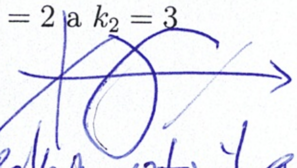
Semestrální zkouška ISS/ISSk, 2. opravný termín, 31.1.2024, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Dokažte, že jsou báze diskrétní Fourierovy transformace (DFT) pro $k_1 = 2$ a $k_2 = 3$ ortogonální. Můžete pracovat pro obecný nebo jakýkoliv zvolený počet vzorků N.



$\sum_N$ báze$_1[n]$ báze$_2^*[n]$ musí být 0.

$$\sum_N e^{+j2\pi\frac{2}{N}n} e^{-j2\pi\frac{3}{N}n} = \sum_N e^{j2\pi\left(\frac{2-3}{N}\right)n} = \sum_N e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

jedna otočka komplex. exp. suma je nula

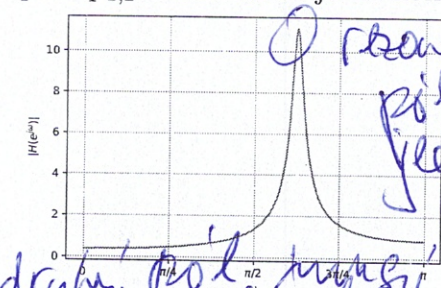
DOKÁZÁNO

Příklad 2 Napište kód v jazyce C (ne v Pythonu, ne pseudokód) pro implementaci IIR filtru 2. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$. Filtr musí být implementován jako funkce, jejímž vstupem je jeden vstupní vzorek $x[n]$ a výstupem jeden výstupní vzorek $y[n]$. Koeficienty jsou již v proměnných `b0`, `b1`, `b2`, `a1`, `a2`.

```
float filter (float xn) {
  static float x1=0.0, x2=0.0, y1=0.0, y2=0.0;
  float yn
  yn = b0*xn + b1*x1+b2*x2-a1*y1-a2*y2;
  y2=y1; y1=yn; x2=x1; x1=xn;
  return yn;
}
```

lze řešit i dvěma cykly.

Příklad 3 Na obrázku je modul frekvenční charakteristiky IIR filtru 2. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$. Víte, že oba dva nulové body tohoto filtru jsou nula: $n_{1,2} = 0$. Odhadněte hodnoty pólů $p_{1,2}$ a zakreslete je do komplexní roviny z. Filtr je stabilní.

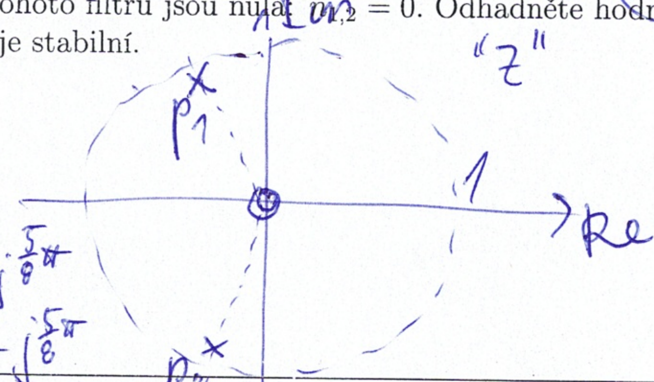


rezonance ⇒ pól blízko jednotkové kružnice

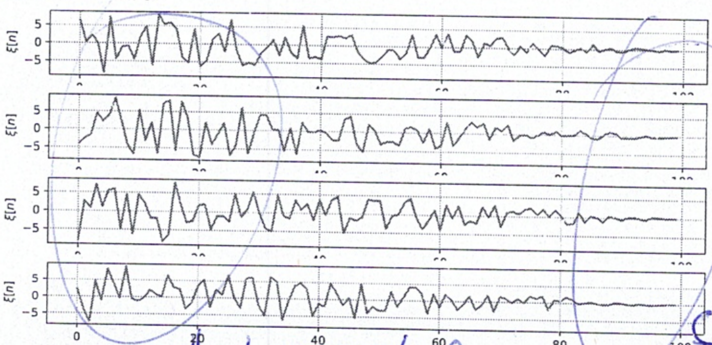
$p_1 = 0{,}9\, e^{j\frac{5\pi}{8}}$

$p_2 = 0{,}9\, e^{-j\frac{5\pi}{8}}$

druhý pól musí být kompl. sdružený



Příklad 4 Na obrázcích jsou čtyři realizace náhodného signálu. Určete, zda je signál stacionární a krátce zdůvodněte.



