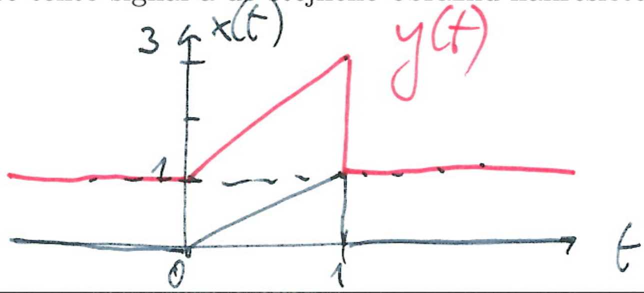
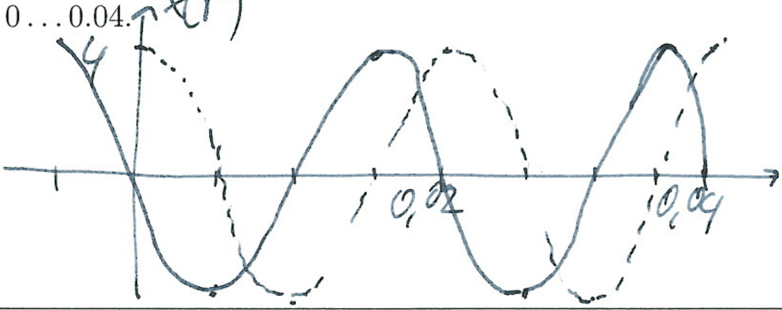
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 29.1.2019, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = 2x(t) + 1$



Příklad 2 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 4\cos(100\pi t + \frac{\pi}{2})$. Nakreslete tento signál pro $t \in 0 \dots 0.04$.



$\omega_1 = 100\pi$ rad/s

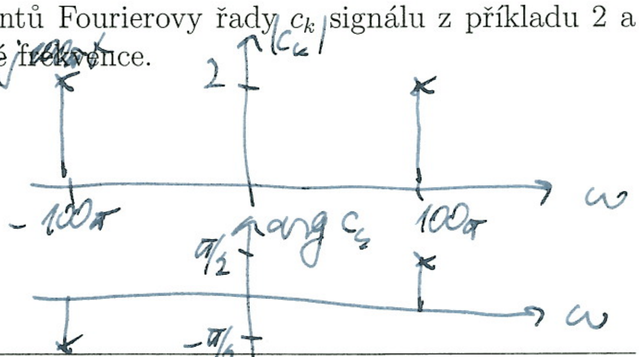
$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{100\pi} = 0{,}02$ s

předběhnutí o $\frac{1}{4}$ periody

Příklad 3 Vypočtěte hodnoty všech nenulových koeficientů Fourierovy řady c_k signálu z příkladu 2 a nakreslete jejich moduly $|c_k|$ a argumenty $\arg c_k$ na správné frekvence.

$$4\cos(100\pi t + \frac{\pi}{2}) = \frac{4}{2}e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j100\pi t} + \frac{4}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{-j100\pi t}$$

c_1 $\quad$ c_{-1}



Příklad 4 Periodický signál se spojitým časem $x(t)$ se základní kruhovou frekvencí $\omega_1 = 1000\pi$ rad/s byl zpožděn o 0.5 milisekund: $y(t) = x(t - 0.0005)$. Druhý koeficient Fourierovy řady signálu $x(t)$ je $c_{x,2} = 1 + j$. Vypočtěte druhý koeficient Fourierovy řady signálu $y(t)$. $\tau = 0{,}0005$ $\quad k = 2$

$c_{y,2} = c_{x,2} \cdot e^{-jk\omega_1\tau} = (1+j)e^{-j2\cdot 1000\pi\cdot 0{,}0005} = (1+j)\underbrace{e^{-j\pi}}_{-1} = \underline{\underline{-1-j}}$

Příklad 5 Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -0.004 \le t \le 0.004 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$D = 1 \quad \vartheta = 0{,}008$

