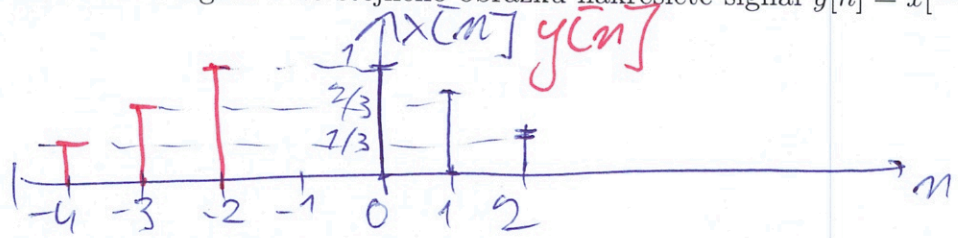
Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 21.1.2021, skupina odpoledne

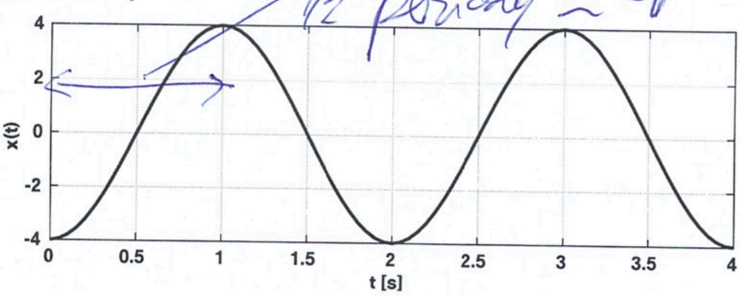
Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál s diskrétním časem je dán jako: $x[n] = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & \text{pro } 0 \le n \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y[n] = x[-n-2]$.



Příklad 2 Na obrázku je signál se spojitým časem - cosinusovka $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$. Určete její parametry.

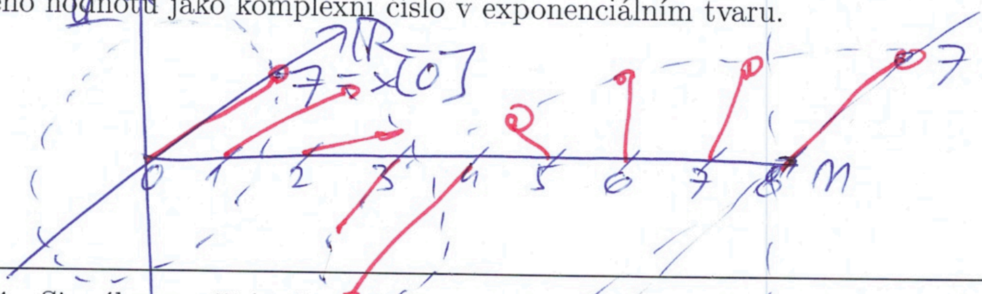
1/2 periody $\simeq \pi$



$T_1 = 2s \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \pi$ rad/s

$C_1 =$ ..4......., $\omega_1 =$ ..π rad/s......., $\phi_1 =$ ..$-\pi$ nebo $+\pi$ rad..

Příklad 3 Signál s diskrétním časem je komplexní exponenciála: $x[n] = 7e^{-j\frac{2\pi}{8}n}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte vzorek $x[0]$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.



perioda $N = 8$

Příklad 4 Signál se spojitým časem je periodický sled obdélníkových impulsů. Perioda $T_1 = 1$ ms a signál od $-\frac{T_1}{2}$ do $+\frac{T_1}{2}$ je dán: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -\frac{T_1}{4} \le t \le +\frac{T_1}{4} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Napište vztah pro hodnoty jeho koeficientů Fourierovy řady c_k a nakrelete jejich moduly i argumenty na správné kruhové frekvence pro $k = -8 \ldots 8$. **Na osách řádně vyznačte hodnoty.**

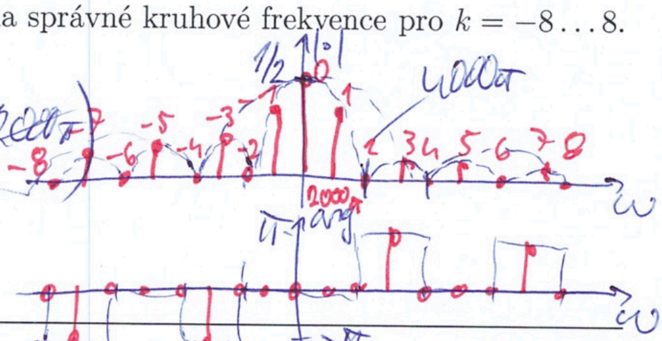
$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2000\pi$

