Semestrální zkouška ISS/VSG, řádný termín, 17.1.2022, skupina A REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

c_0 c_{1}, c_{-1}

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 4 + 3\cos(1000\pi t + \frac{\pi}{3})$.
Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: nenulové koeficienty FŘ jsou tři.

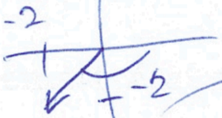
$c_0 = 4$

$c_1 = 1{,}5\, e^{j\frac{\pi}{3}}$

$c_{-1} = 1{,}5\, e^{-j\frac{\pi}{3}}$

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má základní kruhovou frekvenci $\omega_1 = 16000\pi$ rad/s a jediný nenulový koeficient FŘ: $c_1 = -2 - 2j$. Napište výraz pro odpovídající signál. Dobře zvažte, zda bude reálný nebo komplexní.

nemá c_{-1}, signál bude komplexní

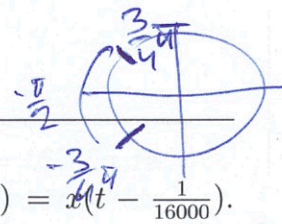


lze nechat i v původním tvaru $-2-2j$

$x(t) = \sqrt{8}\, e^{-j\frac{3}{4}\pi}\, e^{j16000\pi t}$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán jako součet dvou Diracových impulsů: $x(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t-1)$. Napište výraz pro jeho spektrální funkci.

$X(j\omega) = 2e^{-j\omega 0} + 2e^{-j\omega 1} = \underline{2 + 2e^{-j\omega}}$



Příklad 4 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 3e^{-j\frac{3\pi}{4}}$. Signál $y(t)$ je zpožděná verze $x(t)$: $y(t) = x(t - \frac{1}{16000})$. Napište hodnotu spektrální funkce signálu $y(t)$ na stejné kruhové frekvenci.

$x(t) \longrightarrow X(j\omega), \quad y = x(t-\tau) \longrightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$

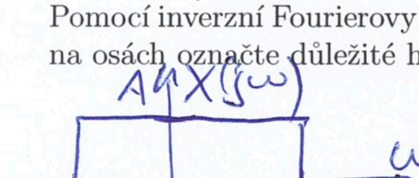
$Y(j\omega_1) = 3e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-j\,8000\pi \cdot \frac{1}{16000}} = 3e^{-j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{3e^{j\frac{3}{4}\pi}}$ nebo $3e^{-j\frac{5}{4}\pi}$

Příklad 5 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -200\pi \text{ rad/s} \le \omega \le +200\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy}\, dy = 2b \operatorname{sinc} bx$

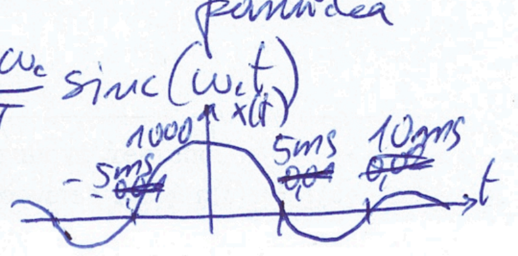
Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte odpovídající signál $x(t)$: zapište jej výrazem a **nakreslete**, na osách označte důležité hodnoty.



$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t}\, d\omega$ = Šebestova pomůcka =

$= \frac{A}{2\pi} 2\omega_c \operatorname{sinc}(\omega_c t) = \frac{A\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}(\omega_c t)$

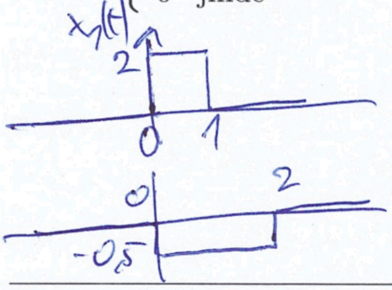
$x(t) = \frac{5 \cdot 200\pi}{\pi}\operatorname{sinc}(200\pi t) = \underline{1000 \operatorname{sinc}(200\pi t)}$

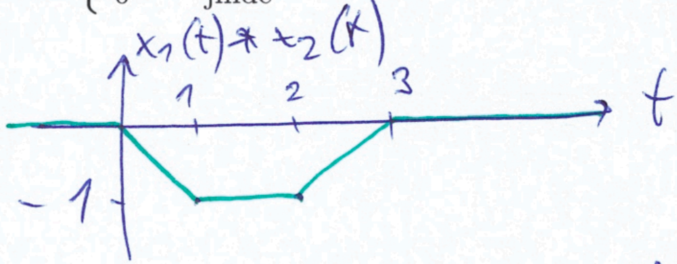


A

Příklad 6 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} -0.5 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$





Příklad 7 Systém se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t).$$ Určete přenosovou funkci systému.

$H(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)}$

→ Laplaceova transf

$X(s)s^2 + 0{,}5X(s)\cdot s + 0{,}4X(s) = Y(s)s^2 - 2Y(s)s + Y(s)$

$X(s)(s^2 + 0{,}5s + 0{,}4) = Y(s)(s^2 - 2s + 1)$

$H(s) = \dfrac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 - 2s + 1}$

Příklad 8 Systém se spojitým časem omezuje ("klipuje") vstupní signál:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } -1 \le x(t) \le 1 \\ -1 & \text{pro } x(t) < -1 \\ 1 & \text{pro } x(t) > 1 \end{cases}$$ Určete, zda je systém lineární. Vaše tvrzení zdůvodněte.

