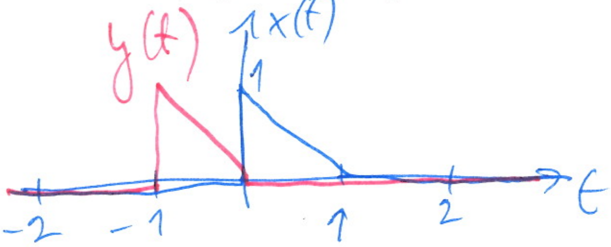
Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 2.1.2020, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1-t & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(t+1)$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = 14 + 16\cos(400\pi t - 0.3\pi)$.
Určete hodnotu nultého koeficientu jeho Fourierovy řady (FŘ).

→ hodnota stejnosměrné složky

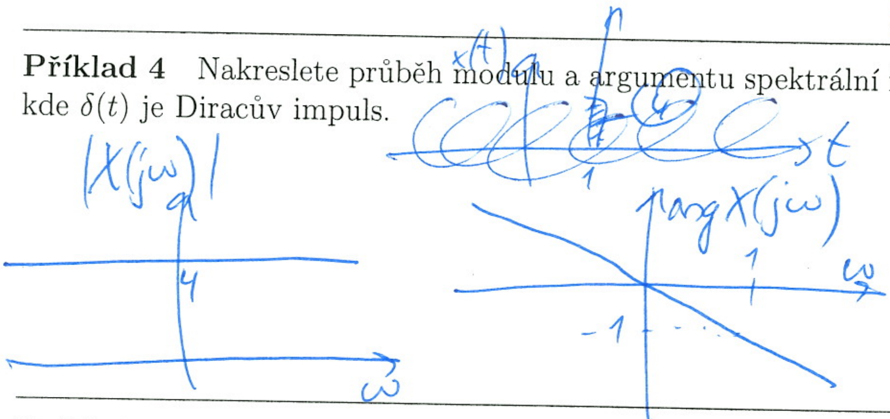
$c_0 =$ ...14...

Příklad 3 Ukažte na zvoleném periodickém **komplexním** signálu se spojitým časem $x(t)$, že pro jeho koeficienty Fourierovy řady (FŘ) **neplatí** symetrie platná pro reálné signály: $c_k = c^\star_{-k}$

Např. komplexní exponenciála $x(t) = e^{j\omega_1 t}$
má jen $c_1 = 1$, $c_{-1} = 0$,
neplatí, že $c_{-1} = c_1^*$!

jiná možnost viz B.
nebo i další...

Příklad 4 Nakreslete průběh modulu a argumentu spektrální funkce $X(j\omega)$ pro signál: $x(t) = 4\,\delta(t-1)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.

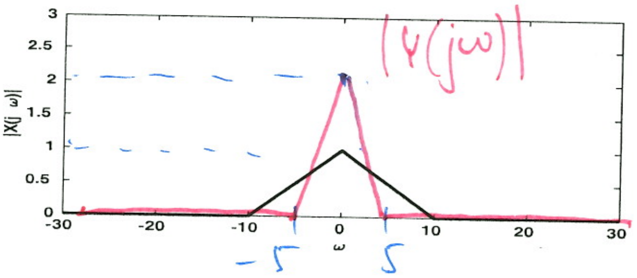


$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\,dt = 4 \cdot e^{-j\omega 1}$

$|X(j\omega)| = 4$

$\arg X(j\omega) = -\omega$

Příklad 5 Na obrázku je modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku modul spektrální funkce $|Y(j\omega)|$ zpomaleného signálu $y(t) = x(\frac{t}{2})$



$m = \frac{1}{2}$

$y(t) = x(mt)$

$Y(j\omega) = \frac{1}{m} \cdot X\left(\frac{j\omega}{m}\right) =$

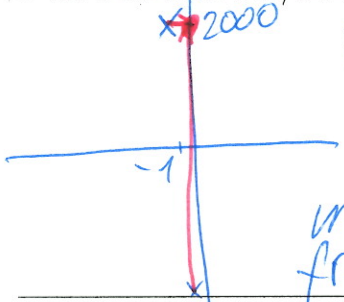
$= 2 \cdot X(2j\omega)$

2× „rychlejší" a 2× větší.

A

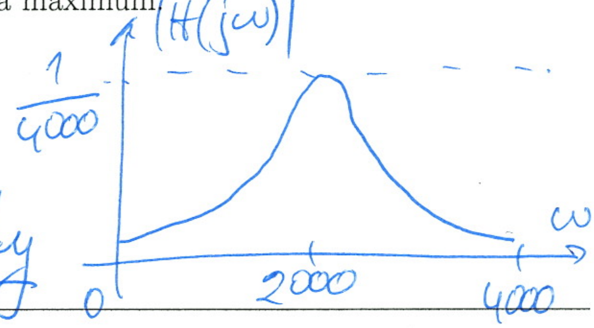
Příklad 6 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem nemá žádné nulové body a má dva póly: $p_1 = -1 + j2000$, $p_2 = -1 - j2000$

Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence ω od 0 do 4000 rad/s a napište, na které kruhové frekvenci má maximum.



pro $\omega = 2000$ bude bod $j\omega$ nejblíže pólu $\Rightarrow$ maximum frekvenční charakteristiky

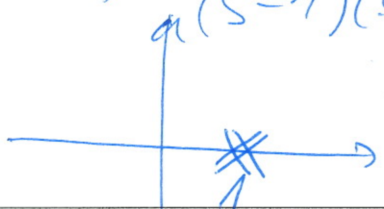
$H(j2000) = \frac{1}{4000}$



Příklad 7 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem je dána takto: $H(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+1}$

Určete, zda je systém stabilní.

$$H(s) = \frac{s+1}{(s-1)(s-1)}$$

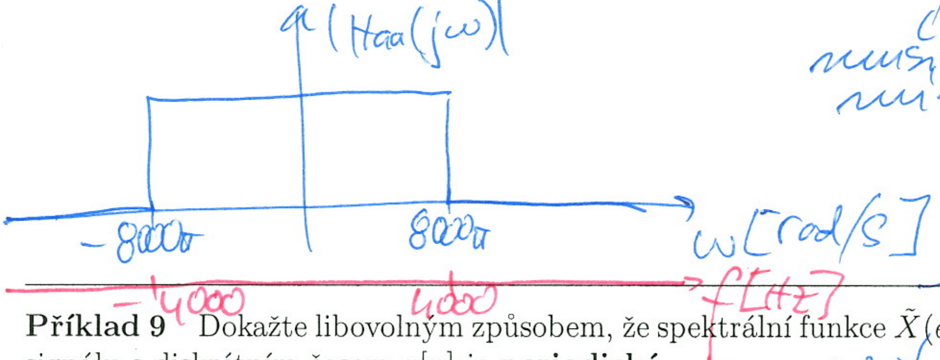


dva póly $p_1 = 1$, $p_2 = 1$

jejich reálná složka je kladná $\Rightarrow$ nestabilní

Příklad 8 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky anti-aliasingového filtru $|H_{aa}(j\omega)|$ pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 8$ kHz

Frekvenční osu můžete kreslit v radiánech za sekundu nebo v Hertzích, jasně označte, kterou jste použili.



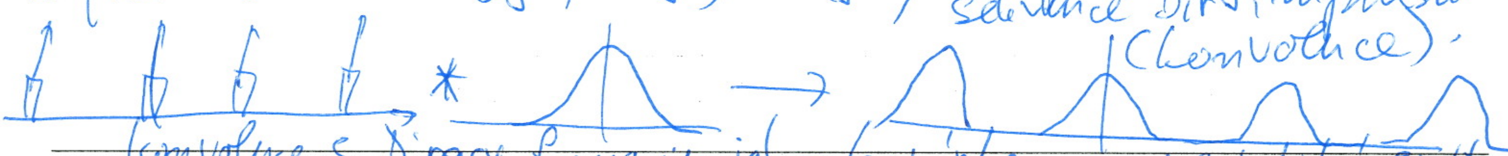
musí propouštět od minus $\frac{1}{2}$ do plus $\frac{1}{2}$ Fs

další možné řešení př. 8 viz B.

