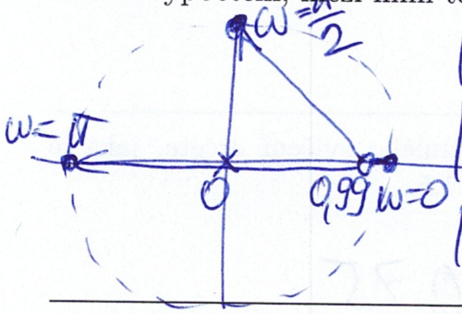
Semestrální zkouška ISS/ISSk, 1. opravný termín, 16.1.2023, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: RET
(prosím čitelně!)

$= \frac{z - 0{,}99}{z - 0}$ – modul č. vektoru vždy 1, nemá vliv

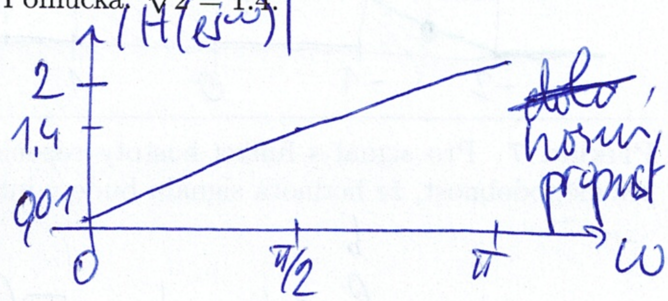
Příklad 1 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ číslicového filtru typu FIR s přenosovou funkcí: $H(z) = 1 - 0.99z^{-1}$. Hodnoty pro normované kruhové frekvence $\omega = 0, \ \frac{\pi}{2}, \ \pi$ rad určete výpočtem, mezi nimi to můžete "nějak" propojit. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$.



$|H(e^{j0})| = 0{,}01$

$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \sqrt{2}$

$|H(e^{j\pi})| = 2$



Příklad 2 Určete hodnoty pólů číslicového filtru typu IIR s přenosovou funkcí: $H(z) = \frac{1}{1 + 0.81z^{-2}}$ a rozhodněte, zda je tento filtr stabilní.

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0{,}81}$$

$$z^2 + 0{,}81 = 0$$

$$p_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 0{,}81}}{2} = \pm\sqrt{-0{,}81} = \pm 0{,}9j$$

abs. hodnota je menší než 1 (uvnitř jednotkové kruž.) $\Rightarrow$ stabilní

Příklad 3 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) je spočítána na $N = 10000$ vzorcích. Použitá vzorkovací frekvence byla $F_s = 10000$ Hz. Napište, který koeficient DFT $X[k]$ použijeme, chceme-li zjistit chování signálu na frekvenci $f = 1100$ Hz.

$$f = \frac{k}{N} F_s \qquad 1100 = \frac{k}{10000} \cdot 10000 \qquad k = 1100$$

koeficient $\underline{X[1100]}$

Příklad 4 V jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy napište kód pro generování signálu $x(t) = t$ od $t = 0$ do $t = 3$ a pro numerický výpočet jeho střední hodnoty v tomto časovém intervalu.

```
delta = 0.01
t = np.arange(0, 3, delta)
x = t.copy()
a = np.sum(x) * delta / 3.0
```

$$a = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt$$

nebo jakkoliv jinak, důležité je násobení "šířkou nudle" při num. integraci

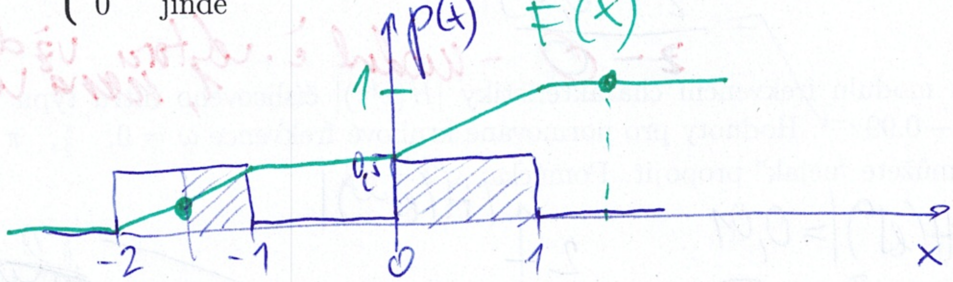
Příklad 5 Napište hodnotu komplexní exponenciály $x[n] = 4e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j\frac{2\pi}{50}n}$ pro $n = 25$

$x[25] = 4e^{-j\pi/2} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{50}25} = -4j \cdot e^{-j\pi} = -4j\,(-1) = 4j$

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro} \quad -2 \le x \le -1 \\ 0.5 & \text{pro} \quad 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

. Nakreslete odpovídající distribuční funkci $F(x)$.



Příklad 7 Pro signál s funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti z minulého cvičení určete, jaká je pravděpodobnost, že hodnota signálu bude v intervalu od $a = -1.5$ do $b = 1.5$.

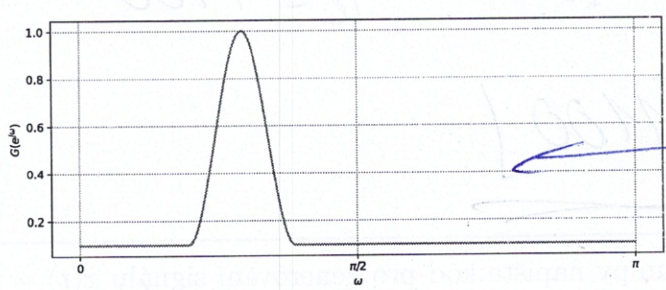
$\mathcal{P}(a < \xi[n] < b) =$ $\int_a^b p(x)dx$ nebo $F(b) - F(a)$ $= \underline{\underline{0{,}75}}$

Příklad 8 Ergodický náhodný signál $x[n]$ má délku $N = 100000$ vzorků a má diskrétní hodnoty od 0 do 99. Napište slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost $\mathcal{P}(X_1, X_2, k)$, tedy pravděpodobnost, že vzorek $x[n] = X_1$ **a** vzorek $x[n + k] = X_2$. Pište např. pro $X_1 = 5$, $X_2 = 17$, $k = 3$.

```
N = 100 000; X1 = 5; X2 = 17; k = 3
cnt = 0
for n in np.arange(N-k):
    cnt += ((x[n] == X1) & (x[n+k] == X2))
p = cnt / N
```

lze udělat různě, důležitá je tato podmínka

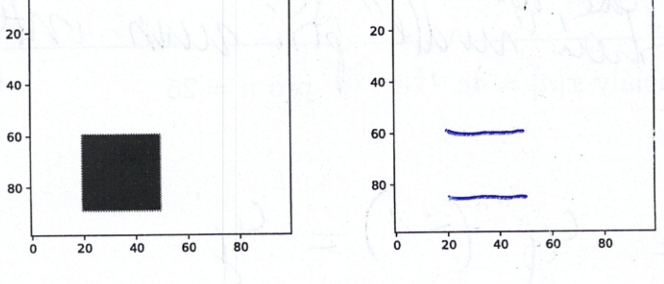
Příklad 9 Na obrázku je plot spektrální hustoty výkonu náhodného signálu. Určete, zda se jedná o bílý šum a své rozhodnutí krátce zdůvodněte.



bílý šum má konstantní PSD. Toto není konstanta => není bílý šum

Příklad 10 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutní hodnota). Pro úsporu toneru jsou pixely s hodnotou 0 bílé a s hodnotou 1 černé.

detektor vodorovných hran



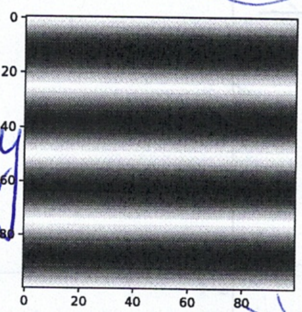
A

Příklad 11 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (bílá) až 1 (černá). Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: Všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0, 0]$.