Podmínka linearity $x_1(t) \to y_1(t)$, $x_2(t) \to y_2(t)$

musí platit $a x_1(t) + b x_1(t) \to a y_1(t) + b y_2(t)$

Příklad pro $x_1(t) = 2$ a $x_2(t) = 3 \to y_1(t) = 1$, $y_2(t) = 1$

$a = 1$, $b = 1$ ... pro vstup $1\cdot 2 + 1\cdot 3$ má být výstup

$1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$! Výstup je $1 \neq 2 \Rightarrow$ nelineární

Příklad 9 Máte písničku nahranou se vzorkovací frekvencí $F_s = 48$ kHz. Senior se starým mobilem ji chce jako vyzvánění, mobil ale podporuje jen $F_s = 8$ kHz. Blokovým schématem nebo slovně uveďte, jak budete postupovat. Očekávám seriózní odpověď, ne "použiju Audacity...".

1) filtrování anti-alias filtrem s mezní frekvencí 4 kHz

2) podvzorkování (výběr každého 6. vzorku)

nebo viz také B

Příklad 10 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \frac{1}{32000}e^{j\frac{\pi}{4}}$ Signál je vzorkován na $F_s = 32$ kHz. Nedošlo k aliasingu. Uveďte, zda je možné určit spektrální funkci navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 72000\pi$ rad/s. Pokud ano, napište její hodnotu.

výsledná spek. funkce je periodická s $2\pi F_s$

a dělí se T (násobí F_s)

$8000\pi + 2\pi\, 32000 = 72000\pi = 8000\pi + 1$ perioda kruhové vzork. frekv.

$X_s(j72000\pi) = \cancel{32000} \cdot \dfrac{1}{\cancel{32000}} \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} = \underline{e^{j\frac{\pi}{4}}}$

A

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků, jeho hodnoty jsou v tabulce. Napište hodnoty signálu získaného pomocí $y[n] = R_8[n]\, x[\mathrm{mod}_8(n-4)]$, kde $R_8[n]$ je okénková funkce a mod_8 je funkce modulo. **Pojmenujte** operaci, kterou jste provedli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	1	-3	2	5	9	-5	-7	1
$y[n]$	9	-5	-7	1	1	-3	2	5

kruhové zpoždění
nebo
kruhové posunutí

Příklad 12 Napište, jaké je rozlišení Fourierovy transformace s diskrétním časem DTFT (teoretické, ne při numercikém výpočtu) na ose normovaných kruhových frekvencí. Pomůcka: Neptám se na DFT.

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

Nekonečné rozlišení, ω je reálné číslo.

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný a má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad hodnotu DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 + 4j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{15\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

symetrie DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = \tilde{X}^*(e^{j(2\pi-\omega_1)})$

$$\frac{15\pi}{8} = 2\pi - \frac{\pi}{8}$$

komplexní sdružení.

$\tilde{X}(e^{j\frac{15\pi}{8}}) =$ $4 - 4j$

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \ldots x[7]$ jsou -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0. Vypočtěte první koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$q = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$X[1] = \sum x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}1n} = \sum x[n]\, e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$e^{-j\frac{\pi}{4}n}$	1	$q-jq$	$-j$	$-q-jq$	-1	$-q+jq$	j	$q+jq$

$X[1] =$ $-1 - j + 1 + j = \underline{\underline{0}}$

Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 128$ vzorků je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{128}k\,3}$ Popište matematicky nebo slovně, jaký je vztah mezi signály $x[n]$ a $y[n]$. Pomůcka: u DFT se **vše** děje v bufferu $0 \ldots N-1$, nikde jinde.

signál $y[n]$ je kruhově zpožděný $x[n]$ o 3 vzorky

$$y[n] = R_{128}[n]\, x[\mathrm{mod}_{128}(n-3)]$$

→ Z transformace

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

Příklad 16 Číslicový filtr je dán diferenční rovnicí
$y[n] = x[n] - 0.2x[n-1] + 0.2x[n-2] + 0.1y[n-1] - 0.1y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

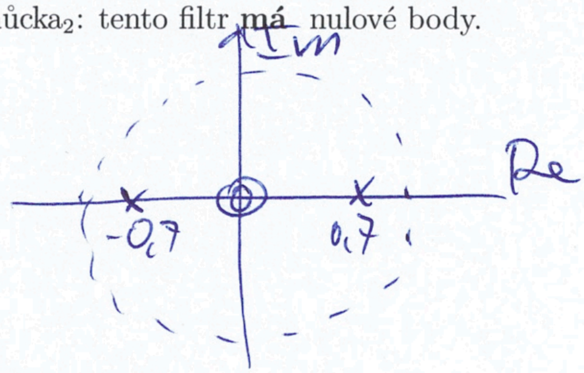
$Y(z) = X(z) - 0{,}2X(z)z^{-1} + 0{,}2X(z)z^{-2} + 0{,}1Y(z)z^{-1} - 0{,}1Y(z)z^{-2}$

$Y(z)[1 - 0{,}1z^{-1} + 0{,}1z^{-2}] = X(z)[1 - 0{,}2z^{-1} + 0{,}2z^{-2}]$

$$H(z) = \frac{1 - 0{,}2z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}{1 - 0{,}1z^{-1} + 0{,}1z^{-2}}$$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1-0.49z^{-2}}$.
Určete jeho nulové body a póly, zapište je a nakreslete do komplexní roviny "z". Pomůcka$_1$: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Pomůcka$_2$: tento filtr **má** nulové body.