$c_k = \frac{D\vartheta}{T_1} \operatorname{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2} k\omega_1\right) = 1 \cdot \frac{\frac{T_1}{2}}{T_1} \operatorname{sinc}(0{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot k \cdot 2000\pi)$

$= \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(k \frac{\pi}{2}\right)$

$0{,}25 \cdot 10^{-3}\, \omega = \pi$

$\omega = 4000\pi$

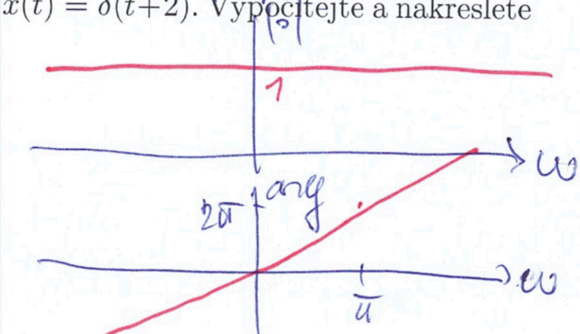


Příklad 5 Signál se spojitým časem je posunutý Diracův impuls: $x(t) = \delta(t+2)$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho spektrální funkce $X(j\omega)$.

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+2) e^{-j\omega(-2)} dt =$

Dirac nechá pouze hodnotu pro $t = -2$

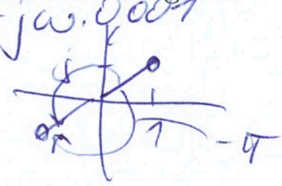
$= \underline{e^{j2\omega}}$



odpo

Příklad 6 Spektrální funkce signálu $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 1 + j$. Určete, jakou hodnotu bude mít na stejné kruhové frekvenci spektrální funkce signálu $y(t) = x(t - 0.001)$. $-\tau$

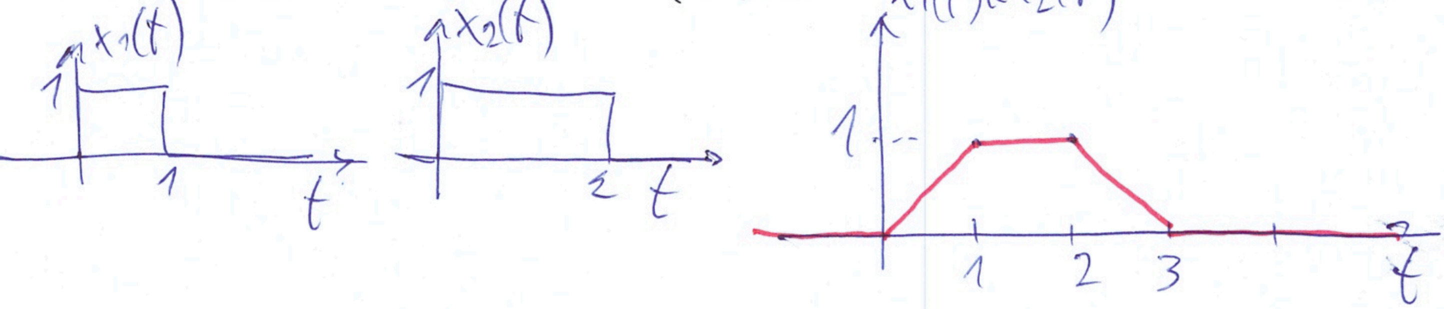
$$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau} = X(j\omega)e^{-j\omega\cdot 0{,}001}$$



$Y(j\omega_1) =$ $(1+j)e^{-j1000\pi\cdot 0{,}001} = (1+j)e^{-j\pi} = \underline{-1-j}$

Příklad 7 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



Příklad 8 Ideální zesilovač má modul frekvenční charakteristiky

$|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro } -40000\pi \le \omega \le 40000\pi \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$, její argument je $\arg H(j\omega) = -0.00001\omega$.

$20000\pi\cdot(-0{,}00001) = 0{,}2\pi$

Do zesilovače vstupuje cosinusovka $x(t) = 0.5\cos(20000\pi t)$. Napište vztah pro signál na výstupu.

