## Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 22.1.2019, skupina A REF

Login: ...................... Příjmení a jméno: .......................................................... Podpis: ............................
(prosím čitelně!)

**Příklad 1** Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(2t+1) = x\left(2\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)$

počátek $-\frac{1}{2}$


**Příklad 2** Signál s diskrétním časem má nenulových $N = 100$ vzorků: $x[n] = \begin{cases} -5 & \text{pro } 0 \le n \le 49 \\ 4 & \text{pro } 50 \le n \le 99 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Spočítejte jeho celkovou energii.

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = 50\cdot(-5)^2 + 50\cdot 4^2 = 50\cdot 25 + 50\cdot 16 =$$
$$= 50 \cdot 41 = \underline{\underline{2050}}$$

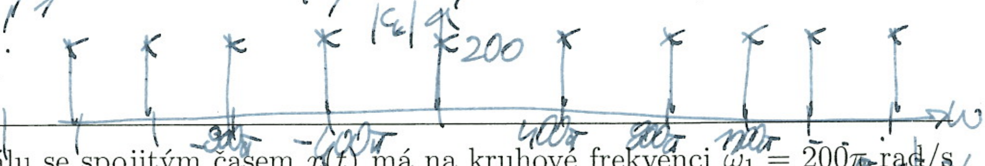
$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{0{,}005} = 400\pi$ rad/s

**Příklad 3** Je dán signál se spojitým časem: sled Diracových impulsů $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$, s periodou $T_1 = 5$ ms. Vypočtěte hodnoty všech jeho nenulových koeficientů Fourierovy řady $c_k$ a nakreslete jejich moduly $c_k$ pro $k \in -5 \dots 5$ na správné frekvence. Pomůcka: můžete využít vzorce pro výpočet koeficientů FŘ sledu obdélníkových impulsů $c_k = D\frac{\vartheta}{T_1}\operatorname{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$. viz vzorkování

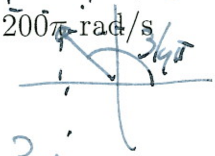
u Diracova impulsu je $D = \infty$ a $\vartheta = 0$, ale $D\vartheta = 1$.

$$c_k = \frac{1}{T_1}\operatorname{sinc}\left(\frac{0}{2}k\omega_1\right) = \frac{1}{T_1}\operatorname{sinc}(0) = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0{,}005} = 200.$$

Všechny $c_k$ jsou stejné!




**Příklad 4** Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 200\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \sqrt{18}e^{j\frac{3\pi}{4}}$. Určete hodnotu spektrální funkce předběhnutého signálu: $y(t) = x(t + \frac{1}{100})$ na téže kruhové frekvenci. Hodnotu napište **ve složkovém tvaru**.



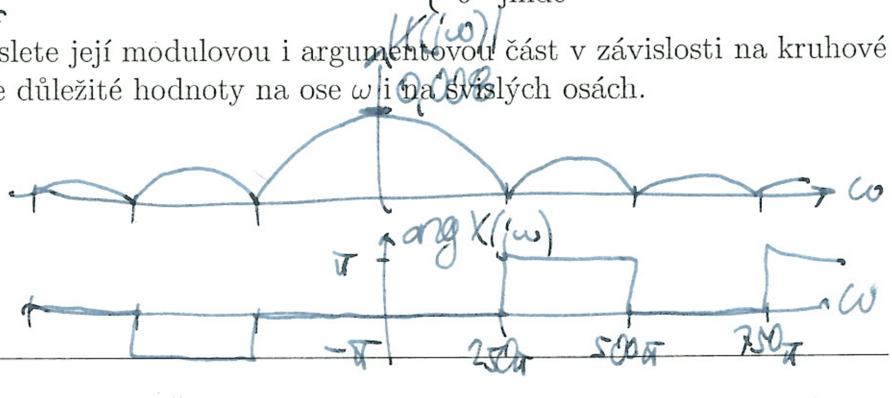

$Y(j\omega_1) =$ $X(j\omega_1)\cdot e^{+j\omega_1\tau} = \sqrt{18}e^{j\frac{3}{4}\pi}\cdot e^{j200\pi\cdot\frac{1}{100}} = \sqrt{18}e^{j\frac{3}{4}\pi}\cdot \underbrace{e^{j2\pi}}_{=1,\ \text{žádná změna!}} = \underline{\underline{-3+3j}}$