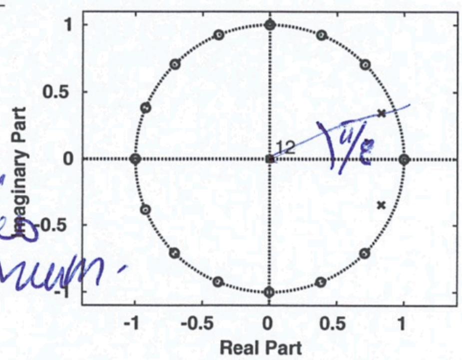
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 0{,}49} = \frac{(z-0)(z-0)}{(z-0{,}7)(z+0{,}7)}$$



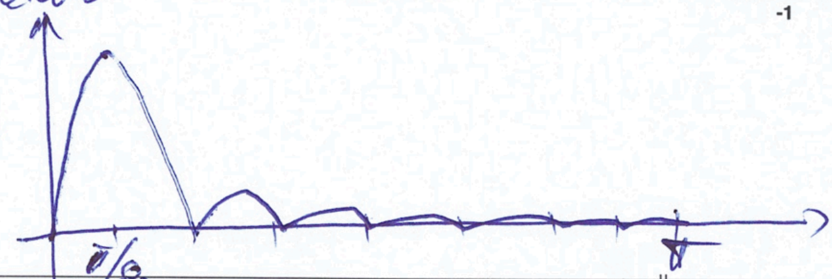
nul body: dvojitý v 0

póly: 0,7, −0,7

Příklad 18 Na obrázku jsou nulové body a póly číslicového filtru (v počátku je 12 pólů). Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky $H(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do π rad.



Nul. body na 1. kruž. kružnici znamenají "kill", pól blízko jednotk. kružnice znamená maximum.



Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte je na odhad sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	~~1000~~ 0,0025	~~1000~~ 0,0025	0
[-10, 0]	0	~~1000~~ 0,0025	~~1000~~ 0,0025	0
[-20, -10]	0	0	0	0

$p(x_1, x_2, n_1, n_2)$

normalizace 1: počtem realizací

normalizace 2: plochou 2D intervalu

$$\frac{1000}{4000 \cdot 10 \cdot 10} = 0{,}0025$$

Příklad 20 Korelační koeficienty stacionárního náhodného signálu jsou
$R[0] = 10$, $R[1] = 5$, $R[-1] = 5$. Ostatní jsou nulové. Určete, zda je tento signál **bílý šum**, svě tvrzení zdůvodněte.

Bílý šum má pouze R[0] nenulový, ostatní jsou nulové → není bílý šum.

Semestrální zkouška ISS/VSG, řádný termín, 17.1.2022, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....

(čitelně!)

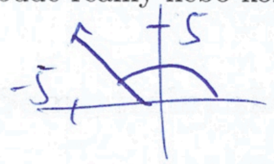
Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 3 + 2\cos(1000\pi t - \frac{\pi}{3})$.
Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: nenulové koeficienty FŘ jsou tři.

$c_0 = 3$

$c_1 = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}$

$c_{-1} = 1 \cdot e^{+j\frac{\pi}{3}}$

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má základní kruhovou frekvenci $\omega_1 = 16000\pi$ rad/s a jediný nenulový koeficient FŘ: $c_1 = -5 + 5j$. Napište výraz pro odpovídající signál. Dobře zvažte, zda bude reálný nebo komplexní.



viz A

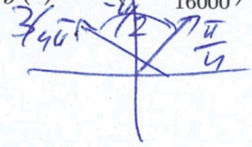
$x(t) = \sqrt{50} \cdot e^{j\frac{3}{4}\pi} e^{j16000\pi t}$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán jako součet dvou Diracových impulsů:
$x(t) = 2\delta(t) + \delta(t-1)$. Napište výraz pro jeho spektrální funkci.

viz A

$X(j\omega) = \underline{2 + e^{-j\omega}}$

Příklad 4 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 3e^{j\frac{3\pi}{4}}$. Signál $y(t)$ je zpožděná verze $x(t)$: $y(t) = x(t - \frac{1}{16000})$. Napište hodnotu spektrální funkce signálu $y(t)$ na stejné kruhové frekvenci.



viz A

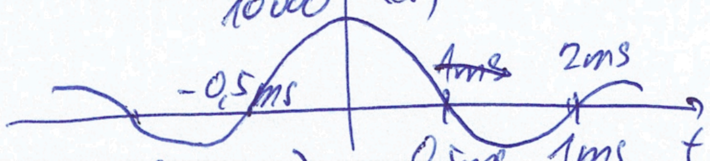
$Y(j\omega_1) = 3e^{j\frac{3\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{3e^{j\frac{\pi}{4}}}$

Příklad 5 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } -2000\pi \text{ rad/s} \leq \omega \leq +2000\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

viz A

Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte odpovídající signál $x(t)$: zapište jej výrazem a **nakreslete**, na osách označte důležité hodnoty.



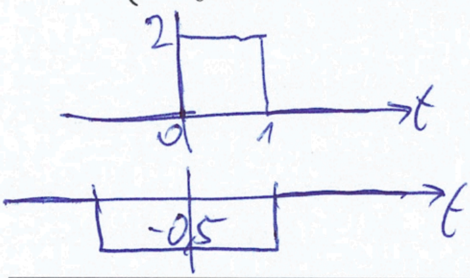
$x(t) = \frac{5 \cdot 2000\pi}{\pi} \text{sinc}(2000\pi t) = 10000 \,\text{sinc}(2000\pi t)$

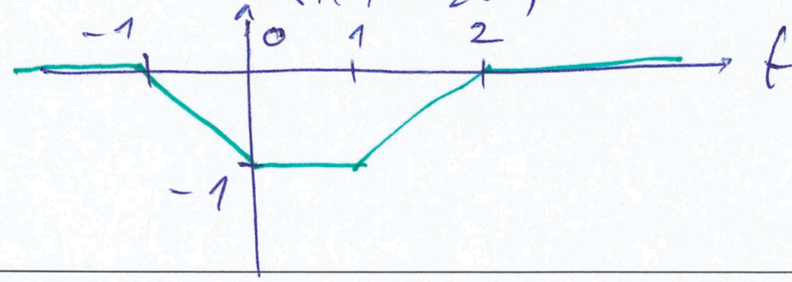
B

Příklad 6 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} -0.5 & \text{pro } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$x_1(t) * x_2(t)$