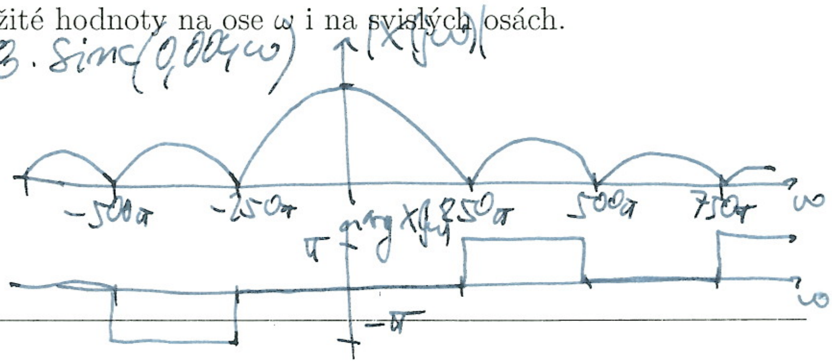
Vypočtětě jeho spektrální funkci a nakreslete její modulovou i argumentovou část v závislosti na kruhové frekvenci ω (do dvou obrázků). Vyznačte důležité hodnoty na ose ω i na svislých osách.

$X(j\omega) = D\vartheta\, \mathrm{sinc}(\frac{\vartheta}{2}\omega) = 0{,}008 \cdot \mathrm{sinc}(0{,}004\omega)$

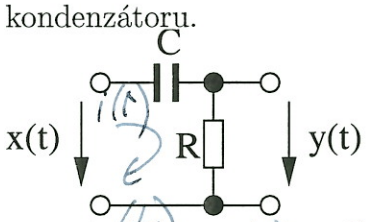
$0{,}004\omega = \pi$

$\omega = \frac{\pi}{0{,}004} = \frac{1000\pi}{4} = 250\pi$

přesně viz PNG



Příklad 6 Odvoďte přenosovou funcki $H(s)$ C-R článku na obrázku.
Pomůcka: Ohmův zákon: $u(t) = Ri(t)$. Proud kondenzátorem: $i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$, kde $u_c(t)$ je napětí na kondenzátoru.



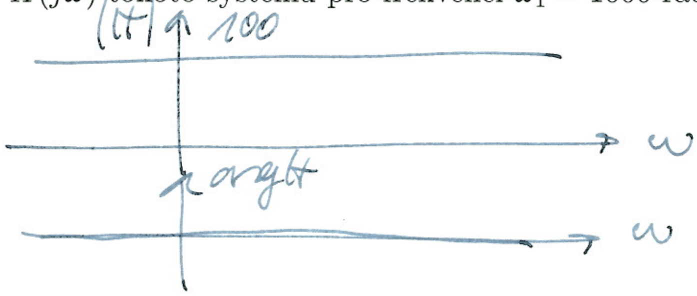
$C\left(\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dy(t)}{dt}\right) = \frac{y(t)}{R}$ $\quad RC\frac{dx(t)}{dt} = y(t) + RC\frac{dy(t)}{dt}$

Laplacova transf.:

$RCsX(s) = Y(s) + RCsY(s)$

$i(t) = \frac{y(t)}{R}$ $\quad i(t) = C\frac{d(x(t)-y(t))}{dt}$ $\quad H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{RCs}{1+RCs}$

Příklad 7 Systém se spojitým časem je ideální zesilovač: $y(t) = 100x(t)$. Určete modul i argument kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ tohoto systému pro frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.



zesiluje všechny frekvence

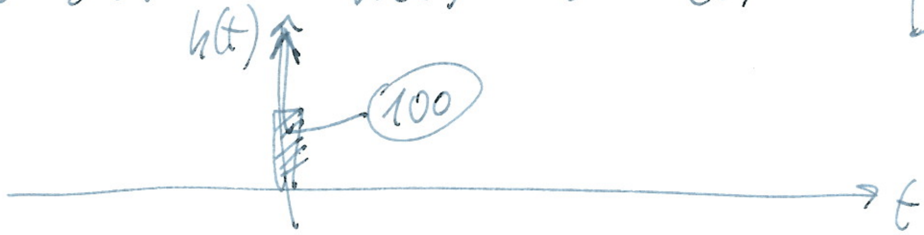
fázi neposouvá

$|H(j1000)| =$ 100, $\arg H(j1000) =$ 0 rad.