NENÍ STACIONÁRNÍ

velký rozptyl

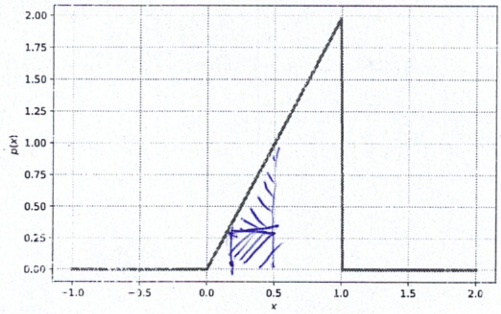
skoro nulový rozptyl

Příklad 5 Stacionární náhodný signál má diskrétní obor hodnot: $X_1 = -5$, $X_2 = -4$, $X_3 = -3$, $X_4 = -2$, $X_5 = -1$ s s pravděpodobnostmi $p(X_1) = 0.1$, $p(X_2) = 0.1$, $p(X_3) = 0.6$, $p(X_4) = 0.1$, $p(X_5) = 0.1$. Určete jeho střední hodnotu.

$$a = \sum X_i P(X_i) = -0{,}5-0{,}4-1{,}8-0{,}2-0{,}1 = \underline{\underline{-3}}$$

Příklad 6 Na obrázku je funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu. Určete následující pravděpodobnost:

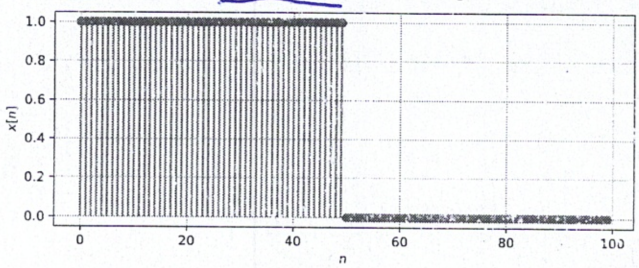
$$\int_{0,2}^{0,5} p(x)\,dx$$



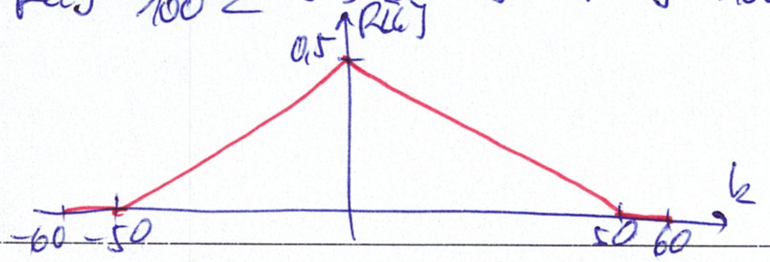
$P(0.2 < \xi[n] < 0.5) =$ .... $0,3 \times 0,25 + \dfrac{0,3 \times 0,75}{2} =$

$= 0,075 + 0,12 = \underline{\underline{0,2}}$

Příklad 7 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 50). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -60 do +60.