$H(j20000\pi) = 100\cdot e^{-j0{,}2\pi}$

$y(t) =$ $50\cos(20000\pi t - 0{,}2\pi)$

Příklad 9 Systému se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:

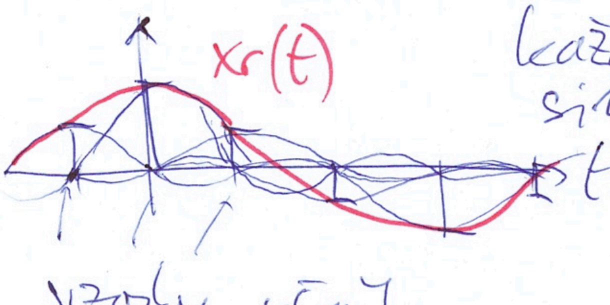
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$. Určete, zda je tento systém stabilní.

$$H(s) = \frac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 - 2s + 1}$$

→ faktorisace na $(s-1)(s-1)$, tedy póly jsou $p_1 = 1$, $p_2 = 1$

→ nestabilní

Příklad 10 Jak probíhá ideální rekonstrukce diskrétního signálu $x[n]$ na signál se spojitým časem $x_r(t)$ v časové oblasti ? Popište slovně, obrázkem a/nebo rovnicí.

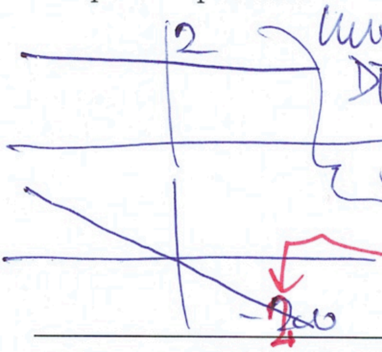


každý vzorek vynásobí kardinální sinus, který je nulový pro všechny ostatní vzorky, sincy jsou pak sečteny.

viz tabule

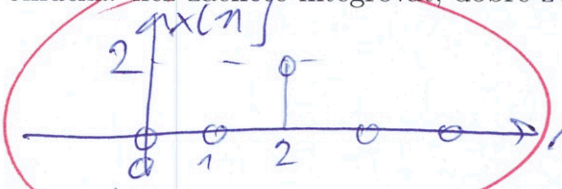
Příklad 11 Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) je dána jako $\tilde{X}(e^{j\omega}) = 2e^{-j2\omega}$. Napište nebo nakreslete odpovídající diskrétní signál $x[n]$. Pomůcka: než začnete integrovat, dobře zvažte, zda je to opravdu potřeba.

odpo



musí to být DTFT signálu jen s jediným nenulovým vzorkem.

zpoždění



Kontrola: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum x[n] e^{-j\omega n} =$
$= 2e^{-j\omega 2}$

Příklad 12 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 4$, vzorky $x[0] \ldots x[3]$ jsou 1, 1, 0, 0. Vypočtěte všechny koeficienty jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$x[n]$	1	1	0	0
$X[0]\ e^{-j\frac{2\pi}{4}0} = 1$	1	1	1	1
$1\ e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = e^{-j\pi/2}$	1	$-j$	-1	j
$2\ e^{-j\frac{2\pi}{4}2} = e^{-j\pi}$	1	-1	1	-1
$3\ e^{-j\frac{2\pi}{4}3} = e^{-j\frac{3}{2}\pi}$	1	j	-1	$-j$

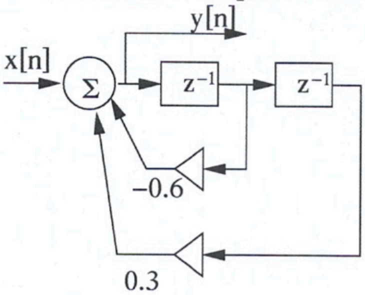
$X[0] =$ 2 $X[1] =$ $1-j$ $X[2] =$ 0 $X[3] =$ $1+j$

Příklad 13 Diskrétní signál o délce N vzorků $x_1[n]$ má diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) $X_1[k]$. Stejně dlouhý signál $x_2[n]$ má DFT $X_2[k]$. Napište, jak získat v časové oblasti signál $y[n]$, který má DFT danou násobením obou původních DFT koeficient po koeficientu: $Y[k] = X_1[k]X_2[k]$.

→ Kruhová konvoluce v čase

$y[n] =$ $x_1[n]\ (N)\ x_2[n]$ nebo můžete rozepsat jako $R_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k]\, y[\mathrm{mod}_N(n-k)]$

Příklad 14 Napište vztah pro frekvenční charakteristiku IIR filtru. Kreslit její průběh nemusíte.