Příklad 8 Určete a nakreslete impulsní odezvu $h(t)$ systému z příkladu 7.

pro „drát" $h(t) = \delta(t)$ (Dirac)

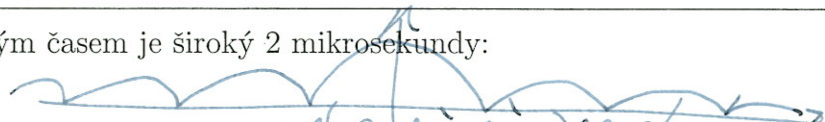
pro zesilovač $h(t) = 100\,\delta(t)$



Diracův impuls s mocností (plochou) 100.

Příklad 9 Obdélníkový impuls se spojitým časem je široký 2 mikrosekundy:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1\ \mu s \le t \le 1\ \mu s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



nekonečně široké spektrum.

Uveďte, jaká je minimální vzorkovací frekvence $F_{s_{min}}$ pro jeho ideální vzorkování a ideální rekonstrukci.

$f_{max} = \infty$

$F_{s_{min}} =$ ∞ Hz „nejde" je také správná odpověď!

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ je navzorkován na frekvenci F_{s1} =48 kHz. Uveďte, jak budete postupovat při jeho převzorkování na F_{s2} =16 kHz. Pro výsledný signál musí být splněn vzorkovací teorém.

frekvence nad 8kHz mohou způsobit aliasing.

$x[n]$ ↓

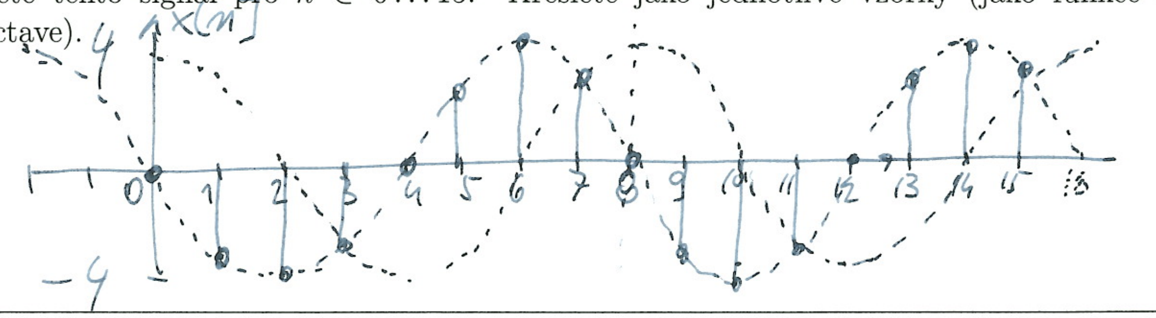
| filtrace dolní propustí s mezní frekvencí 8kHz |

↓

| podvzorkování (výběr každého 3. vzorku) |

↓

Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem s periodou $N = 8$ je dán: $\tilde{x}[n] = 4\cos(2\pi\frac{1}{8}n + \frac{\pi}{2})$. Nakreslete tento signál pro $n \in 0 \ldots 15$. Kreslete jako jednotlivé vzorky (jako funkce **stem** v Matlabu/Octave).



předběh. o $\frac{1}{4}$ periody

Příklad 12 Pro signál z příkladu 11 určete indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů Diskrétní Fourierovy řady (DFŘ) $\tilde{X}[k]$ pro $k \in 0 \ldots N-1$

cosinusoida s frekvencí $\frac{2\pi}{N}$ má $\tilde{X}[1] = \frac{N \cdot \text{amplituda}}{2} e^{j\,\text{fáze}}$

$\tilde{X}[N-1] = \frac{N \cdot \text{amplituda}}{2} e^{-j\,\text{fáze}}$

$X[1] = \frac{4 \cdot 8}{2} e^{j\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{16j}}$

$X[7] = \frac{4 \cdot 8}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{-16j}}$

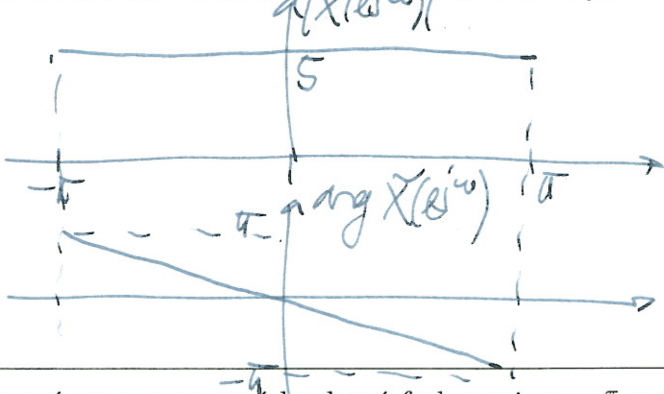
Příklad 13 Signál s diskrétním časem má jediný nenulový vzorek: $x[1] = 5$, všechny ostatní jsou nulové. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků) pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega \in -\pi \ldots \pi$. Vyznačte důležité hodnoty na ose ω i na svislých osách.