$R[k] = \frac{1}{100} \sum x[n]\,x[n+k]$ $\quad R[0] = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$



Příklad 8 Ve vektoru `x` o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ přímo ze signálu pomocí DFT. Výsledek generujte pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

$G(e^{j\omega}) = \frac{|X[k]|^2}{N}$

```
X = np.fft(x)
X = X[0:(N/2+1)]  ← krácení na požadované frekvence
G = X * np.conj(X)/N
nebo
G = np.power(np.abs(X), 2)/N
```

$\frac{1000}{400000} = 2.5 \cdot 10^{-3} = a$

Příklad 9 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte ji na sdruženou funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$. Hodnoty můžete psát do stejné tabulky.

intervaly	intervaly x_2 v n_2			
x_1 v n_1	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	1000 a
[0, 10]	0	1000 a	0	0
[-10, 0]	0	1000 a	1000 a	0
[-20, -10]	0	0	0	0

① count → proba: dělení Ω

② proba → PDF: dělení plochou „chlívku" $\Big\}$ $\frac{1}{4000} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{400000}$

Příklad 10 $x[n]$ o délce N vzorků je ergodický náhodný signál. Napište jakoukoliv formou (matematicky, pseudokód), jak ověříte, že se jedná o bílý šum.

① odhad autokorelačních koeficientů $R[k]$

② kontrola, že jen $R[0] \neq 0$, ostatní jsou nula (nebo blízké nule)

případně odhadem $G(e^{j\omega})$ a kontrola, zda je konstantní!

Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem s periodou $N_1 = 20$ vzorků má vždy 10 vzorků s hodnotou +1, pak 10 vzorků s hodnotou -1. K tomuto signálu je přimíchán šum se středním výkonem $P_e = 0.1$. Určet poměr signálu k šumu (SNR) v dB.

$$P_{sig} = \frac{1}{N}\sum x^2[n] = \frac{1}{20}\left(10\cdot 1\cancel{00} + 10\cdot\cancel{100}\right) = 1\cancel{00}$$

$$P_e = 0{,}1$$

$$SNR = 10\log_{10}\frac{P_{sig}}{P_e} = 10\log_{10}\frac{1\cancel{00}}{0{,}1} = 10\cdot\log_{10} 10\cancel{00} =$$

$$= 10\cdot \cancel{3}1 = \cancel{30\,dB} \quad \underline{\underline{10\,dB}}$$

Příklad 12 Obrázek $x[k,l]$ má 2D-DFT $X[m,n]$. Napište, jak se změní hodnoty 2D-DFT, pokud v obrázku zvětšíme kontrast: $y[k,l] = c\,x[k,l]$, kde $c > 1$. Předpokládejte, že žádná z hodnot $y[k,l]$ nebude "klipována" na maximální úroveň.

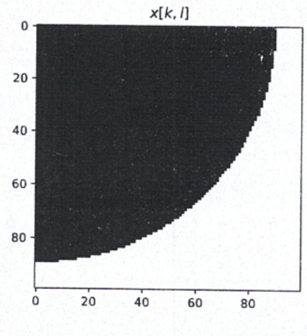
všechny FT jsou lineární, takže

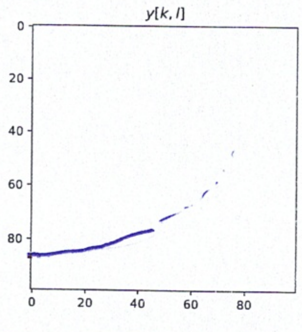
$$Y[m,n] = c\cdot X[m,n]$$

(lze i velmi jednoduše odvodit z definice 2D-DFT)

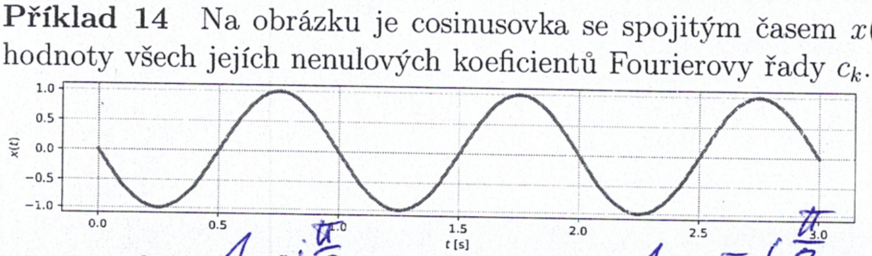
Příklad 13 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutní hodnota). Pixely s hodnotou 0 jsou zde bílé a s hodnotou 1 černé.

