova na výběr

1. $z = a^3 a^k a^k$
2. $z = a^3 (c^k a^k b^k)(c^k a^k b^k)$
3. $z = a^3 (b^k c^k)(b^k c^k)$
4. $z = a^3 c^k b^k a^k$
5. $z = a^3 caca$
6. $z = a^{k+2} c^k a^k c^k a^k$
7. $z = a^3 c^k a^k c^k a^k$
8. $z = a^3 (ca)^{2k}$

Vysvětlení

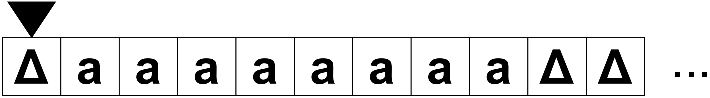
- $u = a^3$
- $v = ca$
- $w = \epsilon$
- $x = ca$
- $y = (ca)^{2k-2}$

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

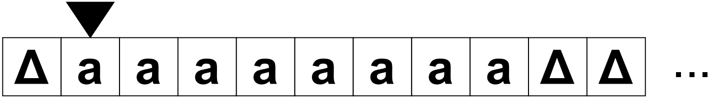
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$



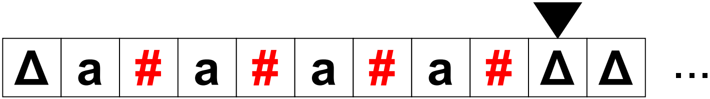
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Δ	a	#	a	a	a	a	a	a	Δ	Δ	...

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Δ	a	#	a	#	a	#	a	#	Δ	Δ	…

Příklad 3

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

									▼		
Δ	a	#	#	#	a	#	#	#	Δ	Δ	...

Příklad 3

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

▼

Δ	a	#	#	#	a	#	#	#	Δ	Δ	…

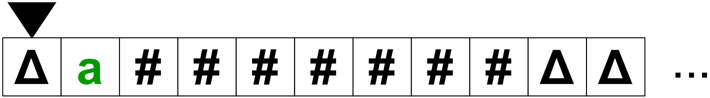
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Δ	a	#	#	#	#	#	#	#	Δ	Δ	...

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$. Pokud ano, odmítne.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$. Pokud ano, odmítne.
2. **TS** M zkontroluje, zda má na pásce právě jeden symbol a. Pokud ano, akceptuje.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$. Pokud ano, odmítne.
2. **TS** M zkontroluje, zda má na pásce právě jeden symbol a. Pokud ano, akceptuje.
3. **TS** M projde použitou část pásky, každý sudý výskyt symbolu a přepíše na symbol $\#$, každý lichý výskyt symbolu a ponechá beze změny.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$. Pokud ano, odmítne.
2. **TS** M zkontroluje, zda má na pásce právě jeden symbol a. Pokud ano, akceptuje.
3. **TS** M projde použitou část pásky, každý sudý výskyt symbolu a přepíše na symbol $\#$, každý lichý výskyt symbolu a ponechá beze změny.
4. Pokud byl počet symbolů a na pásce lichý, **TS** M odmítne.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M **tak, že** $L(M) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$. Pokud ano, odmítne.
2. **TS** M zkontroluje, zda má na pásce právě jeden symbol a. Pokud ano, akceptuje.
3. **TS** M projde použitou část pásky, každý sudý výskyt symbolu a přepíše na symbol $\#$, každý lichý výskyt symbolu a ponechá beze změny.
4. Pokud byl počet symbolů a na pásce lichý, **TS** M odmítne.
5. Přejdeme opět k bodu 2. Tento postup terminuje, neboť dokola snižujeme počet symbolů a na pásce.

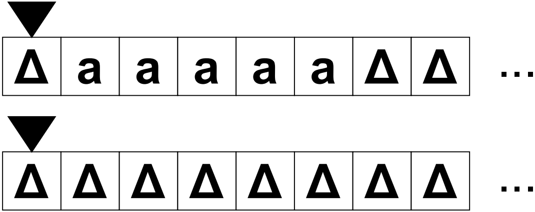
Příklad 4

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Konstrukce Turingova stroje

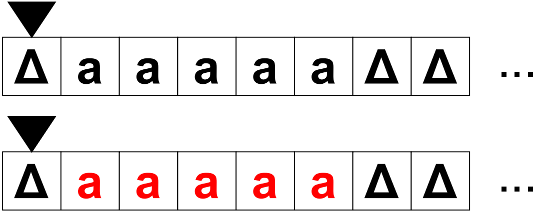
Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Příklad 4