$= \sum_k \sum_l x[k,l] \cdot e^{j2\pi\left(\frac{0k}{100}+\frac{0l}{100}\right)} = \sum \sum x[k,l]$

suma pixelů

4 vlny



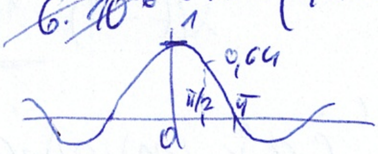
žádná vlna

$X[0,0]$ a $X[4,0]$

Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán jako sled obdélníkových impulsů o výšce $D = 2$, šířce $\vartheta = 3\,\mu s$ a periodě $T_1 = 6\,\mu s$. Napište hodnoty koeficientů jeho Fourierovy řady od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\mathrm{sinc}\frac{\pi}{2} = 0.64$.

$\omega_1 = \frac{2\pi}{6\cdot10^{-6}}$

$c_k = \frac{D\vartheta}{T_1}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right) = \frac{2\cdot3\cdot10^{-6}}{6\cdot10^{-6}}\,\mathrm{sinc}\left(1{,}5\cdot10^{-6}\cdot k\frac{2\pi}{6\cdot10^{-6}}\right) = \mathrm{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

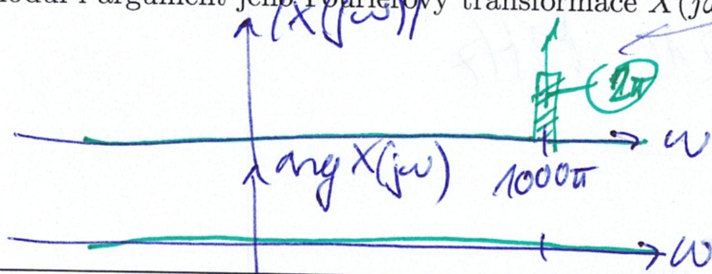


$c_{-2} =$ 0 , $c_{-1} =$ 0,64 , $c_0 =$ 1 , $c_1 =$ 0,64 , $c_2 =$ 0 .

Příklad 13 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j1000\pi t}$. Určete a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace $X(j\omega)$.

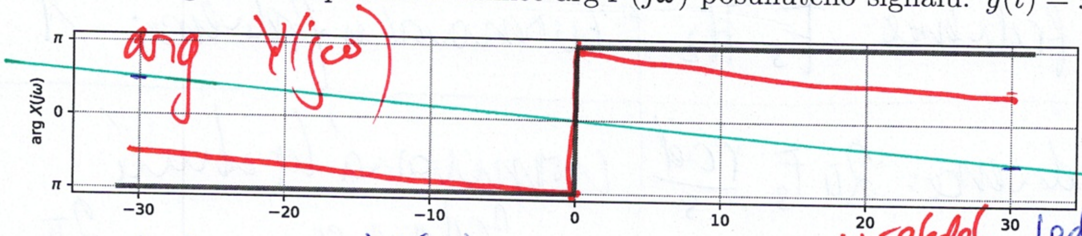
Diracův impuls ve frekvenci

$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - 1000\pi)$



lze ověřit pomocí inverzní FT

Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce $\arg Y(j\omega)$ posunutého signálu: $y(t) = x(t - \frac{\pi}{60})$.



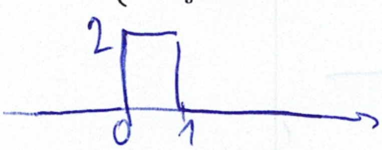
pro $y(t) = x(t-\tau)$ je $Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$

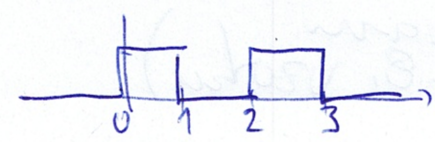
$\arg Y(j\omega) = \arg X(j\omega) - \omega\tau$. Zde tedy výsledek $\arg Y(j\omega) = \arg X(j\omega) - \omega\frac{\pi}{60}$

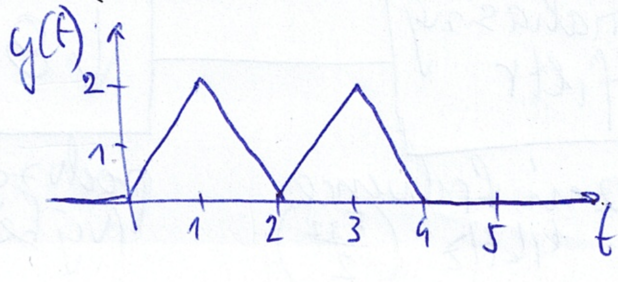
pomocná funkce

Příklad 15 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

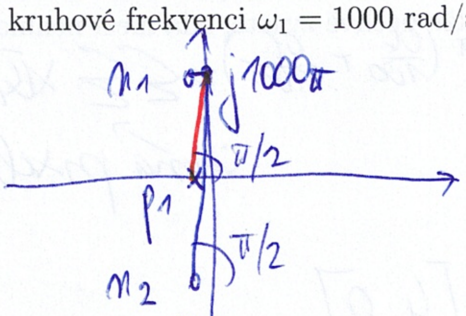
$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \text{ a pro } 2 \le t \le 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$







Příklad 16 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden pól: $p_1 = -1$ a dva nulové body: $n_1 = -1 + 1000j$, $n_2 = -1 - 1000j$. Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s. „s"



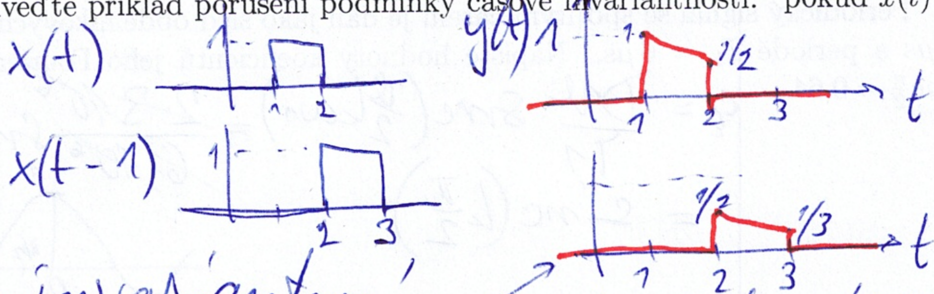
$$|H(j1000\pi)| = \frac{1 \cdot 2000}{1000} = 2$$

$$\arg H(j1000\pi) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$H(j\omega_1) =$ 2

a=1

Příklad 17 Rozhodněte, zda je systém popsaný rovnicí $y(t) = \frac{a}{t}x(t)$, kde a je konstanta, časově invariantní. Pokud není, uveďte příklad porušení podmínky časové invariantnosti: "pokud $x(t) \to y(t)$, pak $x(t-\tau) \to y(t-\tau)$".