detektor vodorovných hran





Příklad 14 Na obrázku je cosinusovka se spojitým časem $x(t)$ s periodou $T_1 = 1$. Napište indexy a hodnoty všech jejích nenulových koeficientů Fourierovy řady c_k.



$$x(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

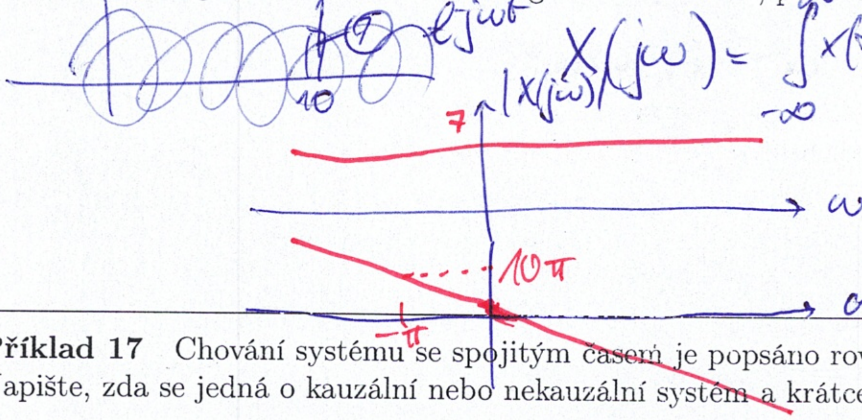
$$c_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \qquad c_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Příklad 15 Periodický signál se spojitým časem má pět nenulových koeficientů Fourierovy řady: $c_0 = 5$, $c_1 = 4e^{-\frac{1}{3}j}$, $c_2 = 2e^{-\frac{1}{2}j}$, $c_{-1} = c_1^\star$, $c_{-2} = c_2^\star$. Určete střední výkon tohoto signálu.

Parsevalův teorém

$P_s = \sum |c_k|^2 = 5^2 + 4^2 + 2^2 + 4^2 + 2^2 = \underline{\underline{65}}$

Příklad 16 Signál se spojitým časem je posunutý Diracův impuls $x(t) = 7\delta(t-10)$. Nakreslete spektrální funkci tohoto signálu — modulovou i arguemntovou část, pečlivě vyznačte hodnoty na všech osách.



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = 7 \cdot e^{-j10\omega}$$

$$|X(j\omega)| = 7$$

$$\arg X(j\omega) = -10\omega$$

Příklad 17 Chování systému se spojitým časem je popsáno rovnicí: $y(t) = x(t+3)$. Napište, zda se jedná o kauzální nebo nekauzální systém a krátce zdůvodněte.

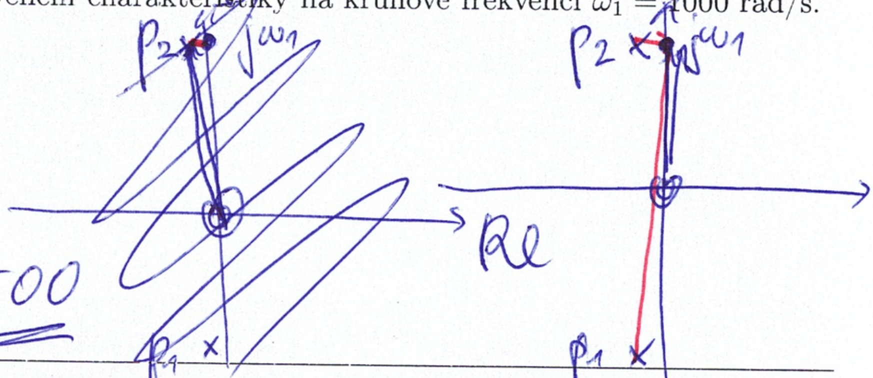
systém "vidí" vstup v budoucnosti

$\Rightarrow$ NENÍ KAUZÁLNÍ

Příklad 18 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{0.5s-1}{0.5s+1}$. Napište diferenciální rovnici popisující tento systém.

$$0{,}5\,\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0{,}5\,\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Příklad 19 Systém se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -1-1000j$ a $p_2 = -1+1000j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.