$y[n] = x[n] - 0{,}6y[n-1] + 0{,}3y[n-2]$ $\mathcal{Z}$

$Y(z) = X(z) - 0{,}6Y(z)z^{-1} + 0{,}3Y(z)z^{-2}$

$Y(z)[1 + 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}] = X(z)$

$H(z) = \dfrac{1}{1 + 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}$

$z \rightarrow e^{j\omega}$

$H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 + 0{,}6e^{-j\omega} - 0{,}3e^{-j2\omega}}$

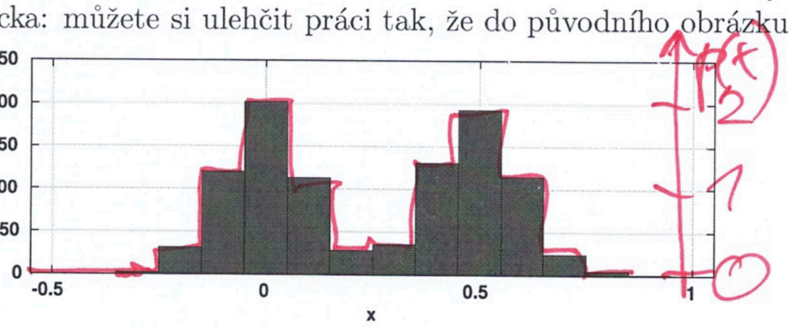
Příklad 15 Do číslicového filtru vstupuje cosinusovka $x[n] = 4\cos(0.1\pi n + 0.2\pi)$, na výstupu je cosinusovka $y[n] = 40\cos(0.1\pi n + 0.6\pi)$. Určete hodnoty frekvenční charakteristiky tohoto filtru na normovaných kruhových frekvencích $\omega_1 = 0.1\pi$ a $\omega_2 = -0.1\pi$.

frekvence "sedí": podíl amplitud je gain, rozdíl fází je argument! Na záporné frekvenci je totéž číslo, ale komplexně sdružené.

$H(e^{j\omega_1}) =$ $10e^{j0{,}4\pi}$ $H(e^{j\omega_2}) =$ $10e^{-j0{,}4\pi}$

odpo

Příklad 16 Máme k disposici $\Omega = 1000$ realizací náhodného signálu. Pro vzorek $n = 5$ byl naměřen následující histogram hodnot. Nakreslete odhad funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x, n)$. Pomůcka: můžete si ulehčit práci tak, že do původního obrázku nakreslíte novou osu y.



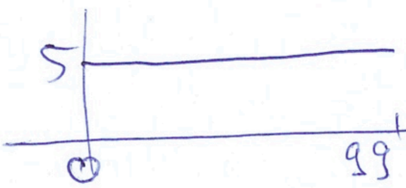
$$p(x) = \frac{\text{count}}{\Omega \cdot \text{šířka intervalu}} = \frac{\text{count}}{1000 \cdot 0.1} = \frac{\text{count}}{100}$$

Příklad 17 Pro zpřesnění odhadu spektrální hustoty výkonu náhodného signálu se používá Welchova metoda. Popište, jak funguje — slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v C/Matlab/Python s využitím jakýchkoliv funkcí.

signál se rozdělí na úseky, v každém se spočítá DFT, $\frac{1}{N}|X[k]|^2$ dá odhad spekt. hustoty výkonu, pak se tyto odhady přes všechny úseky zprůměrují

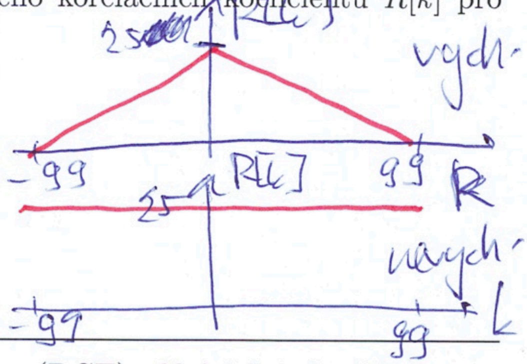
viz také B

Příklad 18 Náhodný signál o délce 100 vzorků je shodou okolností stejnosměrný: $x[n] = 5$ pro všechny vzorky. Nakreslete průběh vychýleného i nevychýleného odhadu jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro $k = -99 \ldots +99$.

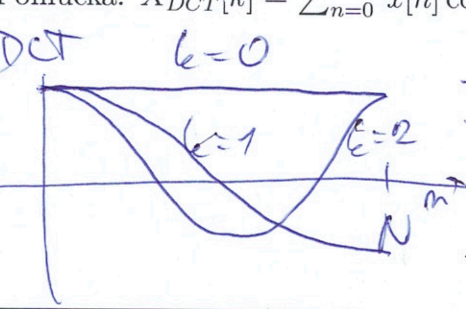


$$R[k] = \frac{1}{N}\sum x[n]x[k+n]$$

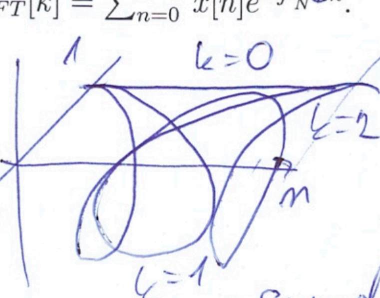
$$R[k] = \frac{1}{N-k}\sum x[n]x[k+n]$$



Příklad 19 Vysvětlete, jak se liší báze diskrétní cosinové transformace (DCT) od bází diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Zaměřte se pouze na 1D. Opsání bází nebude uznáno jako odpověď.
Pomůcka: $X_{DCT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left[\frac{\pi}{N}(n+\frac{1}{2})k\right]$, $X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.