**Příklad 5** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -4 \text{ ms} \le t \le 4 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočtětě jeho spektrální funkci a nakreslete její modulovou i argumentovou část v závislosti na kruhové frekvenci $\omega$ (do dvou obrázků). Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách.

$$X(j\omega) = D\vartheta\operatorname{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) =$$
$$1\cdot 0{,}008\cdot\operatorname{sinc}(0{,}004\,\omega)$$

$$0{,}004\,\omega = \pi$$
$$\omega = \frac{\pi}{0{,}004} = 250\pi$$



A

**Příklad 6** Napište matematicky i krátce slovně, jaký je vztah mezi impulsní odezvou $h(t)$ systému se spojitým časem a kmitočtovou charakteristikou $H(j\omega)$ tohoto systému.

$H(j\omega) = \mathcal{F}(h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$

Fourierova transformace

Kmitočtová char. je spektrální funkcí impulsní odezvy.

---

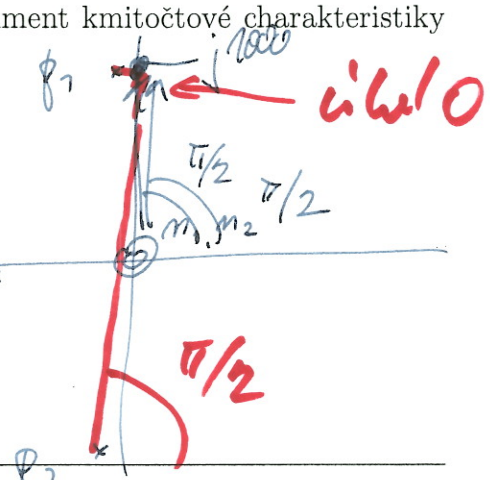
**Příklad 7** Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -4 + 1000j$, $p_2 = -4 - 1000j$. Určete modul i argument kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ tohoto systému pro frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

modul = součin délek modrých / součin délek červených =

$= \frac{1000 \cdot 1000}{4 \cdot 2000} = \frac{1000}{8} = 125$

argument = Σ úhlů modrých − Σ úhlů červených =

$\pi/2 + \pi/2 - \pi/2 - 0 = \pi/2$



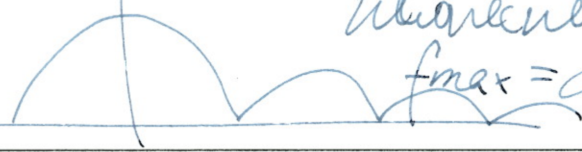

$|H(j1000)| =$ ...125...., $\arg H(j1000) =$ ...$\pi/2$... rad.

---

**Příklad 8** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro } -4 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Uveďte, jaká je minimální vzorkovací frekvence $F_{s_{min}}$ pro jeho ideální vzorkování a ideální rekonstrukci.

správná odpověď je „nelze ideálně vzorkovat a rekonstruovat".



nekonečné spektrum! $f_{max} = \infty$

$F_{s_{min}} =$ ...$\infty$... Hz

---

**Příklad 9** Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1[n]$ | 4 | 0 | 1 | 0 |
| $x_2[n]$ | 1 | 1 | 0 | 3 |
| $x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$ | 4 | 7 | 1 | 13 |