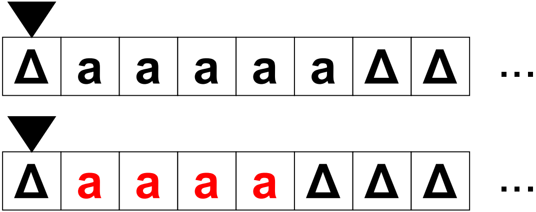
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Příklad 4

Konstrukce Turingova stroje

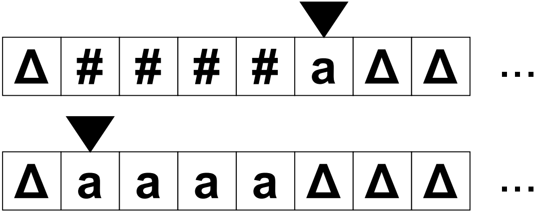
Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Δ	#	#	#	#	a	Δ	Δ	…

Δ	a	a	a	a	Δ	Δ	Δ	…

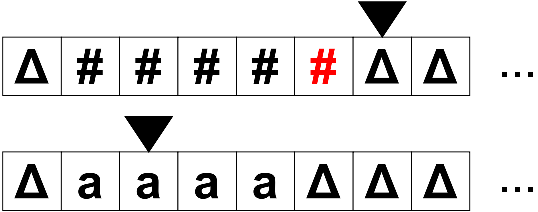
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



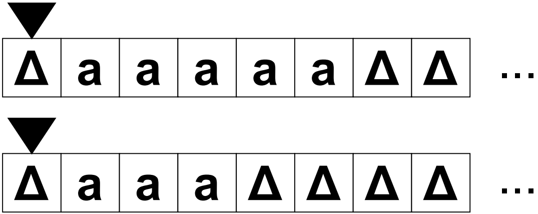
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



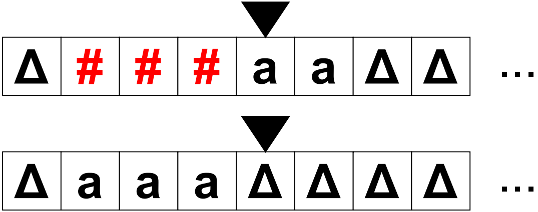
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



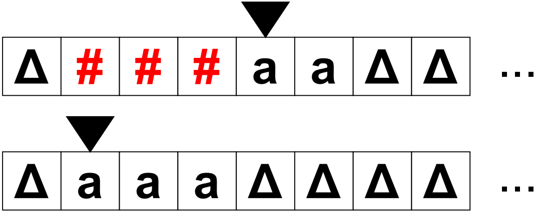
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



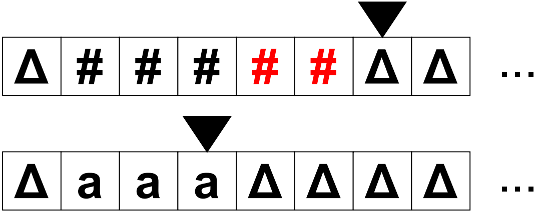
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



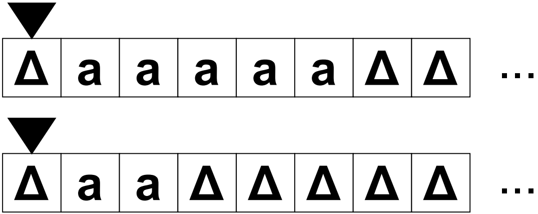
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Příklad 4

Konstrukce Turingova stroje

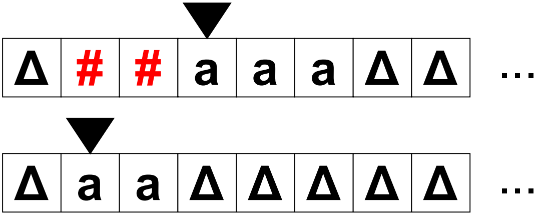
Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Δ	#	#	a	a	a	Δ	Δ	…

Δ	a	a	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	…

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Konstrukce Turingova stroje

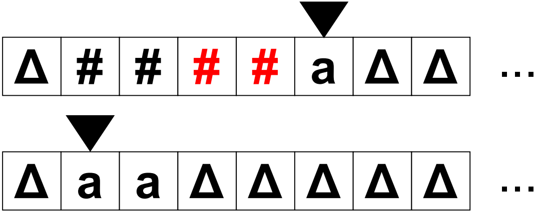
Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Δ	#	#	#	#	a	Δ	Δ	…