není čas. invariantní

není zpožděná verze y(t)

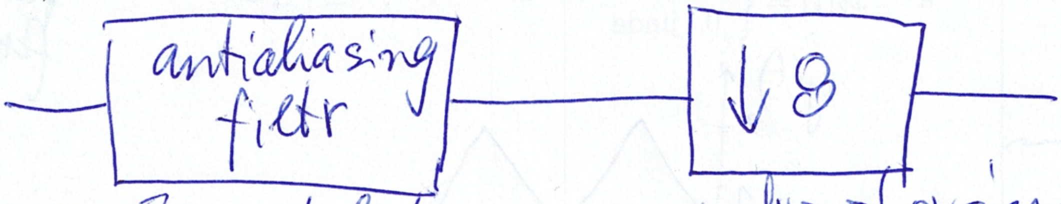
Příklad 18 Chceme vzorkovat a perfektně rekonstruovat rádiové signály z FM pásma 88—108 MHz. Jaká bude minimální vzorkovací frekvence ?

$Fs_{min} = 2 \cdot 108 = 216$ MHz

Příklad 19 Spektrum vzorkovaného signálu je periodické. Jaká je jeho perioda ? Můžete odpovědět v libovolné frekvenci, ale napište jasně, která frekvence to je, jaká je hodnota periody, a jaká je jednotka.

standardní frekvence: F_s Hz	normovaná frekvence: 1 (bez jednotky)
kruhová frekvence: $2\pi F_s$ $\frac{rad}{s}$	normovaná kruhová frekvence: 2π rad

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 64$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 8$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma korektního postupu. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje a jaká je jeho frekvenční charakteristika.



na Fs_1, mezní frekvence 4kHz $\left(\frac{Fs_2}{2}\right)$

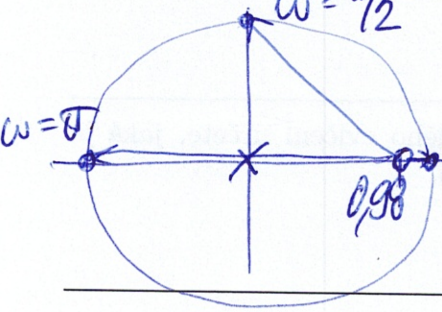
podvzorkování (výběr ∀ 8. vzorku)

Semestrální zkouška ISS/ISSk, 1. opravný termín, 16.1.2023, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: .... REF
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ číslicového filtru typu FIR s přenosovou funkcí: $H(z) = 1 - 0.98z^{-1}$. Hodnoty pro normované kruhové frekvence $\omega = 0, \ \frac{\pi}{2}, \ \pi$ rad určete výpočtem, mezi nimi to můžete "nějak" propojit. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$.

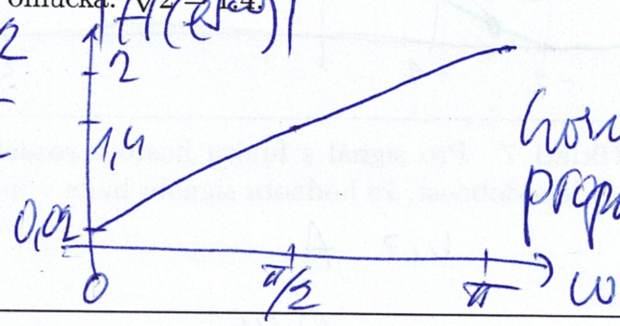
viz A



$|H(e^{j0})| = 0,02$

$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \sqrt{2}$

$|H(e^{j\pi})| = 2$



horní propust

Příklad 2 Určete hodnoty pólů číslicového filtru typu IIR s přenosovou funkcí: $H(z) = \dfrac{1}{1 + 0.64z^{-2}}$ a rozhodněte, zda je tento filtr stabilní.

viz A

$p_{1/2} = \pm 0,8j \Rightarrow$ stabilní

Příklad 3 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) je spočítána na $N = 10000$ vzorcích. Použitá vzorkovací frekvence byla $F_s = 10000$ Hz. Napište, který koeficient DFT $X[k]$ použijeme, chceme-li zjistit chování signálu na frekvenci $f = 800$ Hz.

viz A

$X[800]$

Příklad 4 V jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy napište kód pro generování signálu $x(t) = t$ od $t = 0$ do $t = 3$ a pro numerický výpočet jeho střední hodnoty v tomto časovém intervalu.

viz A

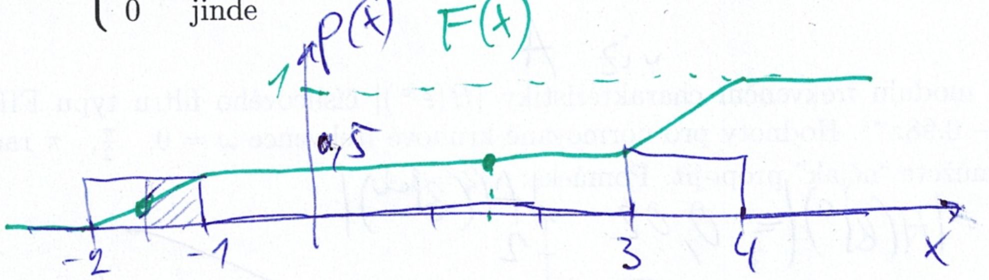
Příklad 5 Napište hodnotu komplexní exponenciály $x[n] = 4e^{j\frac{\pi}{2}}e^{-j\frac{2\pi}{50}n}$ pro $n = 25$

$x[25] = 4j\, e^{-j\frac{2\pi \cdot 25}{50}} = 4j \cdot e^{-j\pi} = 4j \cdot (-1) = -4j$

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro} \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 0.5 & \text{pro} \quad 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

. Nakreslete odpovídající distribuční funkci $F(x)$.



Příklad 7 Pro signál s funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti z minulého cvičení určete, jaká je pravděpodobnost, že hodnota signálu bude v intervalu od $a = -1.5$ do $b = 1.5$.

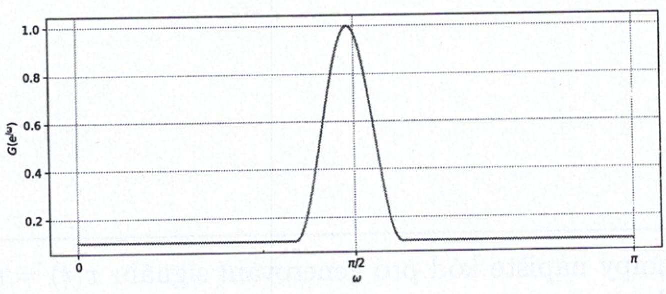
viz A

$\mathcal{P}(a < \xi[n] < b) =$ 0,25

Příklad 8 Ergodický náhodný signál $x[n]$ má délku $N = 100000$ vzorků a má diskrétní hodnoty od 0 do 99. Napište slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost $\mathcal{P}(X_1, X_2, k)$, tedy pravděpodobnost, že vzorek $x[n] = X_1$ **a** vzorek $x[n+k] = X_2$. Pište např. pro $X_1 = 29, \quad X_2 = 11, \quad k = 7$.