Příklad 9 Dokažte libovolným způsobem, že spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ (ω je normovaná kruhová frekvence) signálu s diskrétním časem $x[n]$ je **periodická**.

vzorkování v čase: $x_s = x(t) \cdot s(t)$ ← vzorkovací signál - sekvence Diracových impulsů (násobení)

ve frekvenci: $X_s(j\omega) = X(j\omega) * S(j\omega)$ ← spektrum je také sekvence Dir. impulsů (konvoluce).

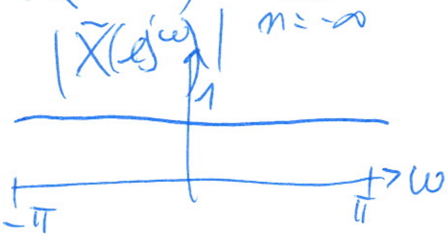


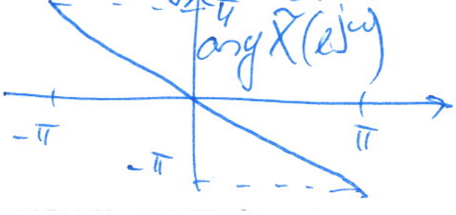
konvoluce s Diracy funguje jako kopírka

periodické spektrum.

Příklad 10 Signál s diskrétním časem je dán takto: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vypočítejte a nakreslete průběh modulu i argumentu jeho spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad. Pomůcka: k výpočtu použijte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT).

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$ suma má pouze jeden nenulový člen... $= 1 \cdot e^{-j\omega 1} = e^{-j\omega}$





modul: 1

arg: $-\omega$

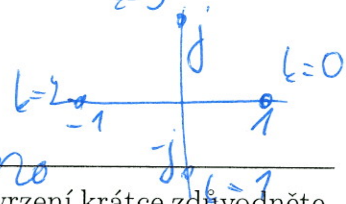
A

Příklad 11 Signál s diskrétním časem o délce $N = 4$ je pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$ dán takto: $x[n] = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$. Vypočtěte všechny koeficienty jaho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[k]$. Pomůcka: můžete provést kontrolu: hodnoty koeficientů $X[k]$ vzorkují průběh DTFT (předcházející příklad) na normovaných kruhových frekvencích $k\frac{2\pi}{N}$. $\frac{2\pi}{N}kn$

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

k	$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{4}k \cdot 1} = e^{-j\frac{k\pi}{2}}$
0	1
1	$-j$
2	-1
3	j

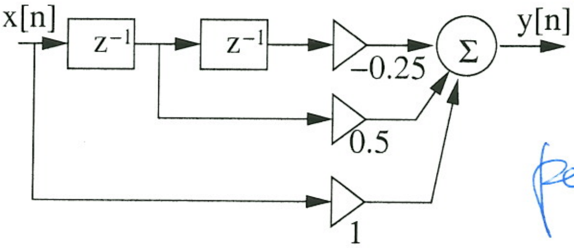
pouze jeden nenulový člen



$X[0] =$ 1 $X[1] =$ $-j$ $X[2] =$ -1 $X[3] =$ j

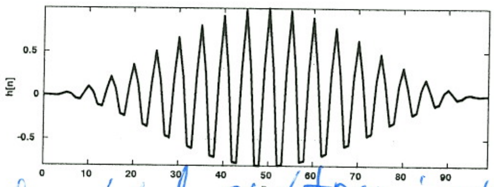
(kontrola vychází pro $k = 0, 1, 2$, pro $k = 3$ je nutné se dívat na $\omega = -\frac{\pi}{2}$)

Příklad 12 Určete, zda je číslicový filtr se schématem na obrázku stabilní. Své tvrzení krátce zdůvodněte.



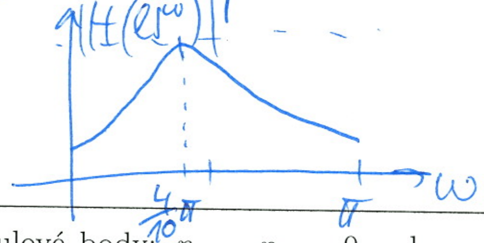
pouze FIR filtr => stabilní

Příklad 13 Impulsní odezva číslicového filtru má délku $N = 100$ vzorků a je na obrázku. Byla vygenerována jako $h[n] = w[n]\cos(\frac{4\pi}{10}n)$, kde $w[n]$ je okno tlumící na okrajích. Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 do π rad a napište, na které frekvenci má maximum.

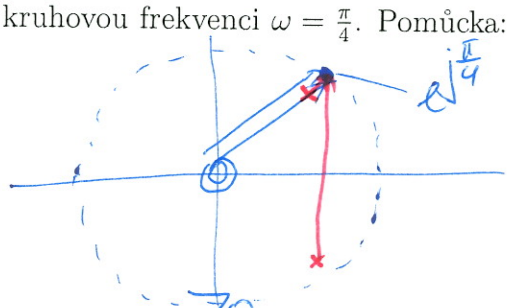


filtrace ≈ hledání podobnosti / "promítání" do impulsní odezvy

$|H(e^{j\omega})|$ bude odpovídat spektru impulsní odezvy.



Příklad 14 Přenosová funkce $H(z)$ číslicového filtru má dva nulové body: $n_1 = n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.99e^{j\frac{\pi}{4}}$, $p_2 = 0.99e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Určete modul a argument jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = \frac{\pi}{4}$. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$.

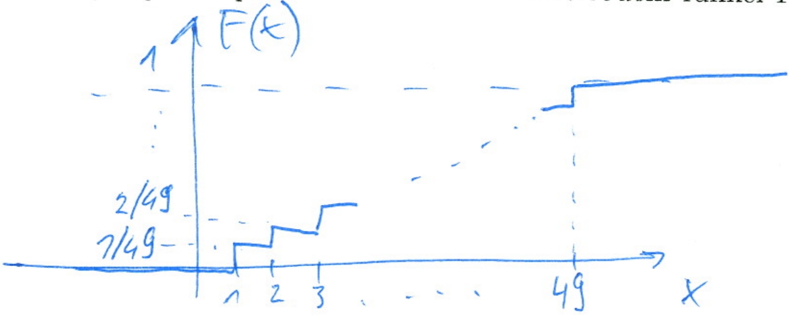


modul: $\frac{\text{součin délek modrých vektorů}}{\text{součin délek červených vektorů}} = \frac{1 \cdot 1}{0{,}01 \cdot 2\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{100}{\sqrt{2}} = 70$

argument = součet úhlů modrých vektorů − součet úhlů červených vektorů $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$

$|H(e^{j\frac{\pi}{4}})| =$ 70, $\arg H(e^{j\frac{\pi}{4}}) =$ $-\frac{\pi}{4}$

Příklad 15 Stacionární náhodný signál "Sportka" $\xi[n]$ nabývá diskrétních hodnot $X_1 = 1$ až $X_{49} = 49$, které jsou stejně pravděpodobné. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$ tohoto náhodného signálu.