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$

$= 5 \cdot e^{-j\omega \cdot 1}$

absolutní hodnota $= 5$

fáze $= -\omega$



Příklad 14 <u>Reálný signál</u> s diskrétním časem má na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{\pi}{8}$ rad hodnotu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT): $\tilde{X}(e^{j\frac{\pi}{8}}) = -1 - j$. Určete, jakou hodnotu má DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{15\pi}{8}$. Pokud to nejde, napište jasně "NEJDE".

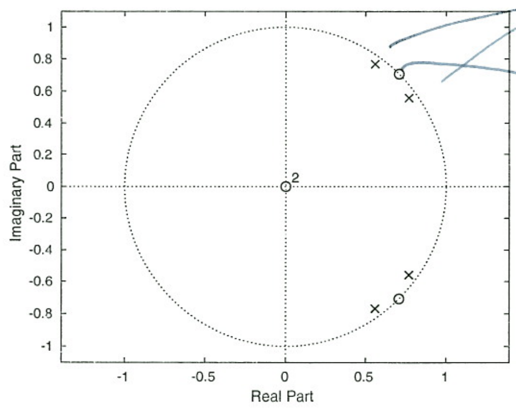
DTFT je symetrická a periodická

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega+2\pi)})$

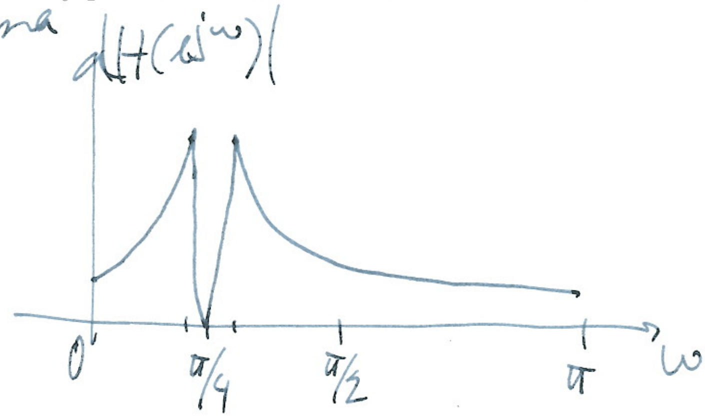
$\tilde{X}(e^{j\frac{15\pi}{8}}) = \tilde{X}(e^{-j\frac{\pi}{8}}) = \tilde{X}^*(e^{j\pi/8}) = \underline{\underline{-1+j}}$

Příklad 15 Přenosová funkce $H(z)$ systému s diskrétním časem má nulové body a póly rozmístěné dle obrázku. V bodě 0 je dvojitý nulový bod, další nulové body leží na jednotkové kružnici. Nakreslete přibližný průběh modulu jeho kmitočtové charakteristiky pro normované kruhové frekvence $\omega \in 0 \ldots \pi$ rad.