---

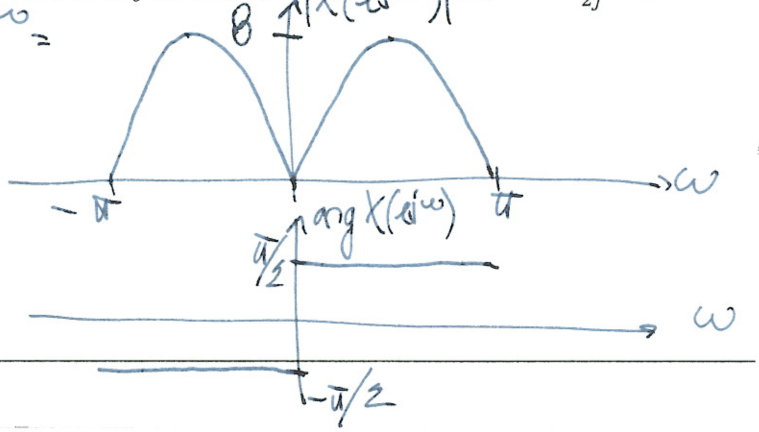
**Příklad 10** Diskrétní signál má pouze dva vzorky nenulové: $x[1] = 4$, $x[-1] = -4$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskrétním časem $\tilde{X}(e^{j\omega})$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou) pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega \in -\pi \dots \pi$. Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách. Pomůcka: $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$.

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = 4 \cdot e^{j\omega} - 4 e^{-j\omega} =$

$= 4 \cdot 2j \sin(\omega) = 8j \sin\omega$

kladné hodnoty sin $\Rightarrow j = e^{j\pi/2}$

záporné $\Rightarrow -j = e^{-j\pi/2}$



A

**Příklad 11** V tabulce jsou uvedeny hodnoty diskrétní Fourierovy řady reálného diskrétního signálu s periodou $N = 8$. Doplňte chybějící hodnoty.

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$$

| $k$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{X}[k]$ | -2 | 1-j | -3 | 5 | -3 | 1+j | -2 | 1 |

**Příklad 12** Diskrétní signál s délkou $N = 100$ má všechny vzorky stejné: $x[n] = 5$. Vypočtěte zadané koeficienty jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

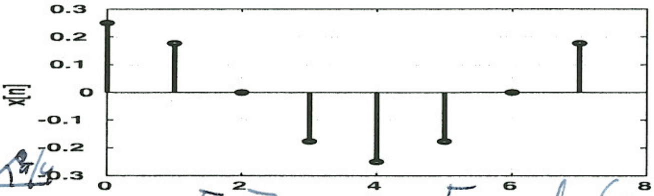
stejnosměrný signál má jen frekvenci 0 !

$$X[k] = \sum_{n=0} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad X[0] = \sum x[n] \underbrace{e^{-j0}}_{1} = \text{součet vzorků}$$

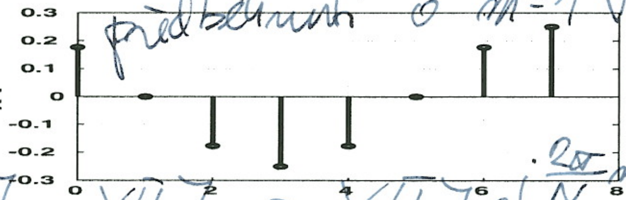
$$X[3] = \sum 5 \cdot e^{-j\frac{2\pi 3n}{N}} \text{ udělá za 100 vzorků 3 otáčky, součet 0}$$

X[0] = ....500........, X[3] = .....0.......,

**Příklad 13** Signál $x[n]$ s diskrétním časem o délce $N = 8$ na obrázku byl kruhově posunut - viz druhý obrázek. První koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) signálu $x[n]$ má hodnotu $X[1] = 1$. Určete (ve složkovém tvaru) první koeficient DFT posunutého signálu.