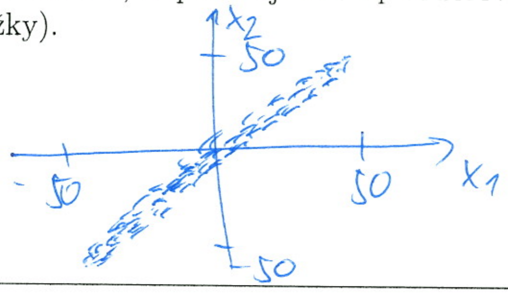
$F(x) = P\{\xi[n] < x\}$

A

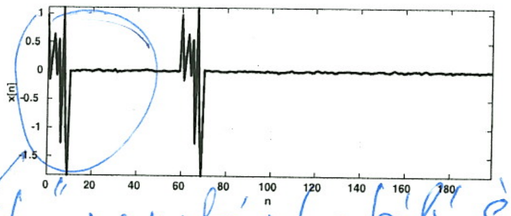
Příklad 16 Stacionární náhodný signál $\xi[n]$ má spojité hodnoty v intervalu od -50 do +50. Vzorek $\xi[n]$ se od předcházejícího $\xi[n-1]$ liší maximálně o 3, tedy $|\xi[n]-\xi[n-1]|<3$. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu pro sousední vzorky (tedy $k=1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu x_1 vodorovně, x_2 svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).

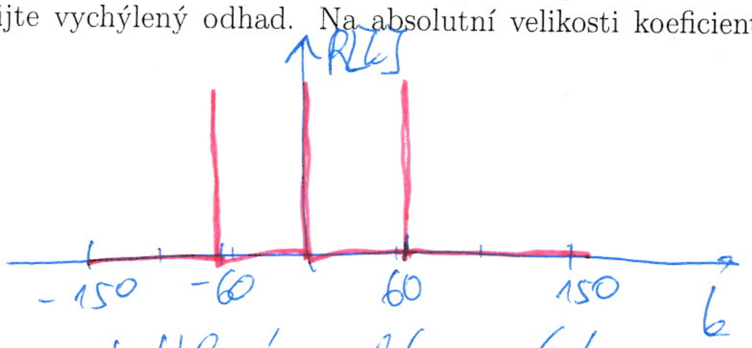
hodnoty pouze pro x_1 i $x_2 \in \langle -50, 50 \rangle$, jinde nula

sousední vzorky se nemohou moc lišit $\Rightarrow$ silná podobnost



Příklad 17 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$. Nakreslete přibližně průběh jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -150 do +150. Použijte vychýlený odhad. Na absolutní velikosti koeficientů nezáleží.



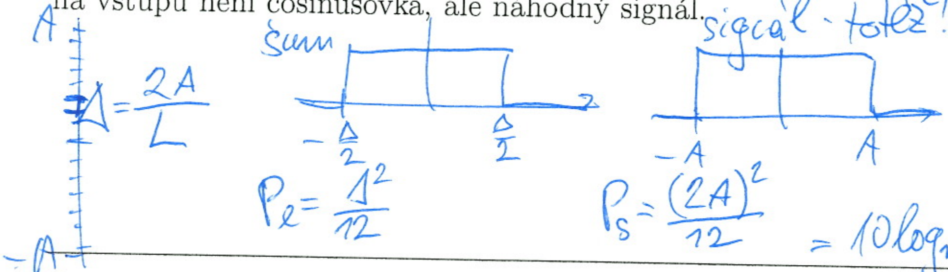


„dávka" vypadá jako bílý šum: žádná podobnost, pokud se ale posune pod druhou → totální podobnost!

Příklad 18 Odvoďte vztah pro poměr signálu k šumu způsobenému kvantováním pro náhodný vstupní signál, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je konstantní od hodnoty $-A$ do A, nulová jinde. Máme k disposici b bitů, tedy $L=2^b$ kvantovacích hladin. Ty jsou rozmístěny od $-A$ do A; na nejbližší kvantovací hladinu zaokrouhlujeme. Pomůcka: postup jsme viděli na přednášce, jediným rozdílem je, že na vstupu není cosinusovka, ale náhodný signál.

$\Delta = \frac{2A}{L}$

šum



signál - totéž!!

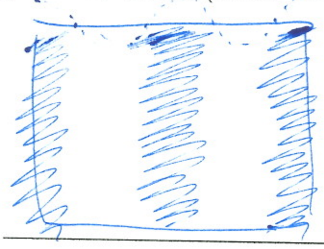
$P_e = \frac{\Delta^2}{12}$ $\quad P_s = \frac{(2A)^2}{12}$

$$SNR = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_e} = 10\log_{10}\frac{\frac{(2A)^2}{12}}{\frac{\Delta^2}{12}} = 10\log_{10}\frac{4A^2}{\frac{4A^2}{L^2}} = 10\log_{10}L^2 = 10\log_{10}(2^b)^2 = 20b\log_{10}2 = \underline{\underline{6b\ dB}}$$

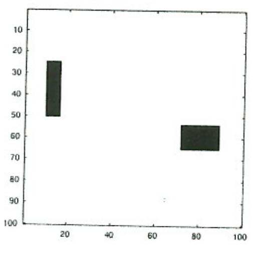
tento výsledek bez úpravy stačí!

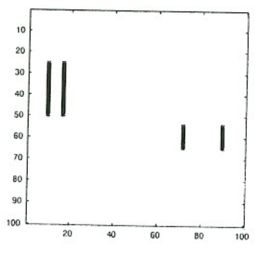
Příklad 19 Nakreslete obrázek o rozměrech $K=100$ řádků a $L=100$ sloupců s pixely danými vztahem: $x[k,l] = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi\frac{2}{100}l)$, kde k je svislé počitadlo řádků a l je vodorovné počitadlo sloupců. Bílá (papír) je nula, černá (nebo barva Vaší tužky) je 1.

2 „vlny" vodorovně



Příklad 20 Na prvním obrázku je vstupní obrázek $x[k,l]$, na druhém jeho vyfiltrovaná verze. Bílá (papír) je nula, černá je 1. Jednalo se o filtraci pomocí masky (konvolučního jádra, matice) $h[k,l]$ o rozměrech 3×3. Napište hodnoty $h[k,l]$ pro tuto filtraci.





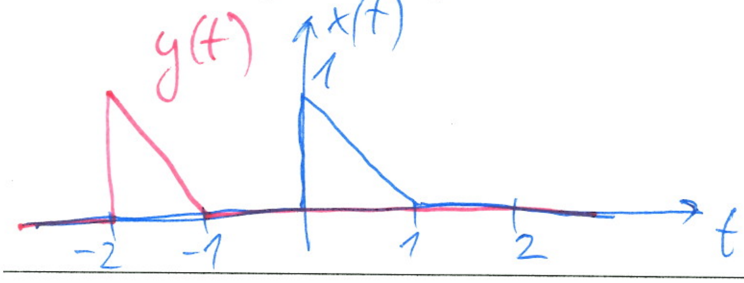
detekce svislých hran, např. takto:

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 2.1.2020, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1-t & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(t+2)$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = 2.5 + 16\cos(300\pi t - 0.3\pi)$.
Určete hodnotu nultého koeficientu jeho Fourierovy řady (FŘ).

viz A

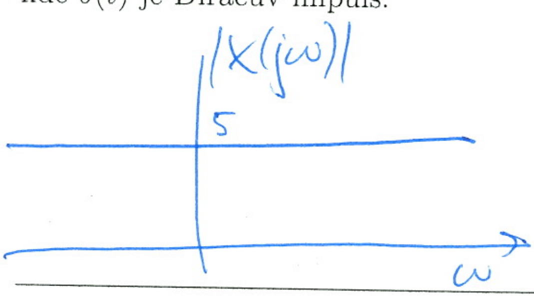
$c_0 =$ 2,5

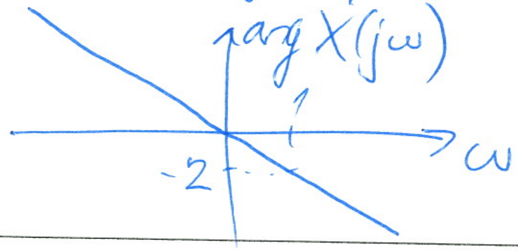
Příklad 3 Ukažte na zvoleném periodickém **komplexním** signálu se spojitým časem $x(t)$, že pro jeho koeficienty Fourierovy řady (FŘ) **neplatí** symetrie platná pro reálné signály: $c_k = c^\star_{-k}$

cosinusovka s komplexní amplitudou (násobí-li se signál konstantou, násobí se i koeficienty FŘ)
$x(t) = j\cos(\omega_1 t)$: $c_1 = j\frac{1}{2}$ $c_{-1} = j\frac{1}{2}$
neplatí $c_1 = c^*_{-1}$