$|H(j\omega_1)| = \dfrac{1000 \cdot 1000}{1 \cdot 2000} = \underline{\underline{500}}$

Příklad 20 Signál se spojitým časem se bude vzorkovat na vzorkovací frekvenci $F_s = 16$ kHz, ale nevíme, zda je jeho spektrum frekvenčně omezené, bude tedy potřeba použít anti-aliasingový filtr. Nakreslete frekvenční charakteristiku tohoto filtru – na frekvenční ose můžete použít buď kruhové frekvence v rad/s nebo běžné frekvence v Hz.

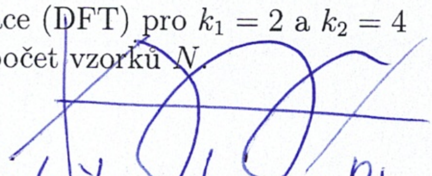
stačí kreslit jen pro kladné frekvence

Semestrální zkouška ISS/ISSk, 2. opravný termín, 31.1.2024, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Dokažte, že jsou báze diskrétní Fourierovy transformace (DFT) pro $k_1 = 2$ a $k_2 = 4$ ortogonální. Můžete pracovat pro obecný nebo jakýkoliv zvolený počet vzorků N.

viz A



$$\ldots \sum_N e^{\frac{2\pi(2-4)}{N}n} = \sum_N e^{-\frac{2\cdot 2\pi}{N}n}$$

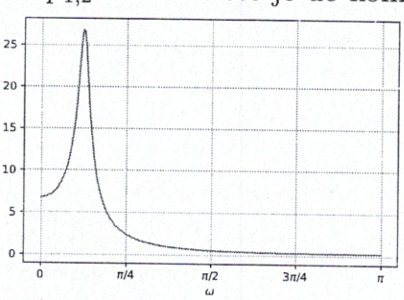
DOKÁZÁNO

2 otočky komplex. exp
suma je nula

Příklad 2 Napište kód v jazyce C (ne v Pythonu, ne pseudokód) pro implementaci IIR filtru 2. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$. Filtr musí být implementován jako funkce, jejímž vstupem je jeden vstupní vzorek $x[n]$ a výstupem jeden výstupní vzorek $y[n]$. Koeficienty jsou již v proměnných `b0`, `b1`, `b2`, `a1`, `a2`.

viz A

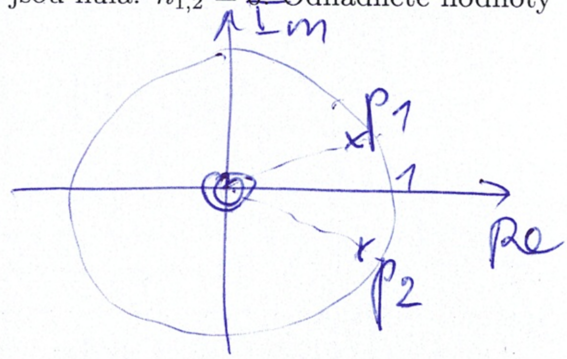
Příklad 3 Na obrázku je modul frekvenční charakteristiky IIR filtru 2. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$. Víte, že oba dva nulové body tohoto filtru jsou nula: $n_{1,2} = 0$. Odhadněte hodnoty pólů $p_{1,2}$ a zakreslete je do komplexní roviny z. Filtr je stabilní.