- reálné
- "skáčou po polovině periody"
- mají divný začátek



- komplexní
- skáčou po celé periodě
- mají rozumný začátek
- symetrie k a N-k

Příklad 20 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro převod šedotónového obrázku (pixely $x[k, l]$ mají hodnoty 0 až 1) na černobílý (pixely mají hodnoty 0 nebo 1). Rozměry K řádků a L sloupců jsou zadány, vstupní obrázek je v poli x.

třeba takto v Pythonu:

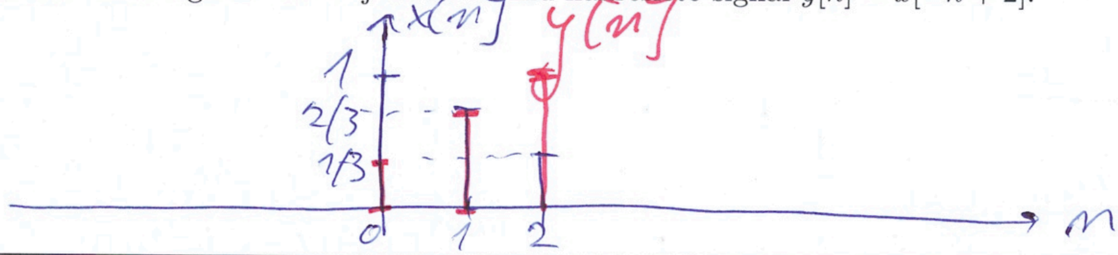
```
thr = 0.5 # nastavení prahu
y = (x > thr)
```

Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 21.1.2021, skupina večer

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

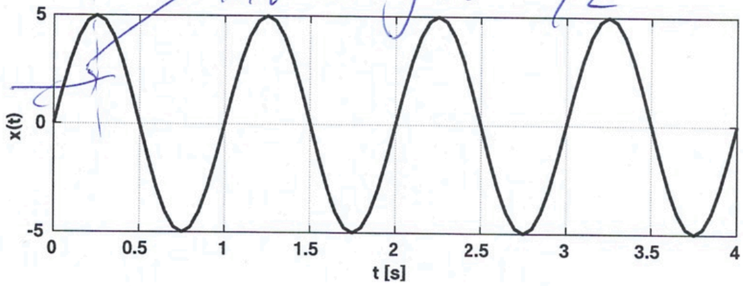
Příklad 1 Signál s diskrétním časem je dán jako: $x[n] = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & \text{pro } 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y[n] = x[-n+2]$.



Příklad 2 Na obrázku je signál se spojitým časem - cosinusovka $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$. Určete její parametry.

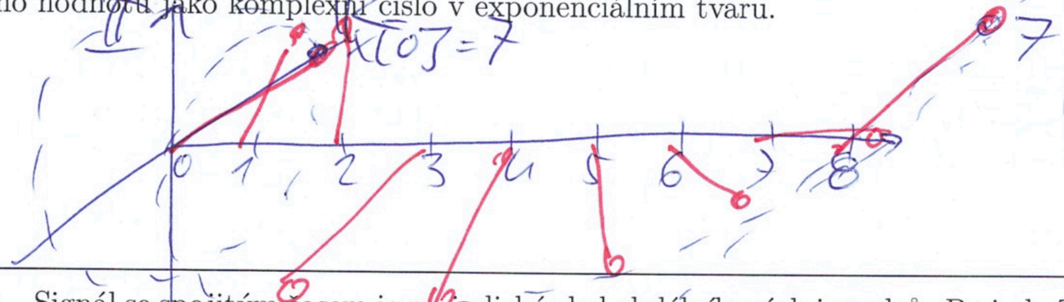
1/4 periody $\approx -\pi/2$



$T_1 = 1\,s \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi \text{ rad/s}$

$C_1 =$ ....5...., $\omega_1 =$ ....2π rad/s.... $\phi_1 =$ ....$-\pi/2$ rad....