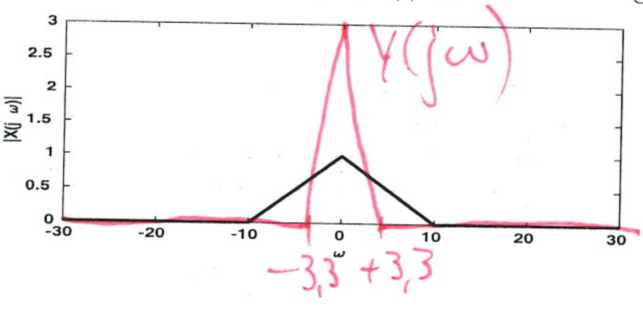
Příklad 4 Nakreslete průběh modulu a argumentu spektrální funkce $X(j\omega)$ pro signál: $x(t) = 5\,\delta(t-2)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.

viz A





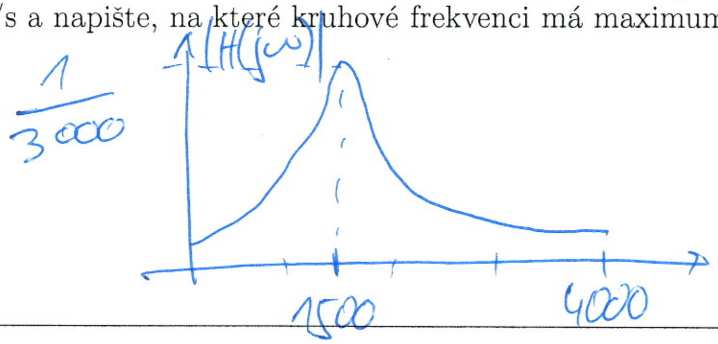
Příklad 5 Na obrázku je modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku modul spektrální funkce $|Y(j\omega)|$ zpomaleného signálu $y(t) = x(\frac{t}{3})$



viz A
3× rychlejší a 3× větší

B

Příklad 6 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem nemá žádné nulové body a má dva póly: $p_1 = -1 + j1500$, $p_2 = -1 - j1500$
Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence ω od 0 do 4000 rad/s a napište, na které kruhové frekvenci má maximum.



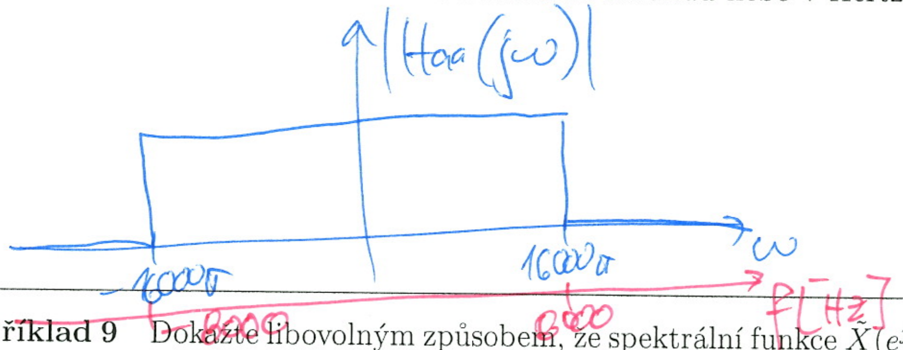
viz A

max. pro $\omega = 1500$ rad/s

Příklad 7 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem je dána takto: $H(s) = \frac{s+1}{s^2-2s+1}$
Určete, zda je systém stabilní.

viz A

Příklad 8 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky anti-aliasingového filtru $|H_{aa}(j\omega)|$ pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 16$ kHz
Frekvenční osu můžete kreslit v radiánech za sekundu nebo v Hertzích, jasně označte, kterou jste použili.



viz A

Příklad 9 Dokažte libovolným způsobem, že spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ (ω je normovaná kruhová frekvence) signálu s diskrétním časem $x[n]$ je **periodická**.

spektrum se vypočítá pomocí DTFT: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

přidání libovolného násobku 2π k ω:

$\tilde{X}(e^{j(\omega+k2\pi)}) = \sum x[n] e^{-j(\omega+2k\pi)n} = \sum x[n] e^{-j\omega n} \underbrace{e^{-j2k\pi n}}_{1} = \sum x[n] e^{-j\omega n} = \tilde{X}(e^{j\omega})$

to samé!

Příklad 10 Signál s diskrétním časem je dán takto: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vypočítejte a nakreslete průběh modulu i argumentu jeho spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad. Pomůcka: k výpočtu použijte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT).

Viz A

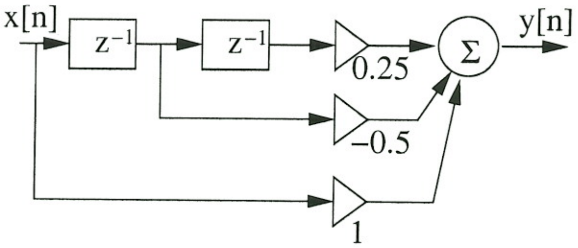
B

Příklad 11 Signál s diskrétním časem o délce $N = 4$ je pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$ dán takto: $x[n] = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$. Vypočtěte všechny koeficienty jaho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[k]$. Pomůcka: můžete provést kontrolu: hodnoty koeficientů $X[k]$ vzorkují průběh DTFT (předcházející příklad) na normovaných kruhových frekvencích $k\frac{2\pi}{N}$.

Viz A

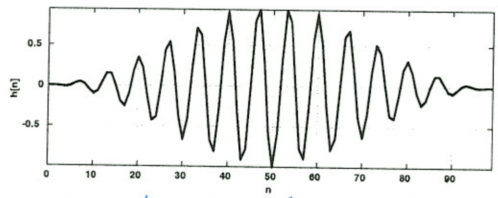
$X[0] =$ .... $X[1] =$ .... $X[2] =$ .... $X[3] =$ ....

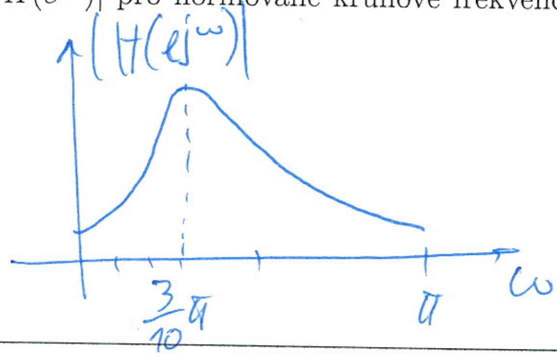
Příklad 12 Určete, zda je číslicový filtr se schématem na obrázku stabilní. Své tvrzení krátce zdůvodněte.



Viz A

Příklad 13 Impulsní odezva číslicového filtru má délku $N = 100$ vzorků a je na obrázku. Byla vygenerována jako $h[n] = w[n] \cos(\frac{3\pi}{10}n)$, kde $w[n]$ je okno tlumící na okrajích. Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 do π rad a napište, na které frekvenci má maximum.





Viz A

Viz A, max. na $\omega = \frac{3}{10}\pi$

Příklad 14 Přenosová funkce $H(z)$ číslicového filtru má dva nulové body: $n_1 = n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.99e^{j\frac{\pi}{4}}$, $p_2 = 0.99e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Určete modul a argument jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = \frac{\pi}{4}$. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$.

Viz A

$|H(e^{j\frac{\pi}{4}})| =$ ...., $\arg H(e^{j\frac{\pi}{4}}) =$ ....