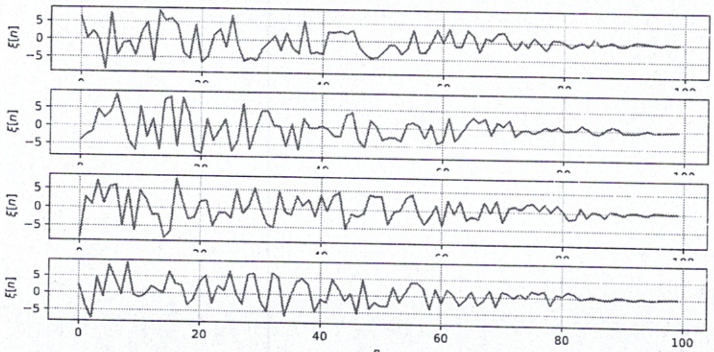
viz A

$p_1 = 0{,}9\, e^{j\frac{\pi}{8}}$

$p_2 = 0{,}9\, e^{-j\frac{\pi}{8}}$



Příklad 4 Na obrázcích jsou čtyři realizace náhodného signálu. Určete, zda je signál stacionární a krátce zdůvodněte.



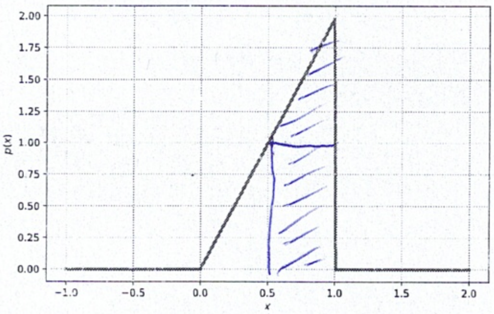
viz A

Příklad 5 Stacionární náhodný signál má pět diskrétní obor hodnot: $X_1 = -5$, $X_2 = -4, X_3 = -3, X_4 = -2, X_5 = -1$ s s pravděpodobnostmi $p(X_1) = 0.1$, $p(X_2) = 0.1$, $p(X_3) = 0.1$, $p(X_4) = 0.1$, $p(X_5) = 0.6$. Určete jeho střední hodnotu.

$$a = \sum X_i P(X_i) = -0{,}5 - 0{,}4 - 0{,}3 - 0{,}2 - 0{,}6 = \underline{\underline{-2}}$$

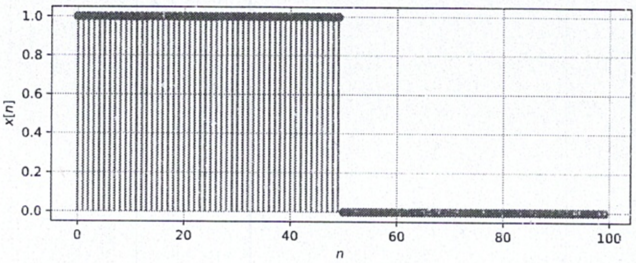
Příklad 6 Na obrázku je funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu. Určete následující pravděpodobnost:

$\int_{0,5}^{\infty} p(x)\,dx$



$P(\xi[n] > 0.5) =$ $0{,}5 \times 1 + \frac{0{,}5 \times 1}{2} = \underline{\underline{0{,}75}}$

Příklad 7 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 50). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -60 do +60.



viz A

Příklad 8 Ve vektoru `x` o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ přímo ze signálu pomocí DFT. Výsledek generujte pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

viz A

Příklad 9 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte ji na sdruženou funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$. Hodnoty můžete psát do stejné tabulky.

intervaly x_1 v n_1	intervaly x_2 v n_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	1000
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

viz A

Příklad 10 $x[n]$ o délce N vzorků je ergodický náhodný signál. Napište jakoukoliv formou (matematicky, pseudokód), jak ověříte, že se jedná o bílý šum.

viz A

Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem s periodou $N_1 = 20$ vzorků má vždy 10 vzorků s hodnotou +1, pak 10 vzorků s hodnotou -1. K tomuto signálu je přimíchán šum se středním výkonem $P_e = 10$. Určet poměr signálu k šumu (SNR) v dB.