viz A

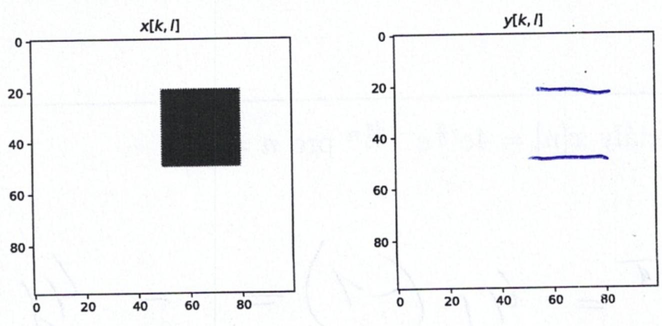
Příklad 9 Na obrázku je plot spektrální hustoty výkonu náhodného signálu. Určete, zda se jedná o bílý šum a své rozhodnutí krátce zdůvodněte.



ne, viz A

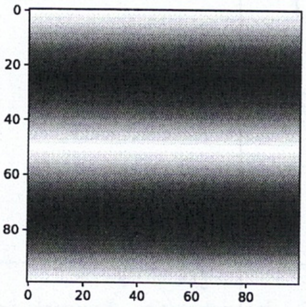
Příklad 10 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutí hodnota). Pro úsporu toneru jsou pixely s hodnotou 0 bílé a s hodnotou 1 černé.

detektor vodorovných hran



8

Příklad 11 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (bílá) až 1 (černá). Určete, které koeficienty $X[m,n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: Všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0,0]$.



viz A

$X[0,0]$ a $X[2,0]$

Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán jako sled obdélníkových impulsů o výšce $D = 2$, šířce $\vartheta = 2\,\mu$s a periodě $T_1 = 4\,\mu$s. Napište hodnoty koeficientů jeho Fourierovy řady od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\mathrm{sinc}\frac{\pi}{2} = 0.64$.

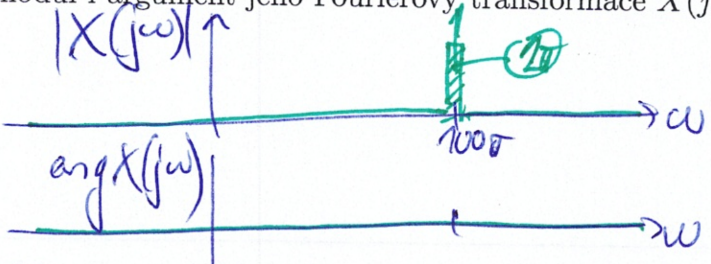
viz A

$$c_k = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 10^{-6}} \,\mathrm{sinc}\left(1 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{k 2\pi}{4 \cdot 10^{-6}}\right) = \mathrm{sinc}\left(k \frac{\pi}{2}\right)$$

$c_{-2} =$ 0 , $c_{-1} =$ 0,64 , $c_0 =$ 1 , $c_1 =$ 0,64 , $c_2 =$ 0 .

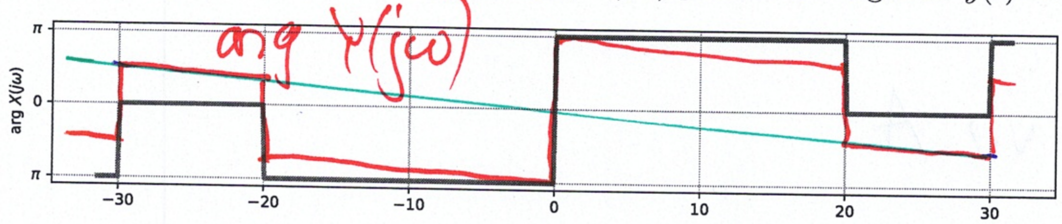
Příklad 13 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j100\pi t}$. Určete a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace $X(j\omega)$.

viz A



$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - 100\pi)$

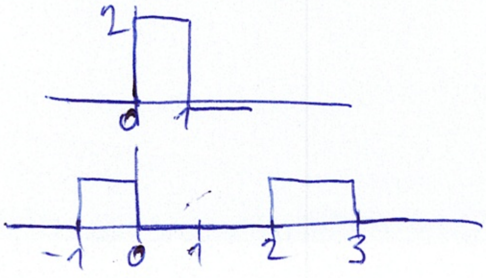
Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce $\arg Y(j\omega)$ posunutého signálu: $y(t) = x(t - \frac{\pi}{60})$.

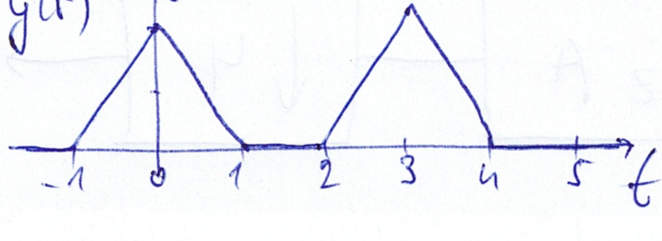


viz A

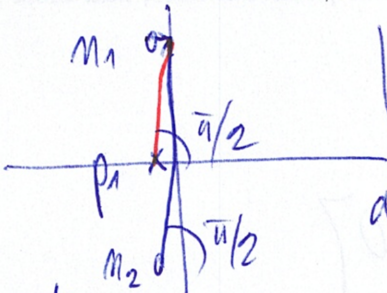
Příklad 15 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \leq t \leq 0 \text{ a pro } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$





Příklad 16 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden pól: $p_1 = -1$ a dva nulové body: $n_1 = -2 + 1000j$, $n_2 = -2 - 1000j$ Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.



$$|H(j1000\pi)| = \frac{2 \cdot 2000}{1000} = 4$$

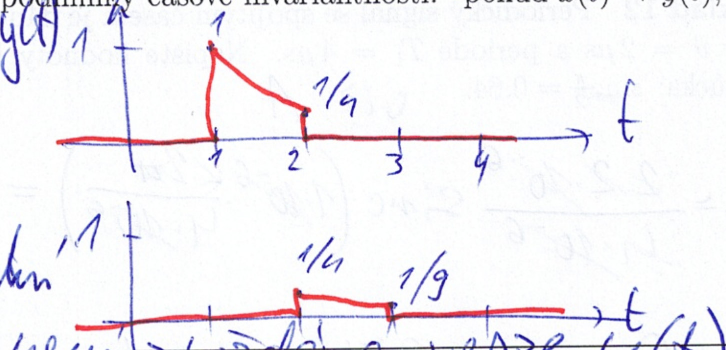
$$\arg H(j1000\pi) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

$H(j\omega_1) =$ 4

Příklad 17 Rozhodněte, zda je systém popsaný rovnicí $y(t) = \frac{a}{t^2}x(t)$, kde a je konstanta, časově invariantní. Pokud není, uveďte příklad porušení podmínky časové invariantnosti: "pokud $x(t) \to y(t)$, pak $x(t-\tau) \to y(t-\tau)$".

$a>1$

vstupy viz A



není čas.-invariantní

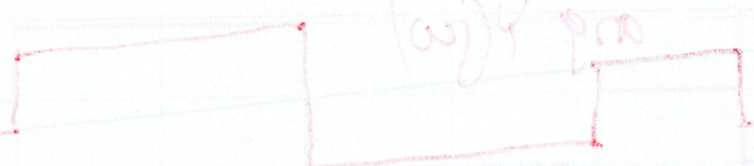
není zpožděná verze $y(t)$

Příklad 18 Chceme vzorkovat a perfektně rekonstruovat rádiové signály z FM pásma 88—108 MHz. Jaká bude minimální vzorkovací frekvence ?

