

## Semestrální zkouška ISS/ISSk, 2. opravný termín, 27.1.2023, skupina B

Login: ..... Příjmení a jméno: ..... Podpis: .....  
(prosím čitelně!)

**Příklad 1** Signály s diskretním časem jsou dány:  $x_1[n] = 4e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{50}n}$ ,  $x_2[n] = 4e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{2\pi}{50}n}$ .  
Napište vztah pro jejich součet  $y[n] = x_1[n] + x_2[n]$ . Vztah nesmí obsahovat komplexní čísla.

---

**Příklad 2** Signál se spojitým časem má délku 1 sekunda a je to cosinusovka na frekvenci  $f = 2$  kHz. Signál byl navzorkován na vzorkovací frekvenci  $F_s = 8$  kHz. Nakreslete jeho spektrogram.

---

**Příklad 3** Určete hodnoty **pólů** číslicového filtru s přenosovou funkcí:  $H(z) = 1 + 2.25z^{-2}$ .

---

**Příklad 4** Číslicový filtr s přenosovou funkcí:  $H(z) = 1 - 0.4z^{-1} + 0.2z^{-2}$  zpracovává vstupní signál  $x[n]$ , omezený v intervalu  $[-B, +B]$ , kde  $B = 1$ :  $x[n] \in [-B, +B]$ . Podmínka stability praví: Pokud lze pro výstupní signál nalézt  $C$  takové, že  $y[n] \in [-C, +C]$ , je filtr stabilní. Napište, zda takové  $C$  existuje a pokud ano, jakou má hodnotu.

---

**Příklad 5** Náhodný signál  $x[n]$  je bílý šum. Slovně, schématem, kódem nebo jinak popište, jak se dá obarvit (tedy zajistit, aby jeho spektrální hustota výkonu nebyla pro všechny frekvence konstantní).

**Příklad 6** Ergodický náhodný signál  $x[n]$  má délku  $N = 100000$  vzorků a má diskrétní hodnoty  $X_i$  od 0 do 9. Napište slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy, jak odhadnete pravděpodobnosti jednotlivých hodnot:  $\mathcal{P}(X_i)$ .

**Příklad 7** Na  $\Omega = 4000$  realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky  $n_1$  a  $n_2$ . Převeďte je na odhad sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti  $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ .

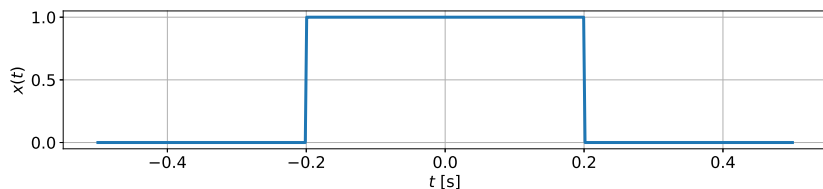
intervaly $x_1$	intervaly $x_2$			
	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

**Příklad 8** Obrázek má rozměry  $K = 100$  řádků a  $L = 100$  sloupců, hodnoty jasu jsou od 0 (černá) do 1 (bílá). Nakreslete obrázek  $x[k, l] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{2k}{100}\right)$ .

**Příklad 9** V kódu je dán obrázek (matice, 2D pole)  $x$  o rozměrech  $K$  řádků a  $L$  sloupců, a čtvercové konvoluční jádro (maska, 2D filtr)  $h$  o rozměrech  $I$  řádků a  $I$  sloupců, kde  $I$  je liché číslo. Napište C-kód pro 2D konvoluci (filtrování). Pracujte pomocí cyklů, nesmíte použít žádné vektorové operace.

**Příklad 10** Zjistěte, zda jsou báze Fourierovy řady  $e^{jk\omega_1 t}$  a  $e^{jl\omega_1 t}$  ortogonální pro  $k = 3$  a  $l = 1$ .

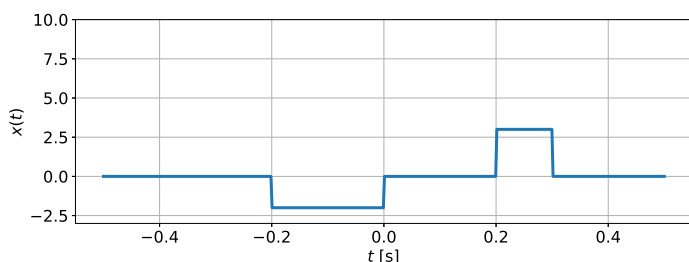
**Příklad 11** Na obrázku je signál se spojitým časem  $x(t)$ . Jeho spektrální funkce je  $X(j\omega)$ . Do stejného obrázku nakreslete signál  $y(t)$ , jehož spektrální funkce je  $Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j0.2\omega}$ .



**Příklad 12** Periodický signál se spojitým časem je dán jako sled obdélníkových impulsů o výšce  $D = 6$ , šířce  $\vartheta = 1 \mu s$  a periodě  $T_1 = 3 \mu s$ . Napište hodnoty koeficientů jeho Fourierovy řady od  $c_{-3}$  do  $c_3$ . Pomůcka:  $\text{sinc} \frac{\pi}{3} = 0.83$ ,  $\text{sinc} \frac{2\pi}{3} = 0.41$ .

$c_{-3} =$  ,  $c_{-2} =$  ,  $c_{-1} =$  ,  $c_0 =$  ,  $c_1 =$  ,  $c_2 =$  ,  $c_3 =$  .

**Příklad 13** Pro signál se spojitým časem  $x(t)$  nakreslete do stejného obrázku průběh okamžitého výkonu  $p(t)$ .



**Příklad 14** Nakreslete signál se spojitým časem:  $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$  a do stejného obrázku nakreslete signál  $y(t) = x(-t + 1)$ .

**Příklad 15** První signál se spojitým časem je dán  $x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$  a druhý signál je dvojice Diracových impulsů:  $x_2(t) = \delta(t) + \delta(t - 1)$ . Nakreslete výsledek konvoluce  $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$ .

**Příklad 16** Dokažte, že systém se spojitým časem provádějící derivaci vstupu:  $y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  je **lineární**.

---

**Příklad 17** Přenosová funkce systému se spojitým časem je  $H(s) = \frac{s-1}{0.5s+1}$ .  
Napište diferenciální rovnici popisující tento systém.

---

**Příklad 18** V kódu obsahuje komplexní matice  $H$  o rozměrech  $201 \times 201$  hodnoty přenosové funkce  $H(s)$  systému se spojitým časem. Byla vygenerována pro imaginární složku proměnné  $s$  od  $-10$  do  $10$  s krokem  $0.1$  (řádky) a pro reálnou složku proměnné  $s$  od  $-10$  do  $10$  s krokem  $0.1$  (sloupce). Jak z ní vyčteme frekvenční charakteristiku systému  $H(j\omega)$  a v jakém rozsahu kruhových frekvencí  $\omega$  ji dostaneme ?

---

**Příklad 19** Jaký je korektní postup vzorkování zvuku činelu (frekvenční složky až do  $20$  kHz) na vzorkovací frekvenci  $F_s = 20$  kHz ? Popište slovně nebo blokovým schématem. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, zda je se spojitým časem nebo číslicový a jaká je jeho frekvenční charakteristika.

---

**Příklad 20** Signál je vzorkovaný na vzorkovací frekvenci  $F_s = 10$  kHz. Nakreslete impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru  $h_r(t)$ . Na časové ose označte důležité body.