Δ	a	a	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	…

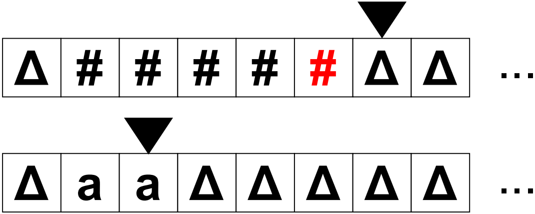
Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel



Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

▼								
Δ	a	a	a	a	a	Δ	Δ	…

▼								
Δ	a	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	Δ	…

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$ nebo $w = a$. Pokud ano, odmítne, jinak pokračuje.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$ nebo $w = a$. Pokud ano, odmítne, jinak pokračuje.
2. **TS** M překopíruje svůj vstup a^n na svou druhou pásku.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$ nebo $w = a$. Pokud ano, odmítne, jinak pokračuje.
2. **TS** M překopíruje svůj vstup a^n na svou druhou pásku.
3. **TS** M ze své druhé pásky smaže jeden symbol a.

FIT

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$ nebo $w = a$. Pokud ano, odmítne, jinak pokračuje.
2. **TS** M překopíruje svůj vstup a^n na svou druhou pásku.
3. **TS** M ze své druhé pásky smaže jeden symbol a.
4. **TS** M zkontroluje, zda má na druhé pásce řetězec a. Pokud ano, akceptuje svůj vstup, jinak pokračuje.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$ nebo $w = a$. Pokud ano, odmítne, jinak pokračuje.
2. **TS** M překopíruje svůj vstup a^n na svou druhou pásku.
3. **TS** M ze své druhé pásky smaže jeden symbol a.
4. **TS** M zkontroluje, zda má na druhé pásce řetězec a. Pokud ano, akceptuje svůj vstup, jinak pokračuje.
5. **TS** M posune čtecí hlavy na obou páskách na nejlevější buňky.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

1. **TS** M zkontroluje, zda jeho vstup $w = \epsilon$ nebo $w = a$. Pokud ano, odmítne, jinak pokračuje.
2. **TS** M překopíruje svůj vstup a^n na svou druhou pásku.
3. **TS** M ze své druhé pásky smaže jeden symbol a.
4. **TS** M zkontroluje, zda má na druhé pásce řetězec a. Pokud ano, akceptuje svůj vstup, jinak pokračuje.
5. **TS** M posune čtecí hlavy na obou páskách na nejlevější buňky.
6. **TS** M současně prochází první i druhou pásku doprava.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

7. Pokud **TS** M dojdou symboly na první pásce, ale na druhé pásce zbývají k přečtení symboly a, vrátí se na začátek první pásky a přejde k bodu 3.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

7. Pokud **TS** M dojdou symboly na první pásce, ale na druhé pásce zbývají k přečtení symboly a, vrátí se na začátek první pásky a přejde k bodu 3.
8. Pokud **TS** M dojdou symboly na druhé pásce, zkontroluje, zda současně vyčerpal i symboly na první pásce. Pokud ano, odmítne svůj vstup. V opačném případě se na druhé pásce vrátí na začátek, na první pásce zůstane na místě a přejde k bodu 6.

Konstrukce Turingova stroje

Popište chování Turingova stroje M tak, že $L(M) = \{a^p \mid p \in \mathbb{P}\}$, kde $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel

Řešení

7. Pokud **TS** M dojdou symboly na první pásce, ale na druhé pásce zbývají k přečtení symboly a, vrátí se na začátek první pásky a přejde k bodu 3.
8. Pokud **TS** M dojdou symboly na druhé pásce, zkontroluje, zda současně vyčerpal i symboly na první pásce. Pokud ano, odmítne svůj vstup. V opačném případě se na druhé pásce vrátí na začátek, na první pásce zůstane na místě a přejde k bodu 6.
9. Tento postup vždy terminuje, neboť neustále snižujeme počty symbolů a na druhé pásce

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M \rangle \# \langle n \rangle$, kde $\langle M \rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n \rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.