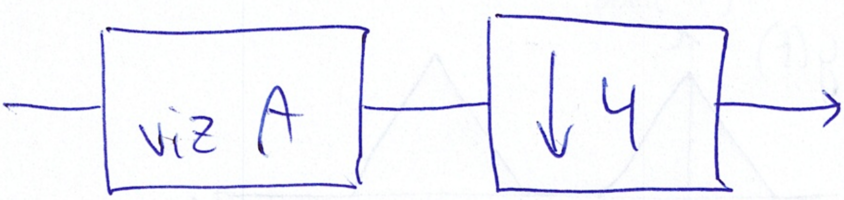
216 MHz

Příklad 19 Spektrum vzorkovaného signálu je periodické. Jaká je jeho perioda ? Můžete odpovědět v libovolné frekvenci, ale napište jasně, která frekvence to je, jaká je hodnota periody, a jaká je jednotka.

viz A



Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 32$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 8$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma korektního postupu. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje a jaká je jeho frekvenční charakteristika.

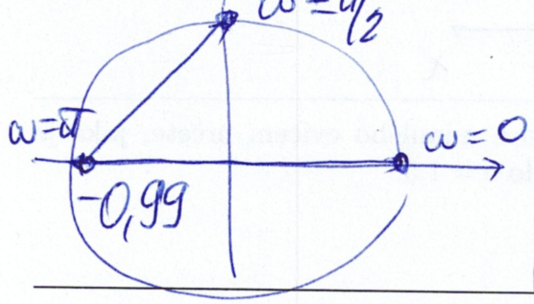


Semestrální zkouška ISS/ISSk, 1. opravný termín, 16.1.2023, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF ....
(prosím čitelně!)

$= \frac{z-(-0{,}99)}{z-0}$ ← modul vždy 1 → nemá vliv

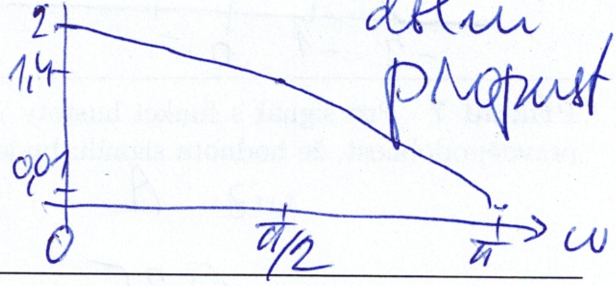
Příklad 1 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ číslicového filtru typu FIR s přenosovou funkcí: $H(z) = 1 + 0.99z^{-1}$. Hodnoty pro normované kruhové frekvence $\omega = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ rad určete výpočtem, mezi nimi to můžete "nějak" propojit. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$.



$|H(e^{j0})| = 2$

$|H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \sqrt{2}$

$|H(e^{j\pi})| = 0{,}01$



dolní propust

Příklad 2 Určete hodnoty pólů číslicového filtru typu IIR s přenosovou funkcí: $H(z) = \frac{1}{1+0.36z^{-2}}$ a rozhodněte, zda je tento filtr stabilní.

viz A

$p_{1/2} = \pm 0{,}6j \Rightarrow$ stabilní

Příklad 3 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) je spočítána na $N = 10000$ vzorcích. Použitá vzorkovací frekvence byla $F_s = 10000$ Hz. Napište, který koeficient DFT $X[k]$ použijeme, chceme-li zjistit chování signálu na frekvenci $f = 600$ Hz.

viz A

$X[600]$

Příklad 4 V jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy napište kód pro generování signálu $x(t) = t$ od $t = 0$ do $t = 3$ a pro numerický výpočet jeho střední hodnoty v tomto časovém intervalu.

viz A

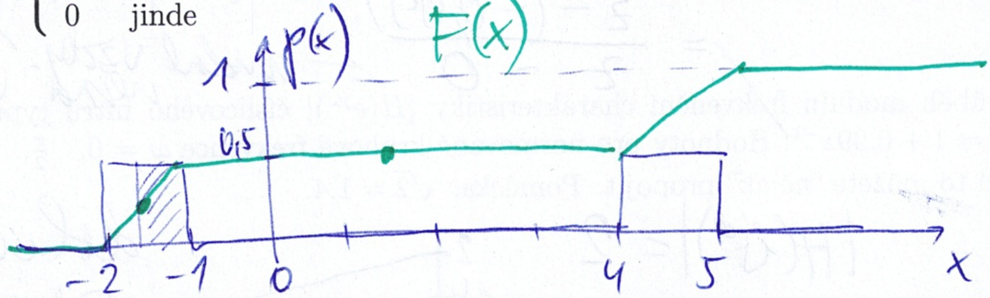
Příklad 5 Napište hodnotu komplexní exponenciály $x[n] = 4e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{50}n}$ pro $n = 25$

$x[25] = -4j\,e^{j\frac{2\pi\cdot 25}{50}} = -4j\,e^{j\pi} = -4j(-1) = 4j$

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro} \quad -2 \leq x \leq -1 \\ 0.5 & \text{pro} \quad 4 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

. Nakreslete odpovídající distribuční funkci $F(x)$.



Příklad 7 Pro signál s funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti z minulého cvičení určete, jaká je pravděpodobnost, že hodnota signálu bude v intervalu od $a = -1.5$ do $b = 1.5$.

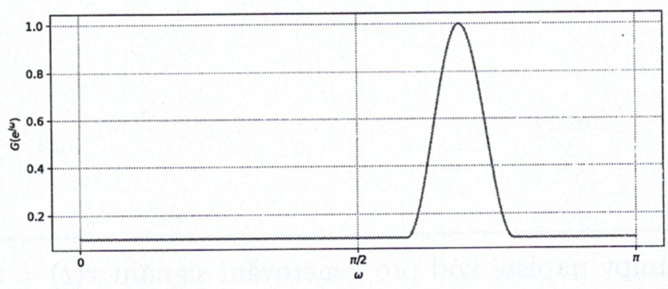
viz A

$\mathcal{P}(a < \xi[n] < b) =$ 0,25

Příklad 8 Ergodický náhodný signál $x[n]$ má délku $N = 100000$ vzorků a má diskrétní hodnoty od 0 do 99. Napište slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost $\mathcal{P}(X_1, X_2, k)$, tedy pravděpodobnost, že vzorek $x[n] = X_1$ **a** vzorek $x[n+k] = X_2$. Pište např. pro $X_1 = 18$, $X_2 = 42$, $k = 5$.

viz A

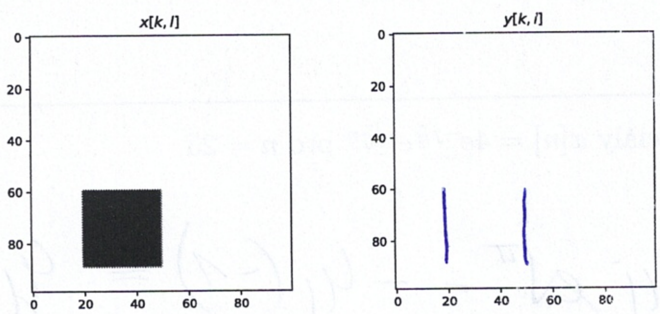
Příklad 9 Na obrázku je plot spektrální hustoty výkonu náhodného signálu. Určete, zda se jedná o bílý šum a své rozhodnutí krátce zdůvodněte.