Příklad 7 Systém se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$. Určete přenosovou funkci systému.

viz A

$H(s) = \dfrac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 - 2s + 1}$

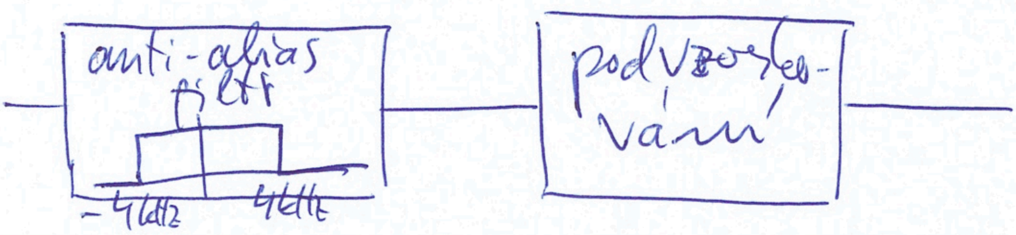
Příklad 8 Systém se spojitým časem omezuje ("klipuje") vstupní signál:

$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } -1 \le x(t) \le 1 \\ -1 & \text{pro } x(t) < -1 \\ 1 & \text{pro } x(t) > 1 \end{cases}$ Určete, zda je systém lineární. Vaše tvrzení zdůvodněte.

viz A

Příklad 9 Máte písničku nahranou se vzorkovací frekvencí $F_s = 48$ kHz. Senior se starým mobilem ji chce jako vyzvánění, mobil ale podporuje jen $F_s = 8$ kHz. Blokovým schématem nebo slovně uveďte, jak budete postupovat. Očekávám seriózní odpověď, ne "použiju Audacity…".

nebo viz A



Příklad 10 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \frac{1}{32000}e^{-j\frac{\pi}{4}}$ Signál je vzorkován na $F_s = 32$ kHz. Nedošlo k aliasingu. Uveďte, zda je možné určit spektrální funkci navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 72000\pi$ rad/s. Pokud ano, napište její hodnotu.

viz A

$X_s(j72000\pi) = e^{-j\frac{\pi}{4}}$

B

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků, jeho hodnoty jsou v tabulce. Napište hodnoty signálu získaného pomocí $y[n] = R_8[n]\, x[\mathrm{mod}_8(n-3)]$, kde $R_8[n]$ je okénková funkce a mod_8 je funkce modulo. **Pojmenujte** operaci, kterou jste provedli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	1	-3	2	5	9	-5	-7	1
$y[n]$	-5	-7	1	1	-3	2	5	9

kruhové zpoždění nebo kruhové posunutí

Příklad 12 Napište, jaké je rozlišení Fourierovy transformace s diskrétním časem DTFT (teoretické, ne při numercikém výpočtu) na ose normovaných kruhových frekvencí. Pomůcka: Neptám se na DFT.

viz A

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný a má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad hodnotu DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 5 - 2j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{15\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\frac{15\pi}{8}}) =$ $5 + 2j$

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \ldots x[7]$ jsou 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1. Vypočtěte první koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$x[n]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$e^{-j\frac{\pi}{4}n}$	1	9-j9	-j	-9-j9	-1	-9+j9	j	9+j9

$X[1] =$ ... všechno se vyruší... = $\underline{0}$

Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 128$ vzorků je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{128}k\,7}$ Popište matematicky nebo slovně, jaký je vztah mezi signály $x[n]$ a $y[n]$. Pomůcka: u DFT se **vše** děje v bufferu $0 \ldots N-1$, nikde jinde.

viz A

... o 7 vzorků

... $(n-7)$

Příklad 16 Číslicový filtr je dán diferenční rovnicí
$y[n] = x[n] - 0.1x[n-1] + 0.2x[n-2] + 0.1y[n-1] + 0.1y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

viz A

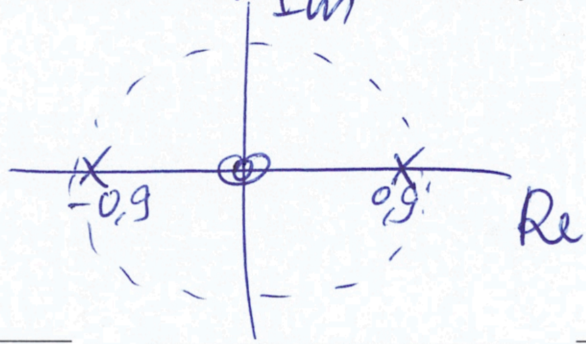
$$H(z) = \frac{1 - 0{,}1z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}{1 - 0{,}1z^{-1} - 0{,}1z^{-2}}$$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1-0.81z^{-2}}$. Určete jeho nulové body a póly, zapište je a nakreslete do komplexní roviny "z". Pomůcka$_1$: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Pomůcka$_2$: tento filtr **má** nulové body.