Příklad 5

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M\rangle\#\langle n\rangle$, kde $\langle M\rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n\rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.
4. **TS** T nedeterministicky vygeneruje n slov $w_1, w_2, \ldots w_n$ nad abecedou stroje M na svou pomocnou pásku.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M\rangle\#\langle n\rangle$, kde $\langle M\rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n\rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.
4. **TS** T nedeterministicky vygeneruje n slov $w_1, w_2, \ldots w_n$ nad abecedou stroje M na svou pomocnou pásku.
5. **TS** T zkontroluje, zda se tato slova po různých dvojicích liší. Pokud ne, odmítne.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

6. **TS** T postupně spustí simulace stroje M na všech těchto slovech.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

6. **TS** T postupně spustí simulace stroje M na všech těchto slovech.
7. Pokud některá simulace skončí odmítnutím, **TS** T odmítne.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**

$$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid |L(M)| \geq n\}$$

Řešení

6. **TS** T postupně spustí simulace stroje M na všech těchto slovech.
7. Pokud některá simulace skončí odmítnutím, **TS** T odmítne.
8. Pokud některá simulace cyklí, **TS** T cyklí.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid |L(M)| \geq n\}$

Řešení

6. **TS** T postupně spustí simulace stroje M na všech těchto slovech.
7. Pokud některá simulace skončí odmítnutím, **TS** T odmítne.
8. Pokud některá simulace cyklí, **TS** T cyklí.
9. Pokud všechny simulace skončí akceptováním, **TS** T akceptuje.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$, případně že $L \in \mathcal{L}_{REC}$ pro
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$, případně že $L \in \mathcal{L}_{REC}$ pro
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M \rangle \# \langle n \rangle$, kde $\langle M \rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n \rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M \rangle \# \langle n \rangle$, kde $\langle M \rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n \rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.
4. **TS** T nedeterministicky vygeneruje libovolný řetězec w nad abecedou stroje M

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$, případně že $L \in \mathcal{L}_{REC}$ pro
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **NTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M \rangle \# \langle n \rangle$, kde $\langle M \rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n \rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.
4. **TS** T nedeterministicky vygeneruje libovolný řetězec w nad abecedou stroje M
5. **TS** T provede nejvýše n kroků simulace stroje M nad w.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

7. Pokud simulace neskončí ani do n kroků, **TS** T odmítne

Příklad 6

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \exists w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

7. Pokud simulace neskončí ani do n kroků, **TS** T odmítne
8. Pokud simulace skončí do n kroků, **TS** T akceptuje

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$, případně že $L \in \mathcal{L}_{REC}$ pro
$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M \textbf{ vykoná na } w \textbf{ nejvýše } n \textbf{ kroků}\}$

Řešení

1. Konstruujeme **DTS** T takový, že $L(T) = L$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$, případně že $L \in \mathcal{L}_{REC}$ pro

$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **DTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **DTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M \rangle \# \langle n \rangle$, kde $\langle M \rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n \rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M\rangle\#\langle n\rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **DTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M\rangle\#\langle n\rangle$, kde $\langle M\rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n\rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.
4. **TS** T postupně generuje veškerá slova $w_1, w_2, \ldots$ nad abecedou stroje M, která mají nejvýše n symbolů

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

1. Konstruujeme **DTS** T takový, že $L(T) = L$
2. **TS** T má na svém vstupu řetězec w nad abecedou $\{0, 1, \#\}$
3. **TS** T zkontroluje, zda je jeho vstup w ve tvaru $\langle M \rangle \# \langle n \rangle$, kde $\langle M \rangle$ je kód Turingova stroje M a $\langle n \rangle$ je kód čísla n. Pokud ne, odmítne.
4. **TS** T postupně generuje veškerá slova $w_1, w_2, \ldots$ nad abecedou stroje M, která mají nejvýše n symbolů
5. **TS** T postupně provede nejvýše n kroků simulace stroje M nad každým tímto slovem.

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

7. Pokud některá ze simulací neskončí ani do n kroků, **TS** T odmítne

Důkazy rekurzivní vyčíslitelnosti

Ukažte, že $L \in \mathcal{L}_{RE}$**, případně že** $L \in \mathcal{L}_{REC}$ **pro**
$L = \{\langle M \rangle \# \langle n \rangle \mid \forall w \in \Sigma^* : M$ **vykoná na** w **nejvýše** n **kroků**$\}$

Řešení

7. Pokud některá ze simulací neskončí ani do n kroků, **TS** T odmítne
8. Pokud veškeré simulace skončí do n kroků, **TS** T akceptuje, neboť je jasné, že do n kroků by skončily i veškeré simulace delších řetězců