ne, viz A

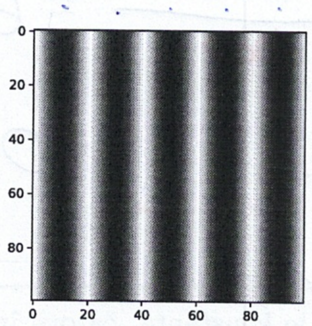
Příklad 10 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutí hodnota). Pro úsporu toneru jsou pixely s hodnotou 0 bílé a s hodnotou 1 černé.

detektor svislých hran



C

Příklad 11 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (bílá) až 1 (černá). Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: Všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0, 0]$.



viz A

$X[0,0]$ a $X[0,5]$

Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán jako sled obdélníkových impulsů o výšce $D = 2$, šířce $\vartheta = 1\,\mu s$ a periodě $T_1 = 2\,\mu s$. Napište hodnoty koeficientů jeho Fourierovy řady od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\text{sinc}\frac{\pi}{2} = 0.64$.

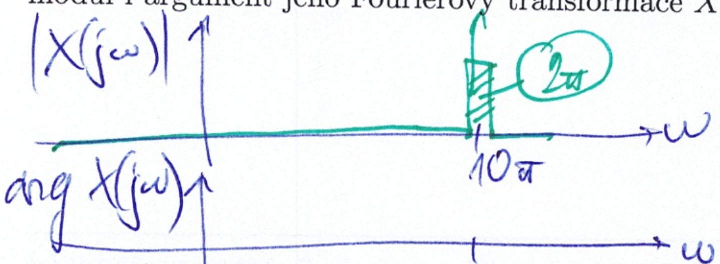
viz A

$$c_k = \frac{1\cdot 10^{-6}\cdot 2}{2\cdot 10^{-6}} \cdot \text{sinc}\left(0{,}5\cdot 10^{-6}\, k \frac{2\pi}{2\cdot 10^{-6}}\right) = \text{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$c_{-2} =$ 0 , $c_{-1} =$ 0,64 , $c_0 =$ 1 , $c_1 =$ 0,64 , $c_2 =$ 0 .

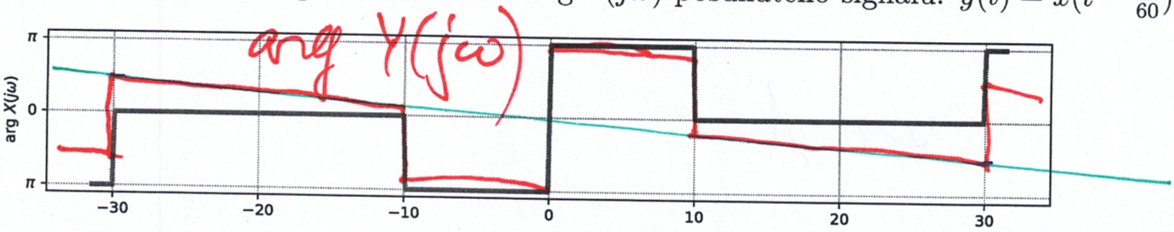
Příklad 13 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j10\pi t}$. Určete a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace $X(j\omega)$.

viz A



$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - 10\pi)$

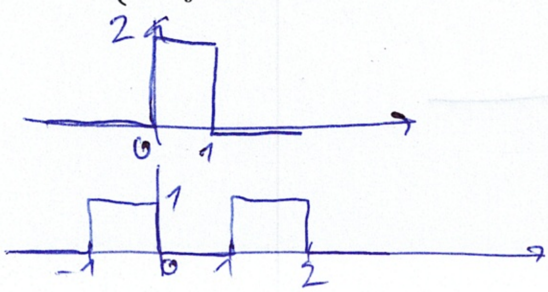
Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce $\arg Y(j\omega)$ posunutého signálu: $y(t) = x(t - \frac{\pi}{60})$.

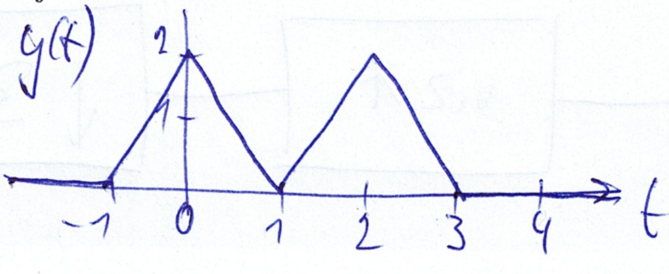


viz A

Příklad 15 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro} \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -1 \le t \le 0 \text{ a pro } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$





Příklad 16 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden pól: $p_1 = -1$ a dva nulové body: $n_1 = -3 + 1000j$, $n_2 = -3 - 1000j$ Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

viz A/B

$|H(j1000\pi)| = \frac{3 \cdot 2000}{1000} = 6$

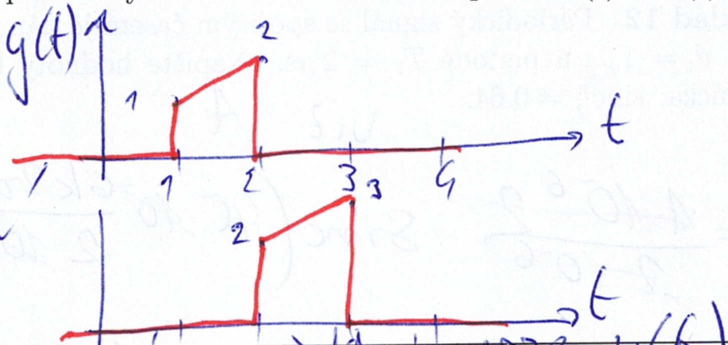
$\arg H(j1000) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

$H(j\omega_1) =$ $\underline{\underline{6}}$

Příklad 17 Rozhodněte, zda je systém popsaný rovnicí $y(t) = at\,x(t)$, kde a je konstanta, časově invariantní. Pokud není, uveďte příklad porušení podmínky časové invariantnosti: "pokud $x(t) \to y(t)$, pak $x(t-\tau) \to y(t-\tau)$".

$a = 1$

vstupy viz A



není čas. invariantní

není zpožděná verze y(t)

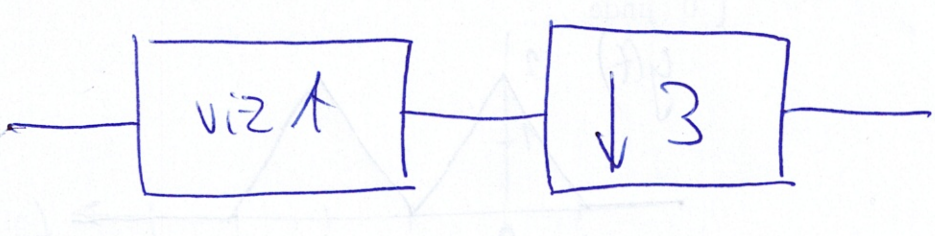
Příklad 18 Chceme vzorkovat a perfektně rekonstruovat rádiové signály z FM pásma 88—108 MHz. Jaká bude minimální vzorkovací frekvence ?