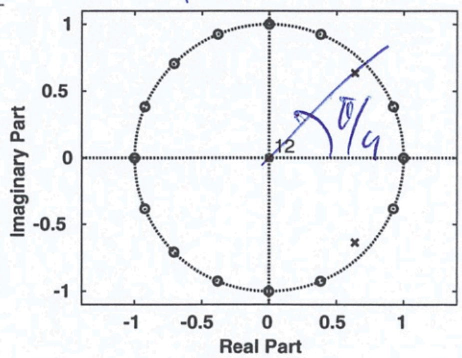
viz A

nul. body: dvojitý v 0

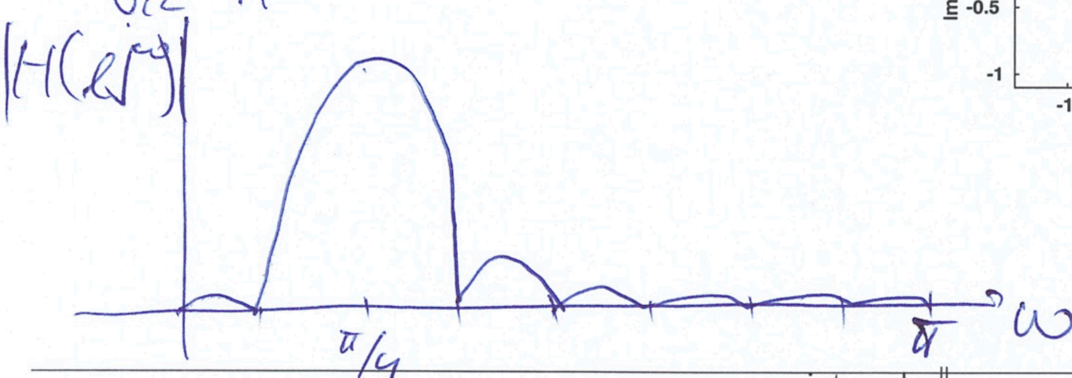
póly: 0,9 , -0,9



Příklad 18 Na obrázku jsou nulové body a póly číslicového filtru (v počátku je 12 pólů). Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky $H(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do π rad.



viz A



Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte je na odhad sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty stacionárního náhodného signálu jsou
$R[0] = 10, \quad R[1] = -5, \quad R[-1] = -5$. Ostatní jsou nulové. Určete, zda je tento signál **bílý šum**, své tvrzení zdůvodněte.

viz A

Semestrální zkouška ISS/VSG, řádný termín, 17.1.2022, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

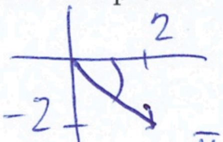
Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 1 + 2\cos(1000\pi t + \frac{\pi}{4})$.
Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: nenulové koeficienty FŘ jsou tři.

$c_0 = 1$

$c_1 = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

$c_{-1} = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má základní kruhovou frekvenci $\omega_1 = 16000\pi$ rad/s a jediný nenulový koeficient FŘ: $c_1 = 2 - 2j$. Napište výraz pro odpovídající signál. Dobře zvažte, zda bude reálný nebo komplexní.



viz A

$x(t) = \sqrt{8}\, e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j16000\pi t}$

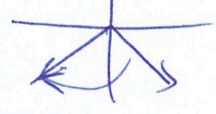
Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán jako součet dvou Diracových impulsů:
$x(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t+1)$. Napište výraz pro jeho spektrální funkci.

viz A

$X(j\omega) = 2 + 2e^{+j\omega}$

Příklad 4 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Signál $y(t)$ je zpožděná verze $x(t)$: $y(t) = x(t - \frac{1}{16000})$. Napište hodnotu spektrální funkce signálu $y(t)$ na stejné kruhové frekvenci.

viz A



$Y(j\omega_1) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2e^{-j\frac{3}{4}\pi}$

Příklad 5 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

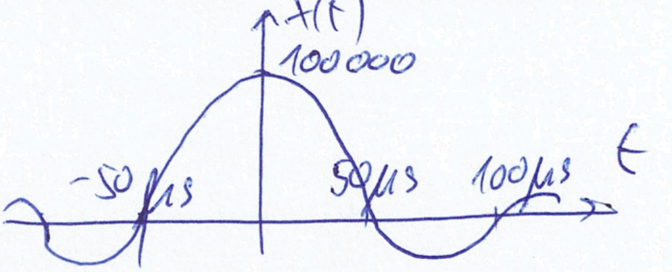
$$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } -20000\pi \text{ rad/s} \le \omega \le +20000\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte odpovídající signál $x(t)$: zapište jej výrazem a **nakreslete**, na osách označte důležité hodnoty.

$\frac{5 \cdot 20000\pi}{\pi} \operatorname{sinc}(20000\pi t)$

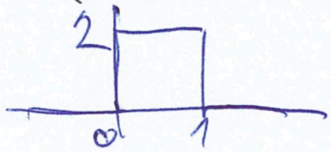
$x(t) = 100000 \operatorname{sinc}(20000\pi t)$

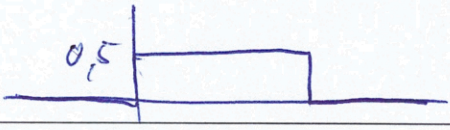


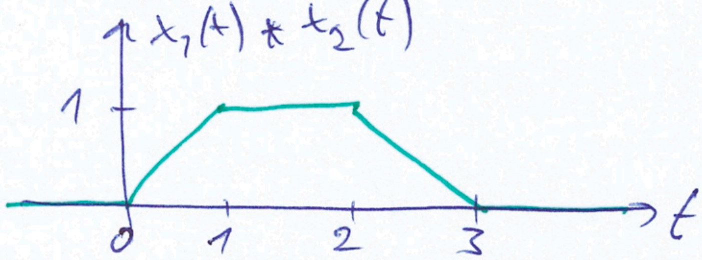
c

Příklad 6 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$







Příklad 7 Systém se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 1y(t)$. Určete přenosovou funkci systému.