viz A

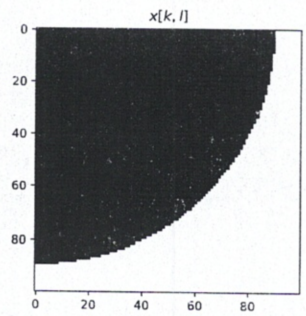
$$SNR = 10\log_{10}\frac{1\cancel{000}}{10} = 10\log_{10}\overset{0,1}{\cancel{10}} = \underline{\underline{-10\ dB}}$$

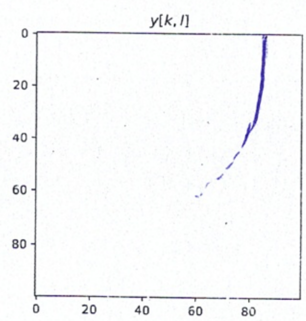
Příklad 12 Obrázek $x[k,l]$ má 2D-DFT $X[m,n]$. Napište, jak se změní hodnoty 2D-DFT, pokud v obrázku zvětšíme kontrast: $y[k,l] = c\,x[k,l]$, kde $c > 1$. Předpokládejte, že žádná z hodnot $y[k,l]$ nebude "klipována" na maximální úroveň.

viz A

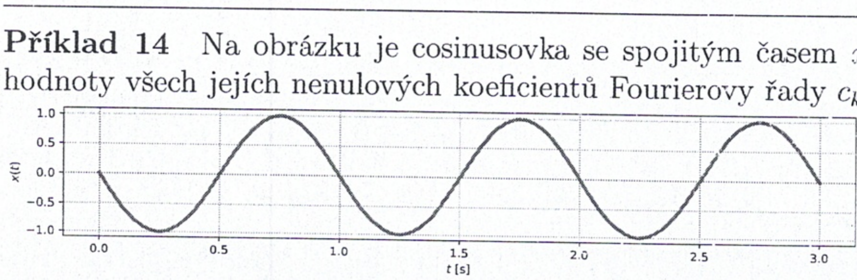
Příklad 13 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutní hodnota). Pixely s hodnotou 0 jsou zde bílé a s hodnotou 1 černé.

detektor svislých hran





Příklad 14 Na obrázku je cosinusovka se spojitým časem $x(t)$ s periodou $T_1 = 1$. Napište indexy a hodnoty všech jejích nenulových koeficientů Fourierovy řady c_k.



viz A

Příklad 15 Periodický signál se spojitým časem má pět nenulových koeficientů Fourierovy řady: $c_0 = 5$, $c_1 = 4e^{-\frac{1}{3}j}$, $c_2 = 2e^{-\frac{1}{2}j}$, $c_{-1} = c_1^\star$, $c_{-2} = c_2^\star$. Určete střední výkon tohoto signálu.

$P_s =$ 65 .... viz A

Příklad 16 Signál se spojitým časem je posunutý Diracův impuls $x(t) = 7\delta(t-10)$. Nakreslete spektrální funkci tohoto signálu — modulovou i arguemntovou část, pečlivě vyznačte hodnoty na všech osách.

viz A

Příklad 17 Chování systému se spojitým časem je popsáno rovnicí: $y(t) = x(t-3)$. Napište, zda se jedná o kauzální nebo nekauzální systém a krátce zdůvodněte.

systém "vidí" vstup v minulosti

=> JE KAUZÁLNÍ

Příklad 18 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{s-1}{0.5s+1}$. Napište diferenciální rovnici popisující tento systém.

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = 0{,}5\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

Příklad 19 Systém se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -1-1000j$ a $p_2 = -1+1000j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

viz A

$|H(j\omega_1)| =$ ....

Příklad 20 Signál se spojitým časem se bude vzorkovat na vzorkovací frekvenci $F_s = 16$ kHz, ale nevíme, zda je jeho spektrum frekvenčně omezené, bude tedy potřeba použít anti-aliasingový filtr. Nakreslete frekvenční charakteristiku tohoto filtru – na frekvenční ose můžete použít buď kruhové frekvence v rad/s nebo běžné frekvence v Hz.

viz A.