Příklad 8

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Permutace jazyků

$$perm : \Sigma^* \rightarrow 2^{\Sigma^*},\ Perm : 2^{\Sigma^*} \rightarrow 2^{\Sigma^*}$$
$$perm(w) = \{x \in \Sigma^* \mid \forall a \in \Sigma : \#_a(w) = \#_a(x)\}$$
$$Perm(L) = \bigcup_{w \in L} perm(w)$$

Ukázka permutace jazyků

- $w = aba$
  - $perm(w) = \{aab, aba, baa\}$
- $L = \{aba, abc\}$
  - $Perm(L) = \{aab, aba, baa, abc, acb, bac, cab, bca, cba\}$
- $L = \{ba^n \mid n \geq 0\}$
  - $Perm(L) = \{a\}^*\{b\}\{a\}^*$

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Konečné jazyky $\mathcal{L}_{FIN}$

- třída $\mathcal{L}_{FIN}$ je uzavřena na operaci *Perm*
- každý konečně velký řetězec má konečně mnoho permutací
- konečně mnoho řetězců má tedy konečně mnoho permutací

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Regulární jazyky $\mathcal{L}_3$

- třída $\mathcal{L}_3$ není uzavřena na operaci *Perm*
- mějme regulární jazyk $L = L((ab)^*) = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$
- $Perm(L) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \notin \mathcal{L}_3$

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Regulární jazyky $\mathcal{L}_3$

- třída $\mathcal{L}_3$ není uzavřena na operaci *Perm*
- mějme regulární jazyk $L = L((ab)^*) = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$
- $Perm(L) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \notin \mathcal{L}_3$

Bezkontextové jazyky $\mathcal{L}_2$

- třída $\mathcal{L}_2$ není uzavřena na operaci *Perm*
- mějme regulární jazyk $L = L((abc)^*) = \{(abc)^n \mid n \geq 0\}$
- $Perm(L) = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\} \notin \mathcal{L}_2$

Příklad 8

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

- třída $\mathcal{L}_{RE}$ je uzavřena na operaci *Perm*
- mějme libovolný jazyk $L \in \mathcal{L}_{RE}$, potom existuje **TS** M takový, že $L(M) = L$
- nyní je třeba obecně popsat konstrukci **TS** T takového, aby $L(T) = Perm(L)$

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

1. **TS** T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

1. **TS** T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M
2. **TS** T si na svou pomocnou pásku vypíše veškeré permutace řetězce w, kterých je konečně mnoho

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

1. **TS** T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M
2. **TS** T si na svou pomocnou pásku vypíše veškeré permutace řetězce w, kterých je konečně mnoho
3. **TS** T střídavě po jednom kroku spouští simulace stroje M na všech těchto řetězcích

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

1. **TS** T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M
2. **TS** T si na svou pomocnou pásku vypíše veškeré permutace řetězce w, kterých je konečně mnoho
3. **TS** T střídavě po jednom kroku spouští simulace stroje M na všech těchto řetězcích
4. Pokud některá simulace skončí akceptováním, **TS** T akceptuje svůj vstup w

Příklad 8

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

1. **TS** T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M
2. **TS** T si na svou pomocnou pásku vypíše veškeré permutace řetězce w, kterých je konečně mnoho
3. **TS** T střídavě po jednom kroku spouští simulace stroje M na všech těchto řetězcích
4. Pokud některá simulace skončí akceptováním, **TS** T akceptuje svůj vstup w
5. Pokud všechny simulace skončí odmítnutím, odmítne i **TS** T

Uzávěrové vlastnosti

Rozhodněte a dokažte, zda jsou třídy jazyků $\mathcal{L}_{FIN}, \mathcal{L}_3, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_{RE}$ uzavřeny na operaci permutace jazyků.

Rekurzivně vyčíslitelné jazyky $\mathcal{L}_{RE}$

1. **TS** T má na svém vstupu řetězec $w \in \Sigma^*$, kde Σ je abeceda stroje M
2. **TS** T si na svou pomocnou pásku vypíše veškeré permutace řetězce w, kterých je konečně mnoho
3. **TS** T střídavě po jednom kroku spouští simulace stroje M na všech těchto řetězcích
4. Pokud některá simulace skončí akceptováním, **TS** T akceptuje svůj vstup w
5. Pokud všechny simulace skončí odmítnutím, odmítne i **TS** T
6. Pokud žádný řetězec nebyl přijat a některá simulace cyklí, cyklí i **TS** T

Dotazy