Příklad 15 Stacionární náhodný signál "Sportka" $\xi[n]$ nabývá diskrétních hodnot $X_1 = 1$ až $X_{49} = 49$, které jsou stejně pravděpodobné. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$ tohoto náhodného signálu.

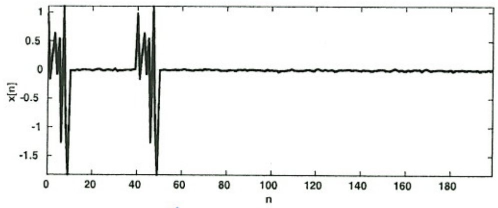
Viz A

B

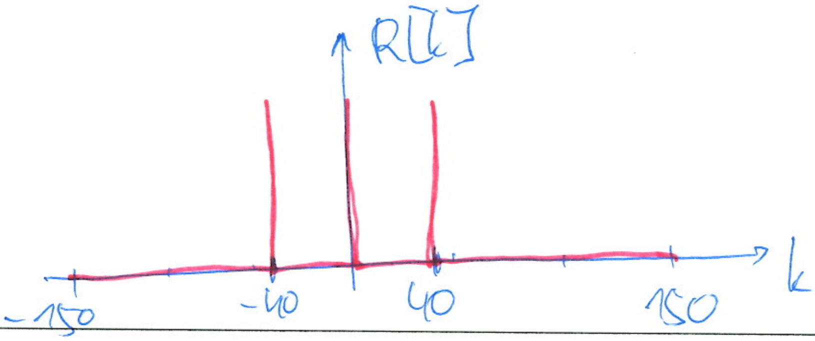
Příklad 16 Stacionární náhodný signál $\xi[n]$ má spojité hodnoty v intervalu od -50 do +50. Vzorek $\xi[n]$ se od předcházejícího $\xi[n-1]$ liší maximálně o 3, tedy $|\xi[n] - \xi[n-1]| < 3$. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu pro sousední vzorky (tedy $k = 1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu x_1 vodorovně, x_2 svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).

viz A

Příklad 17 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$. Nakreslete přibližně průběh jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -150 do +150. Použijte vychýlený odhad. Na absolutní velikosti koeficientů nezáleží.



viz A

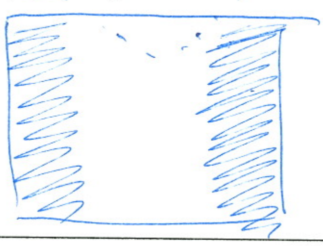


Příklad 18 Odvoďte vztah pro poměr signálu k šumu způsobenému kvantováním pro náhodný vstupní signál, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je konstantní od hodnoty $-A$ do A, nulová jinde. Máme k disposici b bitů, tedy $L = 2^b$ kvantovacích hladin. Ty jsou rozmístěny od $-A$ do A; na nejbližší kvantovací hladinu zaokrouhlujeme. Pomůcka: postup jsme viděli na přednášce, jediným rozdílem je, že na vstupu není cosinusovka, ale náhodný signál.

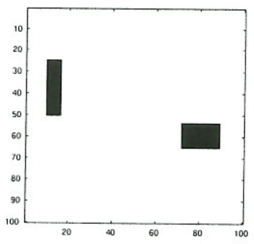
viz A

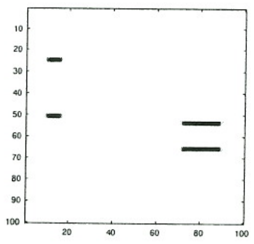
Příklad 19 Nakreslete obrázek o rozměrech $K = 100$ řádků a $L = 100$ sloupců s pixely danými vztahem: $x[k,l] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi \frac{1}{100} l)$, kde k je svislé počitadlo řádků a l je vodorovné počitadlo sloupců. Bílá (papír) je nula, černá (nebo barva Vaší tužky) je 1.

1 "ulica" vodorovne



Příklad 20 Na prvním obrázku je vstupní obrázek $x[k,l]$, na druhém jeho vyfiltrovaná verze. Bílá (papír) je nula, černá je 1. Jednalo se o filtraci pomocí masky (konvolučního jádra, matice) $h[k,l]$ o rozměrech 3×3. Napište hodnoty $h[k,l]$ pro tuto filtraci.





detekce vodorovných hran, např. takto

$$\frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

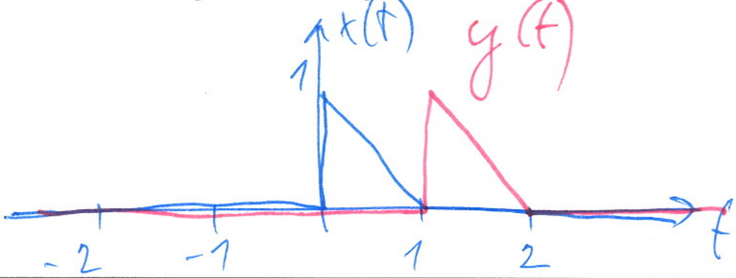
Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 2.1.2020, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ......REF......

(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1-t & \text{pro} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(t-1)$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = 1.5 + 16\cos(200\pi t + 0.3\pi)$.
Určete hodnotu nultého koeficientu jeho Fourierovy řady (FŘ).

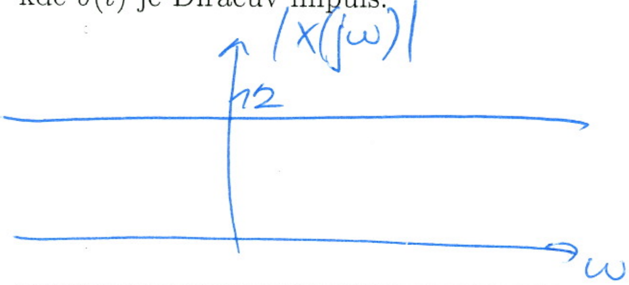
viz A

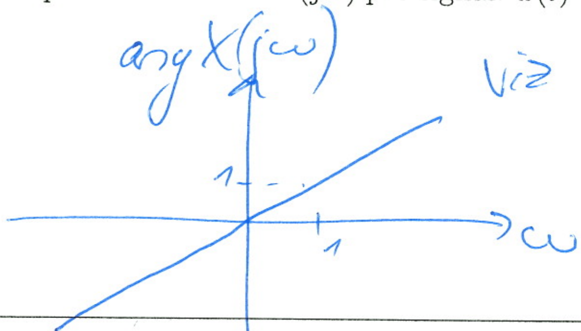
$c_0 =$ ......1,5......

Příklad 3 Ukažte na zvoleném periodickém **komplexním** signálu se spojitým časem $x(t)$, že pro jeho koeficienty Fourierovy řady (FŘ) **neplatí** symetrie platná pro reálné signály: $c_k = c^\star_{-k}$

viz A/B

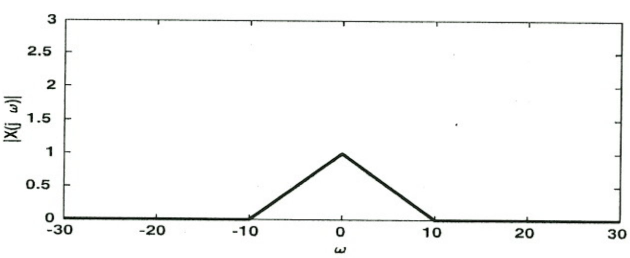
Příklad 4 Nakreslete průběh modulu a argumentu spektrální funkce $X(j\omega)$ pro signál: $x(t) = 12\,\delta(t+1)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.





viz A

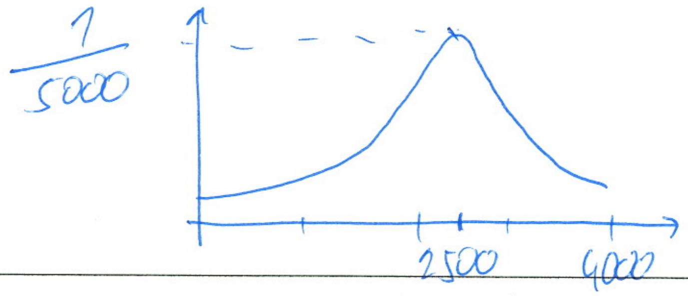
Příklad 5 Na obrázku je modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku modul spektrální funkce $|Y(j\omega)|$ zpomaleného signálu $y(t) = x(\frac{t}{2})$



viz A

C

Příklad 6 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem nemá žádné nulové body a má dva póly: $p_1 = -1 + j2500$, $p_2 = -1 - j2500$
Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence ω od 0 do 4000 rad/s a napište, na které kruhové frekvenci má maximum.