216 MHz

Příklad 19 Spektrum vzorkovaného signálu je periodické. Jaká je jeho perioda ? Můžete odpovědět v libovolné frekvenci, ale napište jasně, která frekvence to je, jaká je hodnota periody, a jaká je jednotka.

viz A

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 24$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 8$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma korektního postupu. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje a jaká je jeho frekvenční charakteristika.



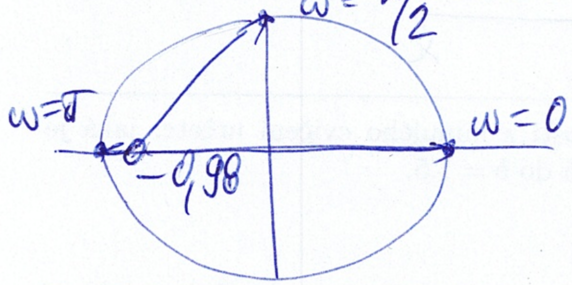
Semestrální zkouška ISS/ISSk, 1. opravný termín, 16.1.2023, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF, ...
(prosím čitelně!)

červená je správně

viz C

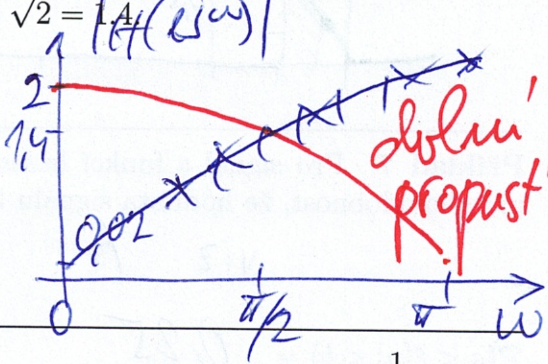
Příklad 1 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky $|H(e^{j\omega})|$ číslicového filtru typu FIR s přenosovou funkcí: $H(z) = 1 + 0.98z^{-1}$. Hodnoty pro normované kruhové frekvence $\omega = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi$ rad určete výpočtem, mezi nimi to můžete "nějak" propojit. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$



$|H(e^{j0})| = 2$

$|H(e^{j\pi/2})| = \sqrt{2}$

$|H(e^{j\pi})| = 0{,}02$



Příklad 2 Určete hodnoty pólů číslicového filtru typu IIR s přenosovou funkcí: $H(z) = \dfrac{1}{1 + 1.21z^{-2}}$ a rozhodněte, zda je tento filtr stabilní.

viz A

$p_{1/2} = \pm 1{,}1j$ – abs. hodnota větší než 1 vně jednotkové kružnice

$\Rightarrow$ nestabilní.

Příklad 3 Diskrétní Fourierova transformace (DFT) je spočítána na $N = 10000$ vzorcích. Použitá vzorkovací frekvence byla $F_s = 10000$ Hz. Napište, který koeficient DFT $X[k]$ použijeme, chceme-li zjistit chování signálu na frekvenci $f = 450$ Hz.

viz A

$X[450]$

Příklad 4 V jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy napište kód pro generování signálu $x(t) = t$ od $t = 0$ do $t = 3$ a pro numerický výpočet jeho střední hodnoty v tomto časovém intervalu.

viz A

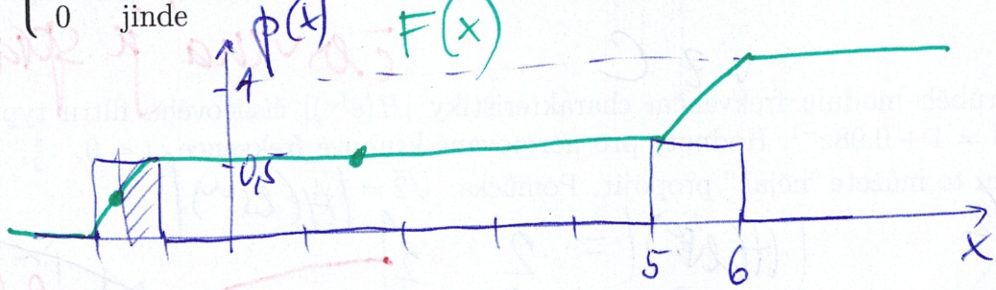
Příklad 5 Napište hodnotu komplexní exponenciály $x[n] = 4e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{50}n}$ pro $n = 25$

$x[25] = 4j\, e^{j\frac{2\pi \cdot 25}{50}} = 4j\, e^{j\pi} = 4j(-1) = -4j$

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } -2 \leq x \leq -1 \\ 0.5 & \text{pro } 5 \leq x \leq 6 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

. Nakreslete odpovídající distribuční funkci $F(x)$.



Příklad 7 Pro signál s funkcí hustoty rozdělení pravděpodobnosti z minulého cvičení určete, jaká je pravděpodobnost, že hodnota signálu bude v intervalu od $a = -1.5$ do $b = 1.5$.

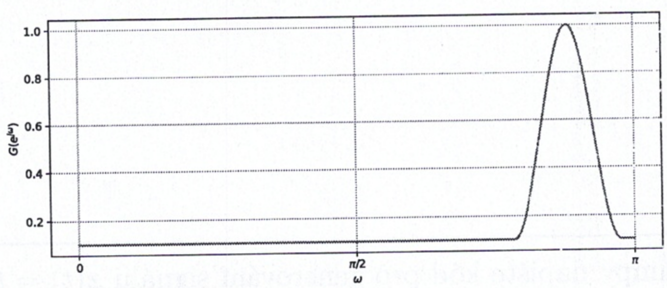
viz A

$\mathcal{P}(a < \xi[n] < b) =$ 0,25

Příklad 8 Ergodický náhodný signál $x[n]$ má délku $N = 100000$ vzorků a má diskrétní hodnoty od 0 do 99. Napište slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v jazyce C, Matlabu nebo Pythonu+Numpy, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost $\mathcal{P}(X_1, X_2, k)$, tedy pravděpodobnost, že vzorek $x[n] = X_1$ a vzorek $x[n+k] = X_2$. Pište např. pro $X_1 = 60$, $X_2 = 9$, $k = 11$.

viz A

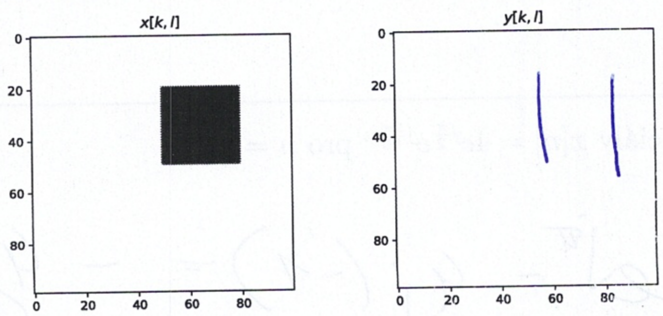
Příklad 9 Na obrázku je plot spektrální hustoty výkonu náhodného signálu. Určete, zda se jedná o bílý šum a své rozhodnutí krátce zdůvodněte.