Příklad 3 Signál s diskrétním časem je komplexní exponenciála: $x[n] = 7e^{+j\frac{2\pi}{8}n}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte vzorek $x[0]$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.



perioda $N = 8$

Příklad 4 Signál se spojitým časem je periodický sled obdélníkových impulsů. Perioda $T_1 = 1$ ms a signál od $-\frac{T_1}{2}$ do $+\frac{T_1}{2}$ je dán: $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -\frac{T_1}{8} \leq t \leq +\frac{T_1}{8} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Napište vztah pro hodnoty jeho koeficientů Fourierovy řady c_k a nakrelete jejich moduly i argumenty na správné kruhové frekvence pro $k = -8 \ldots 8$. **Na osách řádně vyznačte hodnoty.**

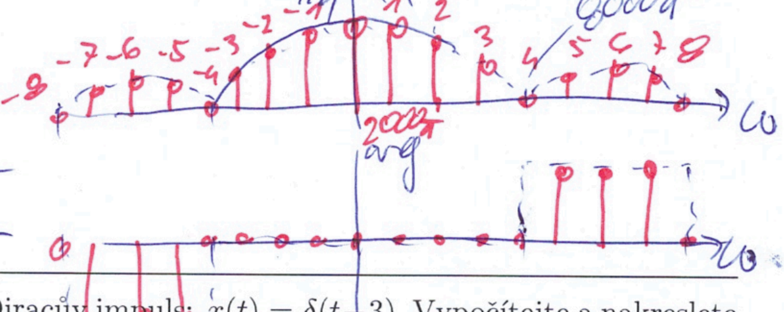
$\omega_1 = 2000\pi$ viz A

$c_k = 1 \cdot \frac{T_1/4}{T_1} \text{sinc}(0{,}125 \cdot 10^{-3} k\, 2000\pi) =$

$= \frac{1}{4} \text{sinc}\left(k\frac{\pi}{4}\right)$

$0{,}125 \cdot 10^{-3}\, \omega = \pi$

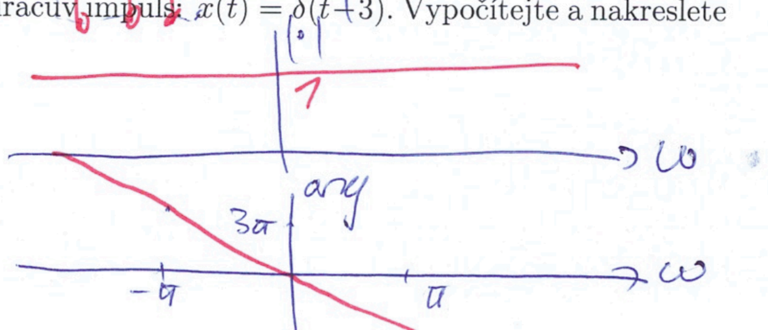
$\omega = 8000\pi$



Příklad 5 Signál se spojitým časem je posunutý Diracův impuls: $x(t) = \delta(t+3)$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho spektrální funkce $X(j\omega)$.

viz A

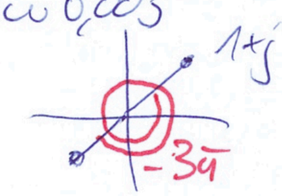
$X(j\omega) = \underline{e^{-j3\omega}}$



Věco

Příklad 6 Spektrální funkce signálu $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 1 + j$. Určete, jakou hodnotu bude mít na stejné kruhové frekvenci spektrální funkce signálu $y(t) = x(t - 0.003)$.

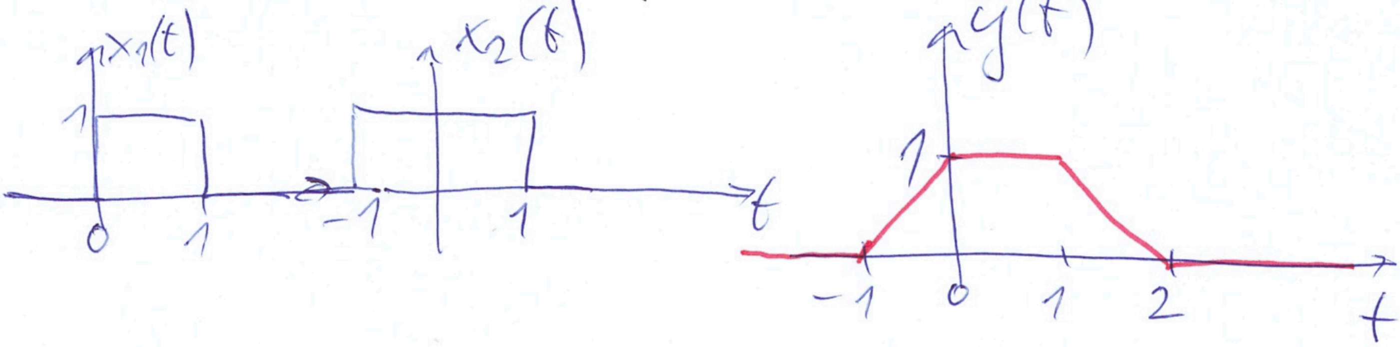
$$Y(j\omega) = X(j\omega)\, e^{-j\omega\tau} = X(j\omega)\, e^{-j\omega 0{,}003}$$



$Y(j\omega_1) = (1+j)\, e^{-j\,1000\pi \cdot 0{,}003} = (1+j)\, e^{-j3\pi} = -1-j$

Příklad 7 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



Příklad 8 Ideální zesilovač má modul frekvenční charakteristiky viz A

$|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro } -40000\pi \le \omega \le 40000\pi \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$, její argument je $\arg H(j\omega) = -0.00001\omega$.