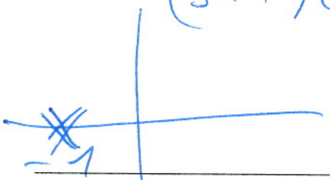


viz A

max. pro $\omega = 2500$ rad/s

Příklad 7 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem je dána takto: $H(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$
Určete, zda je systém stabilní.

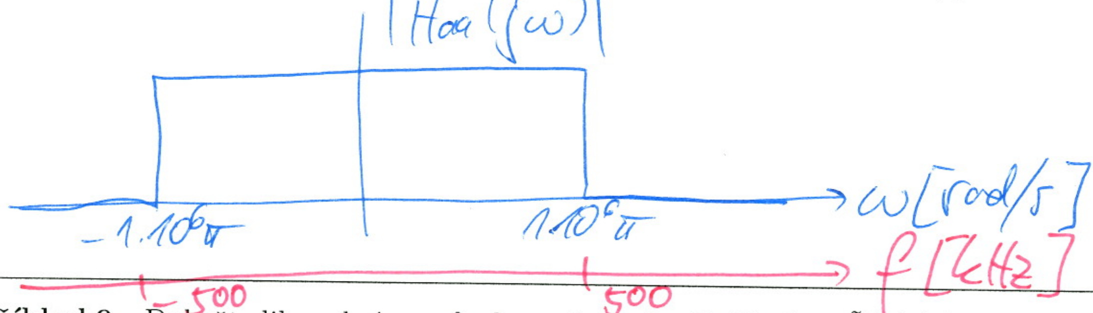
$$H(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+1)} = \frac{s+1}{(s-(-1))(s-(-1))}$$



dva póly
$p_1 = -1$, $p_2 = -1$

reálná složka pólů je záporná
$\Rightarrow$ stabilní!

Příklad 8 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky anti-aliasingového filtru $|H_{aa}(j\omega)|$ pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 1$ MHz
Frekvenční osu můžete kreslit v radiánech za sekundu nebo v Hertzích, jasně označte, kterou jste použili.



viz A

Příklad 9 Dokažte libovolným způsobem, že spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ (ω je normovaná kruhová frekvence) signálu s diskrétním časem $x[n]$ je **periodická**.

viz A/B

Příklad 10 Signál s diskrétním časem je dán takto: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vypočítejte a nakreslete průběh modulu i argumentu jeho spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad. Pomůcka: k výpočtu použijte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT).

viz A

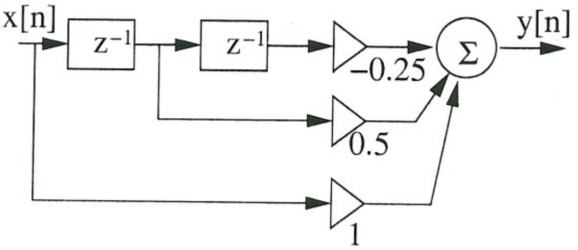
C

Příklad 11 Signál s diskrétním časem o délce $N = 4$ je pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$ dán takto: $x[n] = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$. Vypočtěte všechny koeficienty jaho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[k]$. Pomůcka: můžete provést kontrolu: hodnoty koeficientů $X[k]$ vzorkují průběh DTFT (předcházející příklad) na normovaných kruhových frekvencích $k\frac{2\pi}{N}$.

viz A

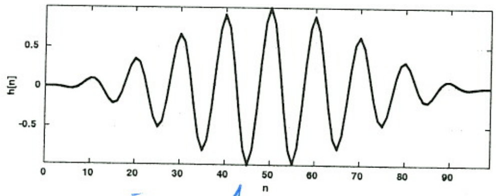
$X[0] =$ .... $X[1] =$ .... $X[2] =$ .... $X[3] =$ ....

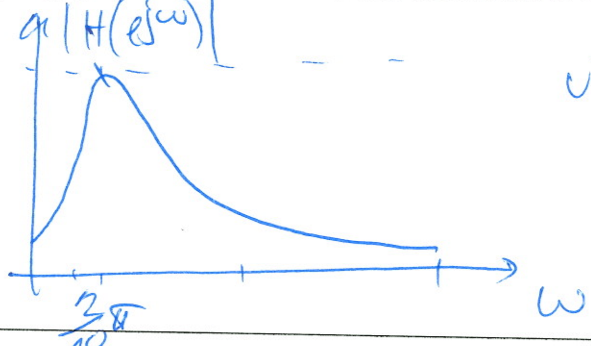
Příklad 12 Určete, zda je číslicový filtr se schématem na obrázku stabilní. Své tvrzení krátce zdůvodněte.



viz A

Příklad 13 Impulsní odezva číslicového filtru má délku $N = 100$ vzorků a je na obrázku. Byla vygenerována jako $h[n] = w[n]\cos(\frac{2\pi}{10}n)$, kde $w[n]$ je okno tlumící na okrajích. Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 do π rad a napište, na které frekvenci má maximum.





viz A

viz A_1

max na $\omega = \frac{2}{10}\pi$

Příklad 14 Přenosová funkce $H(z)$ číslicového filtru má dva nulové body: $n_1 = n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.99e^{j\frac{\pi}{4}}$, $p_2 = 0.99e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Určete modul a argument jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = \frac{\pi}{4}$. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$.

viz A

$|H(e^{j\frac{\pi}{4}})| =$ ...., $\arg H(e^{j\frac{\pi}{4}}) =$ ....

Příklad 15 Stacionární náhodný signál "Sportka" $\xi[n]$ nabývá diskrétních hodnot $X_1 = 1$ až $X_{49} = 49$, které jsou stejně pravděpodobné. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$ tohoto náhodného signálu.

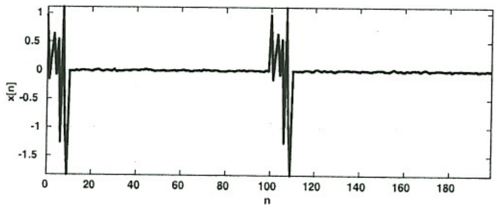
viz A

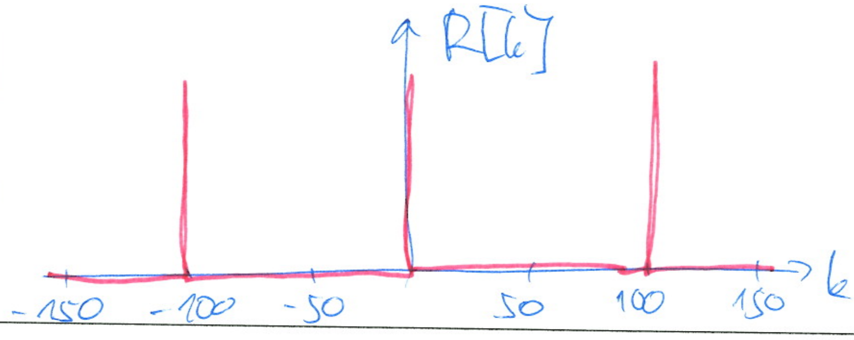
C

Příklad 16 Stacionární náhodný signál $\xi[n]$ má spojité hodnoty v intervalu od -50 do +50. Vzorek $\xi[n]$ se od předcházejícího $\xi[n-1]$ liší maximálně o 3, tedy $|\xi[n] - \xi[n-1]| < 3$. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu pro sousední vzorky (tedy $k = 1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu x_1 vodorovně, x_2 svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).

viz A

Příklad 17 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$. Nakreslete přibližně průběh jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -150 do +150. Použijte vychýlený odhad. Na absolutní velikosti koeficientů nezáleží.