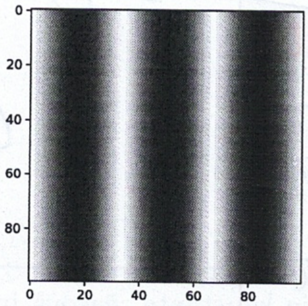
ne, viz A

Příklad 10 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutí hodnota). Pro úsporu toneru jsou pixely s hodnotou 0 bílé a s hodnotou 1 černé.

detektor svislých hran



Příklad 11 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (bílá) až 1 (černá). Určete, které koeficienty $X[m,n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: Všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0,0]$.



viz A

$X[0,0]$ a $X[0,3]$

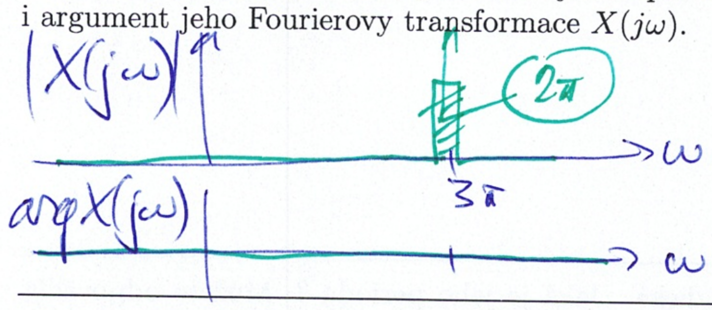
Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán jako sled obdélníkových impulsů o výšce $D = 2$, šířce $\vartheta = 0.5\,\mu s$ a periodě $T_1 = 1\,\mu s$. Napište hodnoty koeficientů jeho Fourierovy řady od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\text{sinc}\frac{\pi}{2} = 0.64$.

viz A

$$c_k = \frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{10^{-6}}}{1 \cdot \cancel{10^{-6}}} \text{sinc}\left(0{,}25 \cdot \cancel{10^{-6}} \frac{k\,2\pi}{1 \cdot \cancel{10^{-6}}}\right) = \text{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$

$c_{-2} =$ 0 , $c_{-1} =$ 0,64 , $c_0 =$ 1 , $c_1 =$ 0,64 , $c_2 =$ 0 .

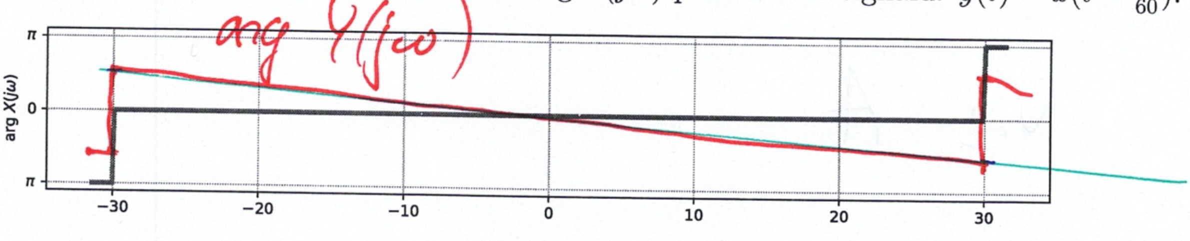
Příklad 13 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j3\pi t}$. Určete a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace $X(j\omega)$.



viz A

$X(j\omega)\, 2\pi\delta(\omega - 3\pi)$

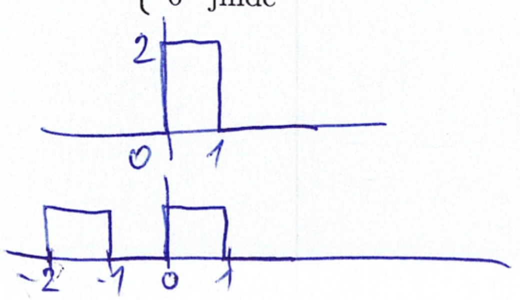
Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce $\arg Y(j\omega)$ posunutého signálu: $y(t) = x(t - \frac{\pi}{60})$.

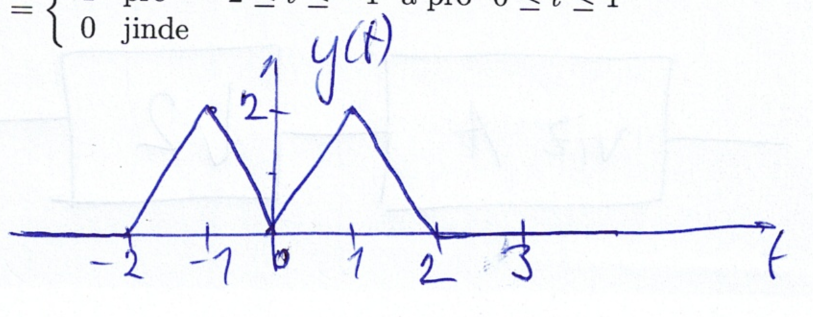


viz A

Příklad 15 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -2 \le t \le -1 \text{ a pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$





Příklad 16 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden pól: $p_1 = -1$ a dva nulové body: $n_1 = -4 + 1000j$, $\quad n_2 = -4 - 1000j$. Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

viz A/B

$$|H(j1000\pi)| = \frac{4 \cdot 2000}{1000} = 8$$

$$\arg H(j1000\pi) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

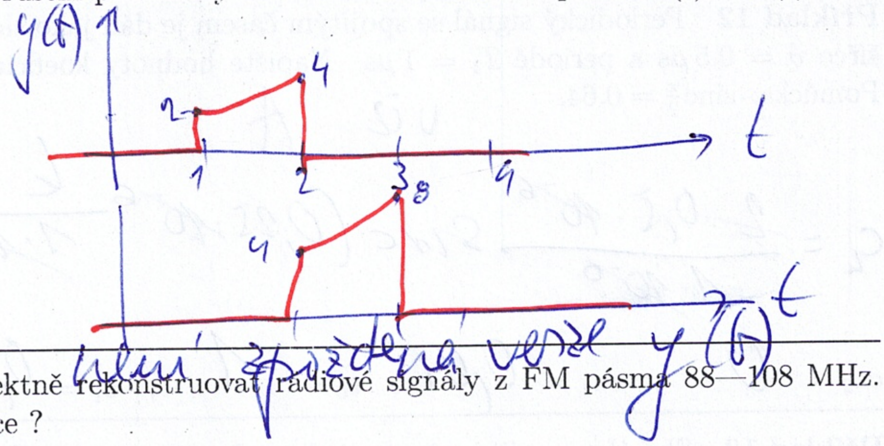
$H(j\omega_1) =$ $\underline{\underline{8}}$

$a=2$

Příklad 17 Rozhodněte, zda je systém popsaný rovnicí $y(t) = a^t\, x(t)$, kde a je konstanta, časově invariantní. Pokud není, uveďte příklad porušení podmínky časové invariantnosti: "pokud $x(t) \to y(t)$, pak $x(t-\tau) \to y(t-\tau)$".

výstupy viz A

není čas. in



Příklad 18 Chceme vzorkovat a perfektně rekonstruovat rádiové signály z FM pásma 88—108 MHz. Jaká bude minimální vzorkovací frekvence ?

216 MHz

Příklad 19 Spektrum vzorkovaného signálu je periodické. Jaká je jeho perioda ? Můžete odpovědět v libovolné frekvenci, ale napište jasně, která frekvence to je, jaká je hodnota periody, a jaká je jednotka.

viz A

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 16$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 8$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma korektního postupu. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje a jaká je jeho frekvenční charakteristika.