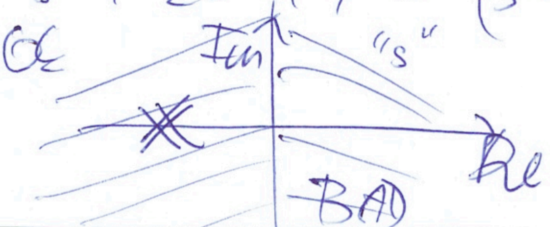
Do zesilovače vstupuje cosinusovka $x(t) = 0.5\cos(20000\pi t)$. Napište vztah pro signál na výstupu.

$y(t) = 50\cos(20000\pi t - 0{,}2\pi)$

Příklad 9 Systému se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$. Určete, zda je tento systém stabilní.

$$H(s) = \frac{s^2 + 0{,}5s + 0{,}4}{s^2 + 2s + 1}$$

faktorisace na $(s+1)(s+1) = (s-(-1))(s-(-1))$

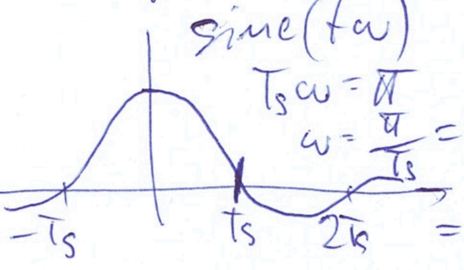


→ stabilní

Příklad 10 Jak probíhá ideální rekonstrukce diskrétního signálu $x[n]$ na signál se spojitým časem $x_r(t)$ v časové oblasti ? Popište slovně, obrázkem a/nebo rovnicí.

viz fakce A

sinc($t\omega$)



$T_s\omega = \pi$

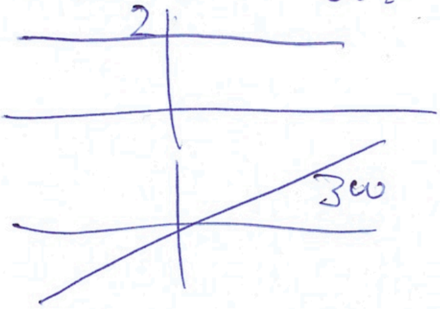
$\omega = \frac{\pi}{T_s} = \pi F_s = \frac{\Omega_s}{2}$

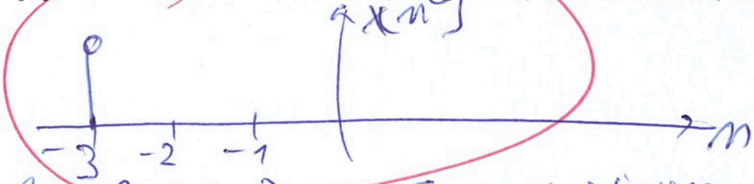
$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2}(t - nT_s)\right)$$

hodnota vzorku

posun sincu na správný vzorek

Příklad 11 Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) je dána jako $\tilde{X}(e^{j\omega}) = 2e^{+j3\omega}$. Napište nebo nakreslete odpovídající diskrétní signál $x[n]$. Pomůcka: než začnete integrovat, dobře zvažte, zda je to opravdu potřeba. viz A





kontrola: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum x[n] e^{-j\omega n} =$

$= 2e^{-j\omega(-3)} = \underline{2e^{j3\omega}}$

Příklad 12 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 4$, vzorky $x[0] \ldots x[3]$ jsou 0, 1, 0, 0. Vypočtěte všechny koeficienty jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$x[n]$	0	1	0	0
$X[0]$ $e^{-j\frac{2\pi}{4}0}$	1	1	1	1
1 $e^{-j\frac{2\pi}{4}1} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$	1	$-j$	-1	j
2 $e^{-j\frac{2\pi}{4}2} = e^{-j\pi}$	1	-1	1	-1
3 $e^{-j\frac{2\pi}{4}3} = e^{-j\frac{3\pi}{2}}$	1	j	-1	$-j$