viz A

$H(s) = \dfrac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 + 2s + 1}$

Příklad 8 Systém se spojitým časem omezuje ("klipuje") vstupní signál:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } -1 \le x(t) \le 1 \\ -1 & \text{pro } x(t) < -1 \\ 1 & \text{pro } x(t) > 1 \end{cases}$$

Určete, zda je systém lineární. Vaše tvrzení zdůvodněte.

viz A

Příklad 9 Máte písničku nahranou se vzorkovací frekvencí $F_s = 48$ kHz. Senior se starým mobilem ji chce jako vyzvánění, mobil ale podporuje jen $F_s = 8$ kHz. Blokovým schématem nebo slovně uveďte, jak budete postupovat. Očekávám seriózní odpověď, ne "použiju Audacity…".

viz A nebo B

Příklad 10 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \frac{1}{32000}e^{j\frac{3\pi}{4}}$ Signál je vzorkován na $F_s = 32$ kHz. Nedošlo k aliasingu. Uveďte, zda je možné určit spektrální funkci navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 72000\pi$ rad/s. Pokud ano, napište její hodnotu.

viz A

$X_s(j72000\pi) = e^{j\frac{3\pi}{4}}$

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků, jeho hodnoty jsou v tabulce. Napište hodnoty signálu získaného pomocí $y[n] = R_8[n]\, x[\text{mod}_8(n-2)]$, kde $R_8[n]$ je okénková funkce a mod_8 je funkce modulo. **Pojmenujte** operaci, kterou jste provedli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	1	-3	2	5	9	-5	-7	1
$y[n]$	-7	1	1	-3	2	5	9	-5

kruhové zpoždění
nebo
kruhové posunutí

Příklad 12 Napište, jaké je rozlišení Fourierovy transformace s diskrétním časem DTFT (teoretické, ne při numercikém výpočtu) na ose normovaných kruhových frekvencí. Pomůcka: Neptám se na DFT.

viz A

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný a má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad hodnotu DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 + 3j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{15\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\frac{15\pi}{8}}) =$ $4 - 3j$

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \dots x[7]$ jsou 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1. Vypočtěte první koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A a B

$X[1] =$ vše se vyruší ... $= \underline{\underline{0}}$

Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 128$ vzorků je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{128}k\,13}$ Popište matematicky nebo slovně, jaký je vztah mezi signály $x[n]$ a $y[n]$. Pomůcka: u DFT se **vše** děje v bufferu $0 \dots N-1$, nikde jinde.

viz A

... o 13 vzorků

... $(n - 13)$

Příklad 16 Číslicový filtr je dán diferenční rovnicí viz A
$y[n] = x[n] + 0.2x[n-1] + 0.2x[n-2] + 0.1y[n-1] + 0.1y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

$$H(z) = \frac{1 + 0{,}2z^{-1} + 0{,}2z^{-2}}{1 - 0{,}1z^{-1} - 0{,}1z^{-2}}$$

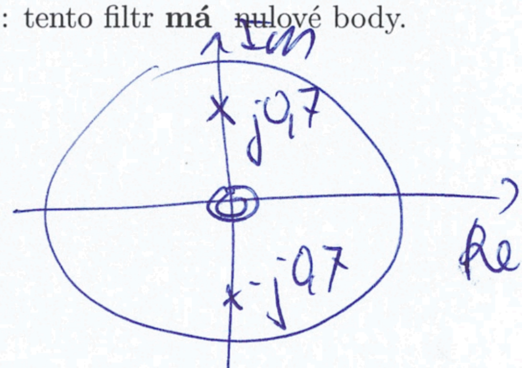
Příklad 17 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+0.49z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2+0{,}49}$ $(z-0)(z-0)$. Určete jeho nulové body a póly, zapište je a nakreslete do komplexní roviny "z". Pomůcka$_1$: řešení kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Pomůcka$_2$: tento filtr **má** nulové body.

$z^2 + 0{,}49 = 0$

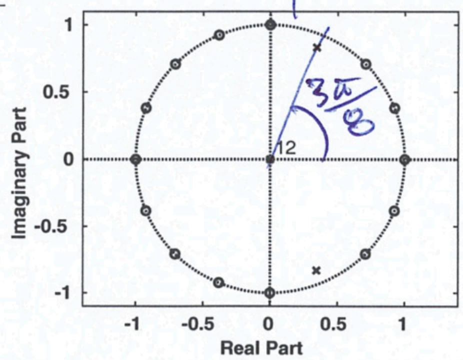
$z_{1/2} = \frac{\pm\sqrt{-4\cdot 0{,}49}}{2} = \pm\sqrt{0{,}49} = \pm j0{,}7$

nul. body: dvojitý v 0

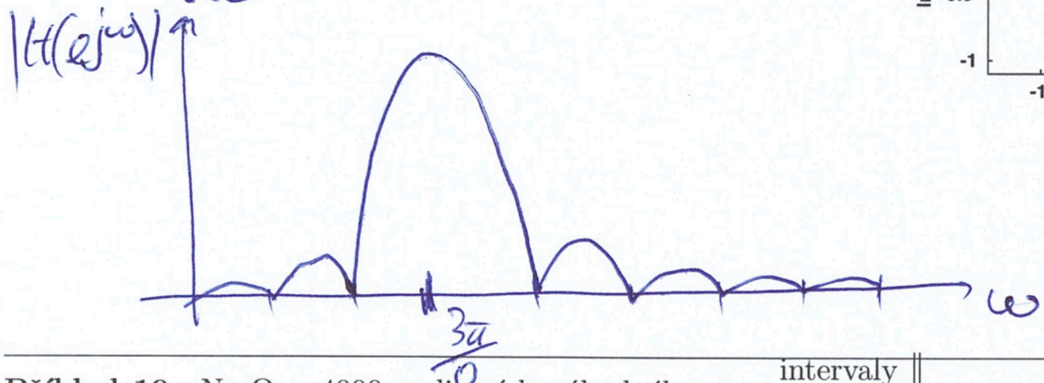
póly: $j0{,}7$, $-j0{,}7$



Příklad 18 Na obrázku jsou nulové body a póly číslicového filtru (v počátku je 12 pólů). Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky $H(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do π rad.