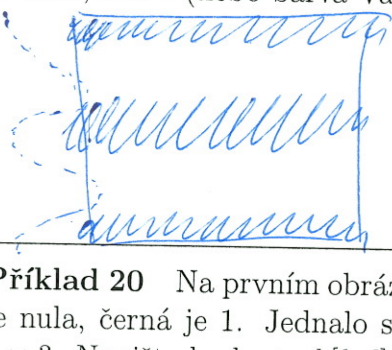
viz A

Příklad 18 Odvoďte vztah pro poměr signálu k šumu způsobenému kvantováním pro náhodný vstupní signál, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je konstantní od hodnoty $-A$ do A, nulová jinde. Máme k disposici b bitů, tedy $L = 2^b$ kvantovacích hladin. Ty jsou rozmístěny od $-A$ do A; na nejbližší kvantovací hladinu zaokrouhlujeme. Pomůcka: postup jsme viděli na přednášce, jediným rozdílem je, že na vstupu není cosinusovka, ale náhodný signál.

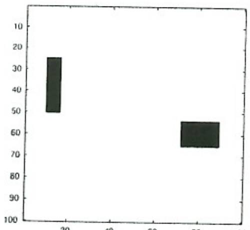
viz A

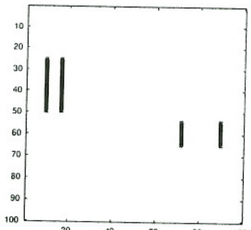
Příklad 19 Nakreslete obrázek o rozměrech $K = 100$ řádků a $L = 100$ sloupců s pixely danými vztahem: $x[k, l] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\pi \frac{2}{100} k)$, kde k je svislé počitadlo řádků a l je vodorovné počitadlo sloupců. Bílá (papír) je nula, černá (nebo barva Vaší tužky) je 1.

2 "vlny" svisle



Příklad 20 Na prvním obrázku je vstupní obrázek $x[k, l]$, na druhém jeho vyfiltrovaná verze. Bílá (papír) je nula, černá je 1. Jednalo se o filtraci pomocí masky (konvolučního jádra, matice) $h[k, l]$ o rozměrech 3×3. Napište hodnoty $h[k, l]$ pro tuto filtraci.





viz A

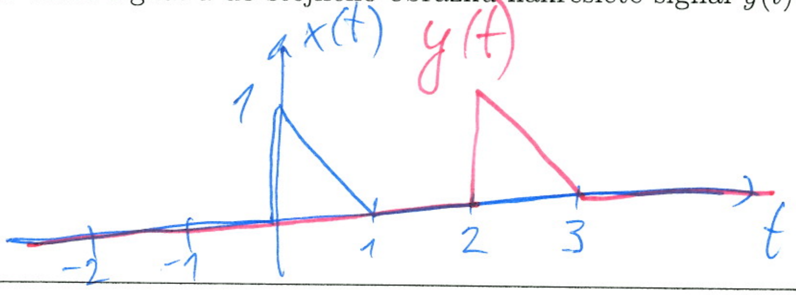
Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 2.1.2020, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF

(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1-t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(t-2)$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = 0.5 + 16\cos(100\pi t + 0.3\pi)$. Určete hodnotu nultého koeficientu jeho Fourierovy řady (FŘ).

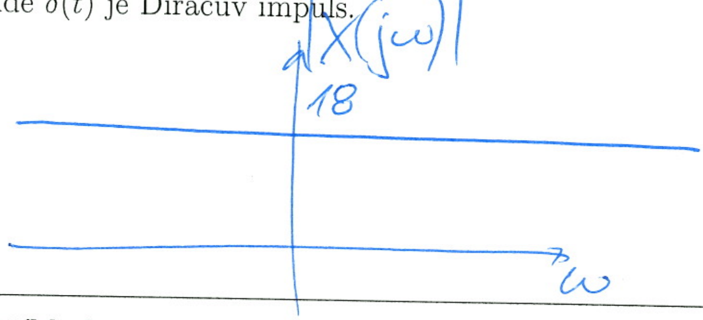
viz A

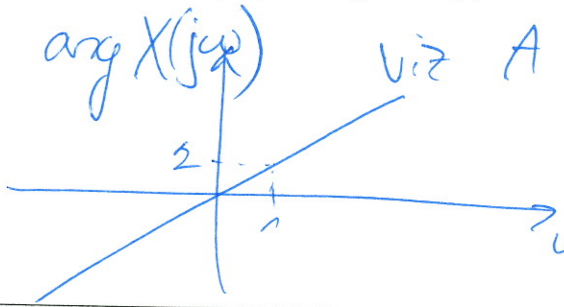
$c_0 =$ 0,5

Příklad 3 Ukažte na zvoleném periodickém **komplexním** signálu se spojitým časem $x(t)$, že pro jeho koeficienty Fourierovy řady (FŘ) **neplatí** symetrie platná pro reálné signály: $c_k = c^\star_{-k}$

viz A/B

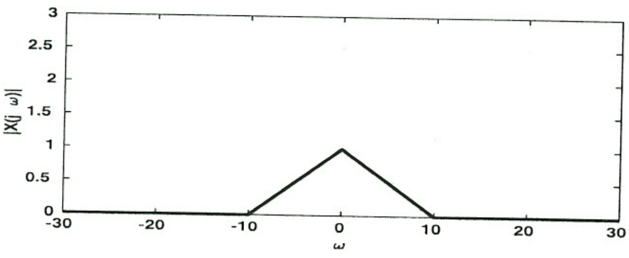
Příklad 4 Nakreslete průběh modulu a argumentu spektrální funkce $X(j\omega)$ pro signál: $x(t) = 18\,\delta(t+2)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.





viz A

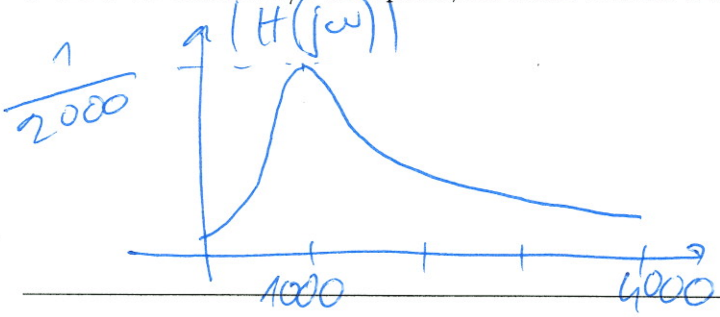
Příklad 5 Na obrázku je modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku modul spektrální funkce $|Y(j\omega)|$ zpomaleného signálu $y(t) = x(\frac{t}{3})$



viz B

D

Příklad 6 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem nemá žádné nulové body a má dva póly: $p_1 = -1 + j1000$, $p_2 = -1 - j1000$
Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence ω od 0 do 4000 rad/s a napište, na které kruhové frekvenci má maximum.