$X[0] =$ 1 $X[1] =$ $-j$ $X[2] =$ -1 $X[3] =$ j

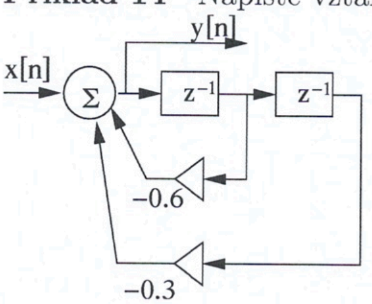
Příklad 13 Diskrétní signál o délce N vzorků $x_1[n]$ má diskrétní Fourierovu transformaci (DFT) $X_1[k]$. Stejně dlouhý signál $x_2[n]$ má DFT $X_2[k]$. Napište, jak získat v časové oblasti signál $y[n]$, který má DFT danou násobením obou původních DFT koeficient po koeficientu: $Y[k] = X_1[k]X_2[k]$.

viz A

$y[n] =$ ....

Příklad 14 Napište vztah pro frekvenční charakteristiku IIR filtru. Kreslit její průběh nemusíte.

odvození viz A



$H(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{1 + 0{,}6e^{-j\omega} + 0{,}3e^{-j2\omega}}$

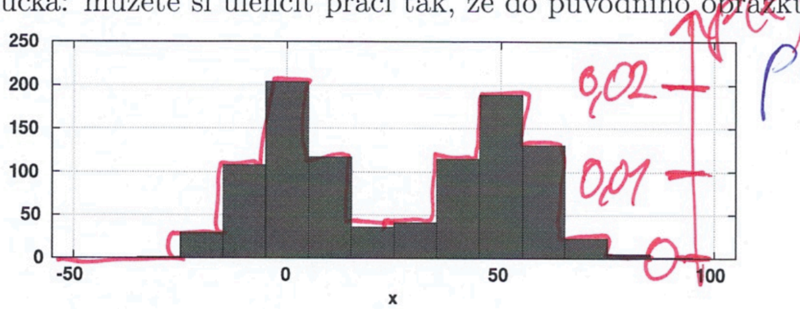
Příklad 15 Do číslicového filtru vstupuje cosinusovka $x[n] = 4\cos(0.1\pi n + 0.2\pi)$, na výstupu je cosinusovka $y[n] = 0.4\cos(0.1\pi n - 0.6\pi)$. Určete hodnoty frekvenční charakteristiky tohoto filtru na normovaných kruhových frekvencích $\omega_1 = 0.1\pi$ a $\omega_2 = -0.1\pi$.

viz A

$H(e^{j\omega_1}) =$ $0{,}1e^{-j0{,}8\pi}$ $H(e^{j\omega_2}) =$ $0{,}1e^{+j0{,}8\pi}$

večer

Příklad 16 Máme k disposici $\Omega = 1000$ realizací náhodného signálu. Pro vzorek $n = 5$ byl naměřen následující histogram hodnot. Nakreslete odhad funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x, n)$.
Pomůcka: můžete si ulehčit práci tak, že do původního obrázku nakreslíte novou osu y.



$p(x) = \frac{\text{count}}{\Omega \cdot \text{šířka intervalu}} = \frac{\text{count}}{1000 \cdot 10} = \frac{\text{count}}{10\,000}$

Příklad 17 Pro zpřesnění odhadu spektrální hustoty výkonu náhodného signálu se používá Welchova metoda. Popište, jak funguje — slovně, matematicky, pseudokódem nebo kódem v C/Matlab/Python s využitím jakýchkoliv funkcí.

úseky délky N

viz také A

DFT dtto dtto dtto dtto ...

$\underbrace{PSD = \frac{1}{N}|X[k]|^2 \quad \text{dtto} \quad \text{dtto} \quad \text{dtto} \quad \text{dtto}}_{\text{průměrování} \to \text{finální odhad}}$

Příklad 18 Náhodný signál o délce 100 vzorků je shodou okolností stejnosměrný: $x[n] = 50$ pro všechny vzorky. Nakreslete průběh vychýleného i nevychýleného odhadu jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro $k = -99 \ldots +99$.

viz A

Příklad 19 Vysvětlete, jak se liší báze diskrétní cosinové transformace (DCT) od bází diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Zaměřte se pouze na 1D. Opsání bází nebude uznáno jako odpověď.
Pomůcka: $X_{DCT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left[\frac{\pi}{N}(n + \frac{1}{2})k\right]$, $\quad X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

viz A

Příklad 20 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro převod šedotónového obrázku (pixely $x[k, l]$ mají hodnoty 0 až 1) na černobílý (pixely mají hodnoty 0 nebo 1). Rozměry `K` řádků a `L` sloupců jsou zadány, vstupní obrázek je v poli `x`.

viz A