viz A



Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte je na odhad sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty stacionárního náhodného signálu jsou
$R[0] = 11$, $R[1] = 5$, $R[-1] = 5$. Ostatní jsou nulové. Určete, zda je tento signál **bílý šum**, své tvrzení zdůvodněte.

viz A

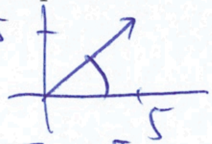
Semestrální zkouška ISS/VSG, řádný termín, 17.1.2022, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 5 + 7\cos(1000\pi t - \frac{\pi}{4})$.
Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: nenulové koeficienty FŘ jsou tři.

$c_0 = 5$
$c_1 = 3{,}5\, e^{-j\frac{\pi}{4}}$
$c_{-1} = 3{,}5\, e^{+j\frac{\pi}{4}}$

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má základní kruhovou frekvenci $\omega_1 = 16000\pi$ rad/s a jediný nenulový koeficient FŘ: $c_1 = 5 + 5j$. Napište výraz pro odpovídající signál. Dobře zvažte, zda bude reálný nebo komplexní.



$x(t) =$ $\sqrt{50}\, e^{j\frac{\pi}{4}}\, e^{j16000\pi t}$

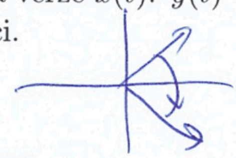
Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán jako součet dvou Diracových impulsů:
$x(t) = \delta(t) + \delta(t+1)$. Napište výraz pro jeho spektrální funkci.

viz A

$X(j\omega) =$ $1 + e^{+j\omega}$

Příklad 4 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$. Signál $y(t)$ je zpožděná verze $x(t)$: $y(t) = x(t - \frac{1}{16000})$. Napište hodnotu spektrální funkce signálu $y(t)$ na stejné kruhové frekvenci.

viz A



$Y(j\omega_1) =$ $3e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$

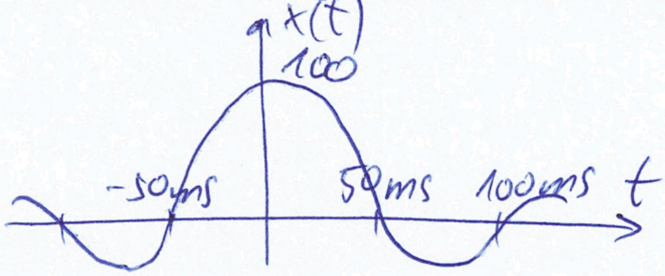
Příklad 5 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -20\pi \text{ rad/s} \le \omega \le +20\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte odpovídající signál $x(t)$: zapište jej výrazem a **nakreslete**, na osách označte důležité hodnoty.

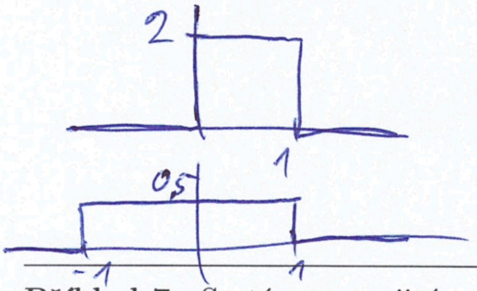
$\frac{5 \cdot 20\pi}{\pi} \operatorname{sinc}(20\pi t)$

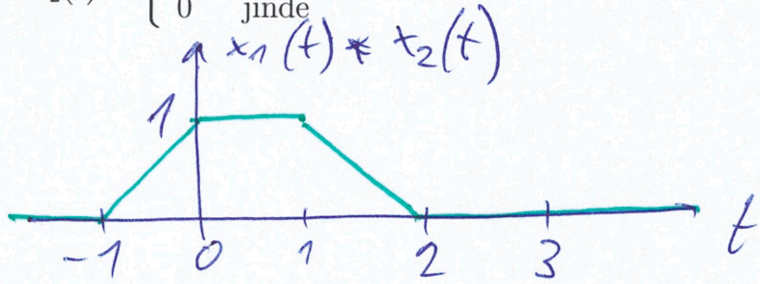


$x(t) =$ $100 \operatorname{sinc}(20\pi t)$

Příklad 6 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$





Příklad 7 Systém se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 1y(t)$. Určete přenosovou funkci systému.

Vit A

$$H(s) = \frac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 + 2s + 1}$$

Příklad 8 Systém se spojitým časem omezuje ("klipuje") vstupní signál:

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } -1 \le x(t) \le 1 \\ -1 & \text{pro } x(t) < -1 \\ 1 & \text{pro } x(t) > 1 \end{cases}$$

Určete, zda je systém lineární. Vaše tvrzení zdůvodněte.

Viz A

Příklad 9 Máte písničku nahranou se vzorkovací frekvencí $F_s = 48$ kHz. Senior se starým mobilem ji chce jako vyzvánění, mobil ale podporuje jen $F_s = 8$ kHz. Blokovým schématem nebo slovně uveďte, jak budete postupovat. Očekávám seriózní odpověď, ne "použiju Audacity…".