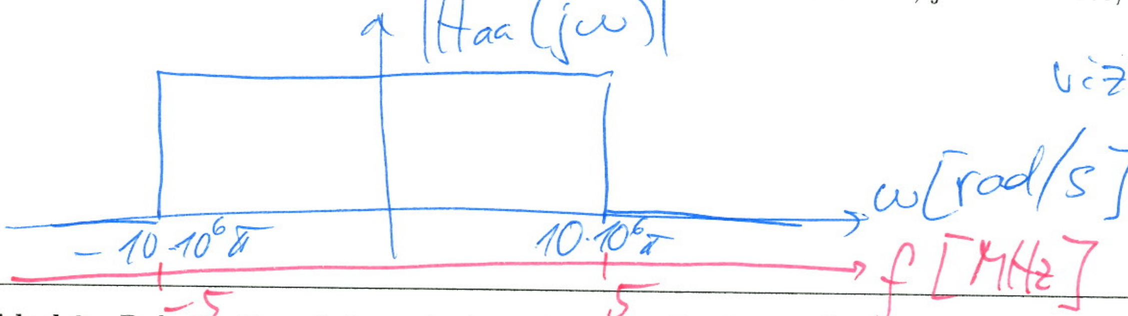
viz A

max. pro $\omega = 1000$ rad/s

Příklad 7 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem je dána takto: $H(s) = \frac{s-1}{s^2-2s+1}$
Určete, zda je systém stabilní.

viz A (na čitateli stabilita nezáleží)

Příklad 8 Nakreslete průběh modulu frekvenční charakteristiky anti-aliasingového filtru $|H_{aa}(j\omega)|$ pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 10$ MHz
Frekvenční osu můžete kreslit v radiánech za sekundu nebo v Hertzích, jasně označte, kterou jste použili.



viz A

Příklad 9 Dokažte libovolným způsobem, že spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ (ω je normovaná kruhová frekvence) signálu s diskrétním časem $x[n]$ je **periodická**.

viz A/B

Příklad 10 Signál s diskrétním časem je dán takto: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vypočítejte a nakreslete průběh modulu i argumentu jeho spektrální funkce $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro normované kruhové frekvence ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad. Pomůcka: k výpočtu použijte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT).

viz A

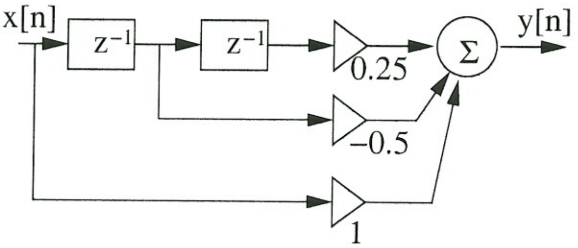
D

Příklad 11 Signál s diskrétním časem o délce $N = 4$ je pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3]$ dán takto: $x[n] = [0\ \ 1\ \ 0\ \ 0]$. Vypočtěte všechny koeficienty jaho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[k]$. Pomůcka: můžete provést kontrolu: hodnoty koeficientů $X[k]$ vzorkují průběh DTFT (předcházející příklad) na normovaných kruhových frekvencích $k\frac{2\pi}{N}$.

viz A

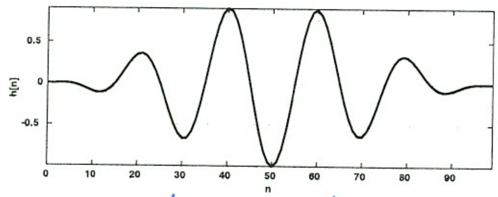
$X[0] =$ .... $X[1] =$ .... $X[2] =$ .... $X[3] =$ ....

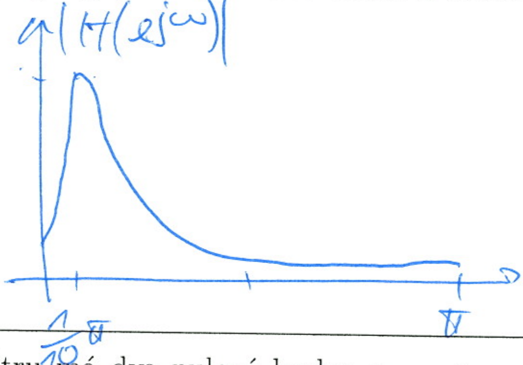
Příklad 12 Určete, zda je číslicový filtr se schématem na obrázku stabilní. Své tvrzení krátce zdůvodněte.



viz A

Příklad 13 Impulsní odezva číslicového filtru má délku $N = 100$ vzorků a je na obrázku. Byla vygenerována jako $h[n] = w[n]\cos(\frac{\pi}{10}n)$, kde $w[n]$ je okno tlumící na okrajích. Nakreslete přibližně průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence ω od 0 do π rad a napište, na které frekvenci má maximum.





viz A

viz A, max. na $\omega = \frac{\pi}{10}$

Příklad 14 Přenosová funkce $H(z)$ číslicového filtru má dva nulové body: $n_1 = n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.99e^{j\frac{\pi}{4}}$, $p_2 = 0.99e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Určete modul a argument jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = \frac{\pi}{4}$. Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.4$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.7$.

viz A

$|H(e^{j\frac{\pi}{4}})| =$ ...., $\arg H(e^{j\frac{\pi}{4}}) =$ ....

Příklad 15 Stacionární náhodný signál "Sportka" $\xi[n]$ nabývá diskrétních hodnot $X_1 = 1$ až $X_{49} = 49$, které jsou stejně pravděpodobné. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$ tohoto náhodného signálu.

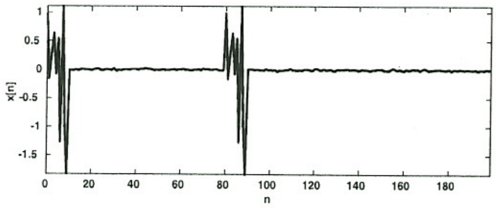
viz A

D

Příklad 16 Stacionární náhodný signál $\xi[n]$ má spojité hodnoty v intervalu od -50 do +50. Vzorek $\xi[n]$ se od předcházejícího $\xi[n-1]$ liší maximálně o 3, tedy $|\xi[n]-\xi[n-1]|<3$. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1,x_2,k)$ náhodného signálu pro sousední vzorky (tedy $k=1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu x_1 vodorovně, x_2 svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).

Viz A

Příklad 17 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$. Nakreslete přibližně průběh jeho korelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -150 do +150. Použijte vychýlený odhad. Na absolutní velikosti koeficientů nezáleží.



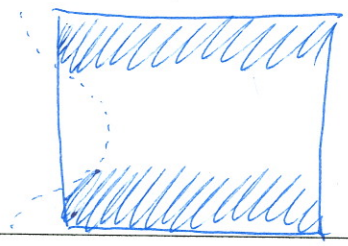
viz A

Příklad 18 Odvoďte vztah pro poměr signálu k šumu způsobenému kvantováním pro náhodný vstupní signál, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je konstantní od hodnoty $-A$ do A, nulová jinde. Máme k disposici b bitů, tedy $L=2^b$ kvantovacích hladin. Ty jsou rozmístěny od $-A$ do A; na nejbližší kvantovací hladinu zaokrouhlujeme. Pomůcka: postup jsme viděli na přednášce, jediným rozdílem je, že na vstupu není cosinusovka, ale náhodný signál.

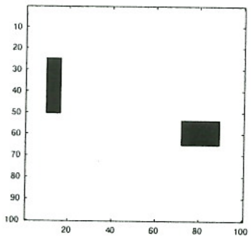
viz A

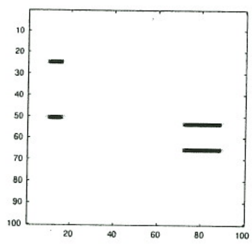
Příklad 19 Nakreslete obrázek o rozměrech $K=100$ řádků a $L=100$ sloupců s pixely danými vztahem: $x[k,l]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi\frac{1}{100}k)$, kde k je svislé počitadlo řádků a l je vodorovné počitadlo sloupců. Bílá (papír) je nula, černá (nebo barva Vaší tužky) je 1.

1 "vlna" svisle



Příklad 20 Na prvním obrázku je vstupní obrázek $x[k,l]$, na druhém jeho vyfiltrovaná verze. Bílá (papír) je nula, černá je 1. Jednalo se o filtraci pomocí masky (konvolučního jádra, matice) $h[k,l]$ o rozměrech 3×3. Napište hodnoty $h[k,l]$ pro tuto filtraci.





viz B