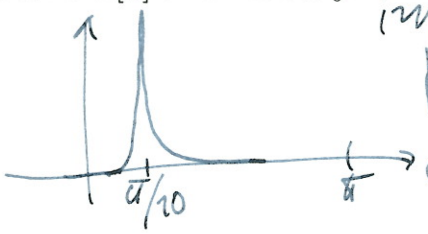


maxima

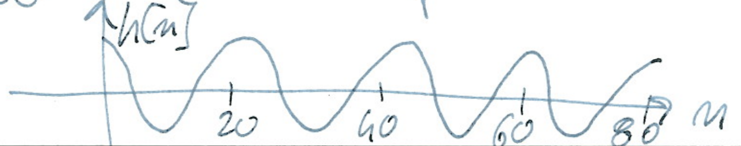
fundal nula



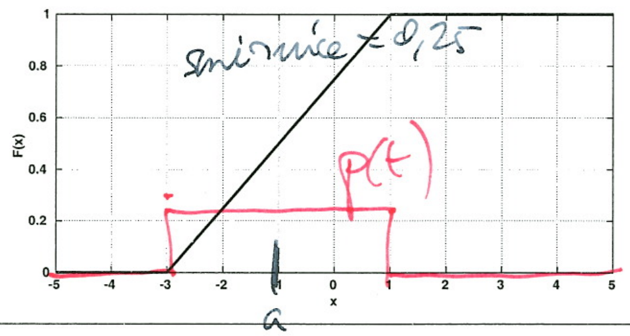
Příklad 16 Systému s diskrétním časem je pásmová propusť, jeho frekvenční charakteristika má velmi ostré maximum na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{\pi}{10}$ rad. Odhadněte, jak bude vypadat jeho impulsní odezva $h[n]$ a nakreslete ji.



imp. odezva je podobná tomu, co filtr propouští: signály s norm. kruh. frekvencí $\frac{\pi}{10}$. Bude to tedy něco periodického s periodou $N = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ vzorků



Příklad 17 Stacionární náhodný signál má distribuční funkci na obrázku. Určete jeho střední hodnotu.



$p(t) = \frac{dF(x)}{dx}$

$a = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\,dx = 0{,}25 \int_{-3}^{1} x\,dx =$

$= 0{,}25 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{1} = 0{,}25\left(\frac{1}{2} - \frac{9}{2}\right) = 0{,}25(-4) = -1$

$a = $ ...... -1 ......

Příklad 18 Náhodný signál je bílý šum, jeho vzorky jsou tedy nekorelované a jeho spektrální hustota výkonu je pro všechny frekvence konstantní. Uveďte, jak se dá takový šum "obarvit", tedy zajistit, aby vzorky byly korelované a aby jeho spektrální hustota výkonu nebyla konstatní.

Jakýmkoli číslicovým filtrem, který zanese závislosti mezi vzorky a změní spek. hustotu výkonu podle své frekv. charakteristiky.

Příklad 19 $x[n]$ je stacionární náhodný signál, $\frac{1}{4}$ jeho vzorků má hodnotu +5, $\frac{3}{4}$ jeho vzorků mají hodnotu -5. Tento signál je kvantován, kvantizér je ale porouchaný a pro všechny vstupní vzorky dává hodnotu kvantovaného signálu $x_q[n] = 5$. Vypočtěte poměr signálu ke kvantovacímu šumu (SNR), hodnotu uveďte v dB. Pomůcka:

a	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
$\log_{10} a$	$-\infty$	-0.6021	-0.4771	-0.3010	-0.1761	0

např.: 4 vzorky

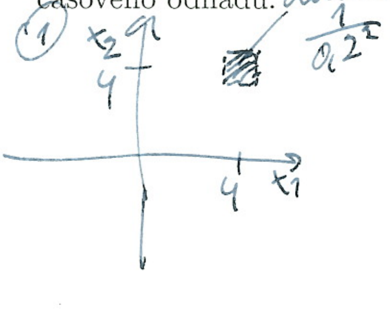
$x[n]$	5	-5	-5	-5
$x_q[n]$	5	5	5	5
chyba $e[n]$	0	10	10	10

$SNR = 10\log_{10}\frac{P_x}{P_e} = 10\log_{10}\frac{100}{300} =$

$= 10\log_{10}\frac{\frac{4\cdot 5^2}{4}}{\frac{3\cdot 10^2}{4}} = -4.7\,dB$

Příklad 20 Stacionární a ergodický diskrétní náhodný signál má hodnoty rovnoměrně rozděleny mezi 3.9 a 4.1. Odhadněte korelační koeficient $R[1]$ tohoto signálu. Můžete postupovat pomocí odhadu sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ s následnou integrací, nebo pomocí vychýleného časového odhadu.

①



$R[1] = \iint_{x_1 x_2} x_1 x_2\, p(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 =$

$= 4\cdot 4\cdot \frac{1}{0{,}2^2}\cdot 0{,}2^2 = 16$

② Např. 100 vzorků:

$R[1] = \frac{1}{100}\sum x[n]x[n+1] =$

$= \frac{99}{100}\cdot(\text{asi } 4)^2 \doteq 16$