Viz A nebo B

Příklad 10 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \frac{1}{32000}e^{-j\frac{3\pi}{4}}$ Signál je vzorkován na $F_s = 32$ kHz. Nedošlo k aliasingu. Uveďte, zda je možné určit spektrální funkci navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 72000\pi$ rad/s. Pokud ano, napište její hodnotu.

Viz A

$X_s(j72000\pi) = e^{-j\frac{3\pi}{4}}$

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků, jeho hodnoty jsou v tabulce. Napište hodnoty signálu získaného pomocí $y[n] = R_8[n]\, x[\mathrm{mod}_8(n-1)]$, kde $R_8[n]$ je okénková funkce a mod_8 je funkce modulo. **Pojmenujte** operaci, kterou jste provedli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	1	-3	2	5	9	-5	-7	1
$y[n]$	1	1	-3	2	5	9	-5	-7

kruhové zpoždění
nebo
kruhové posunutí

Příklad 12 Napište, jaké je rozlišení Fourierovy transformace s diskrétním časem DTFT (teoretické, ne při numercikém výpočtu) na ose normovaných kruhových frekvencí. Pomůcka: Neptám se na DFT.

viz A

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný a má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad hodnotu DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 - 5j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{15\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\frac{15\pi}{8}}) =$ $4 + 5j$

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \ldots x[7]$ jsou 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0. Vypočtěte první koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A a B

$X[1] =$ vše se vyruší ... $= \underline{\underline{0}}$

Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 128$ vzorků je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k] e^{-j\frac{2\pi}{128}k\,18}$ Popište matematicky nebo slovně, jaký je vztah mezi signály $x[n]$ a $y[n]$. Pomůcka: u DFT se **vše** děje v bufferu $0 \ldots N-1$, nikde jinde.

viz A

... o 18 vzorků

... $(n - 18)$

Příklad 16 Číslicový filtr je dán diferenční rovnicí viz A
$y[n] = x[n] + 0.1x[n-1] + 0.2x[n-2] + 0.1y[n-1] - 0.1y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

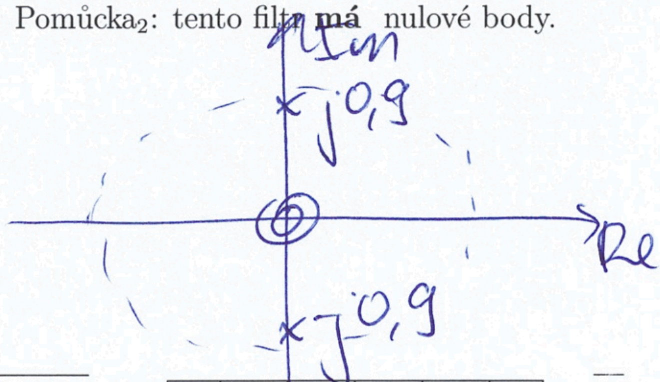
$$H(z) = \frac{1 + 0{,}1\,z^{-1} + 0{,}2\,z^{-2}}{1 - 0{,}1\,z^{-1} + 0{,}1\,z^{-2}}$$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+0.81z^{-2}}$.
Určete jeho nulové body a póly, zapište je a nakreslete do komplexní roviny "z". Pomůcka$_1$: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Pomůcka$_2$: tento filtr **má** nulové body.

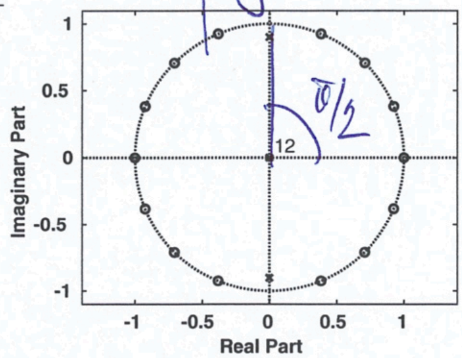
viz C

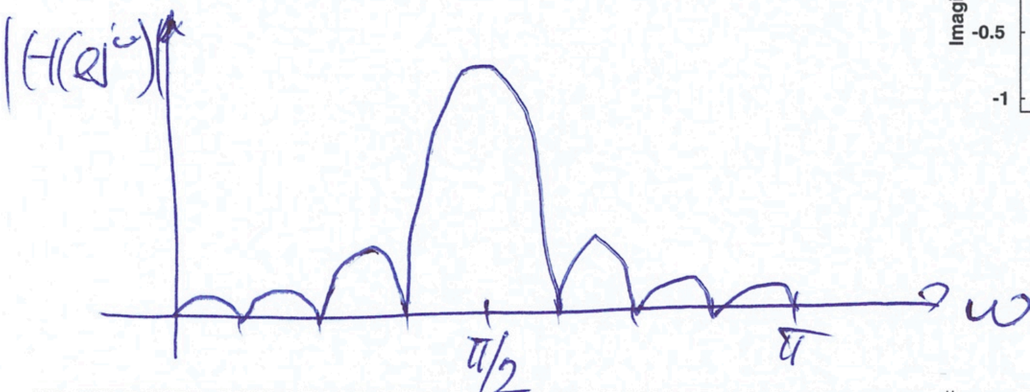
nul. body: dvojitý v 0

póly: $j0{,}9$, $-j0{,}9$



Příklad 18 Na obrázku jsou nulové body a póly číslicového filtru (v počátku je 12 pólů). Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky $H(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do π rad. viz A





Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte je na odhad sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty stacionárního náhodného signálu jsou
$R[0] = 10$, $R[1] = 6$, $R[-1] = 6$. Ostatní jsou nulové. Určete, zda je tento signál **bílý šum**, své tvrzení zdůvodněte.

viz A