předběhnutí o $m=1$ vzorek

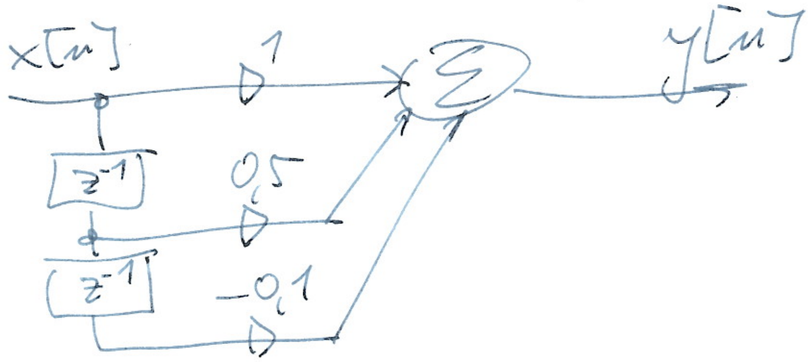


$$x[n] \longrightarrow x[\mathrm{mod}_N(n+m)] \qquad X[k] \longrightarrow X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}mk}$$

$Y[1] =$ ....$1 e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 1\cdot 1}$ $= 1 e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Příklad 14** Impulsní odezva systému s diskrétním časem (neboli číslicového filtru), má pouze tři nenulové vzorky: $h[0] = 1$, $h[1] = 0.5$, $h[2] = -0.1$

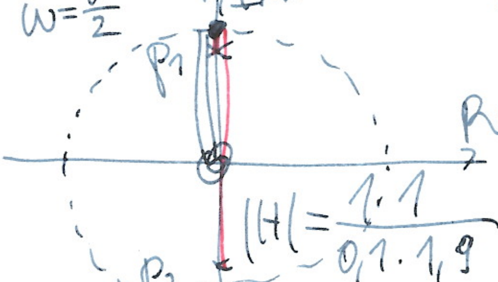
Nakreslete schema tohoto filtru. Pomůcka: blok zpožďující o jeden vzorek (většinou značený $z^{-1}$) má pouze **jeden** výstup.



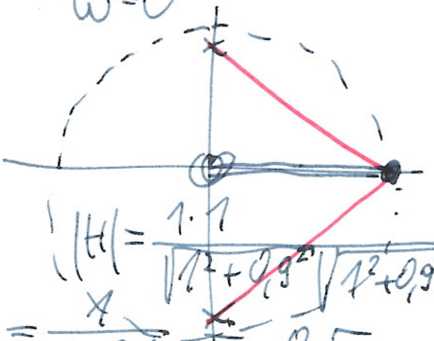

**Příklad 15** Přenosová funkce $H(z)$ systému s diskrétním časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.9j$, $p_2 = -0.9j$.

Nakreslete průběh modulu jeho kmitočtové charakteristiky pro normované kruhové frekvence $\omega \in 0 \ldots \pi$ rad. Polohu maxima musíte určit přesně, hodnota maxima stačí pouze přibližně.

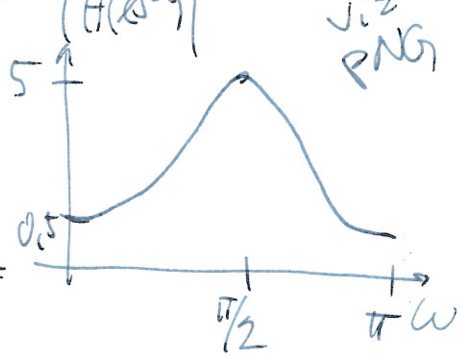
$\omega = \frac{\pi}{2}$ "z" $\omega = 0$ viz PNG




$$|H| = \frac{1 \cdot 1}{0{,}1 \cdot 1{,}9} = \doteq 5$$



$$|H| = \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1^2+0{,}9^2}\sqrt{1^2+0{,}9^2}} = \frac{1}{1{,}81} \doteq 0{,}5$$



A

**Příklad 16** Napište přenosovou funkci $H(z)$ systému s diskrétním časem z příkladu 15.

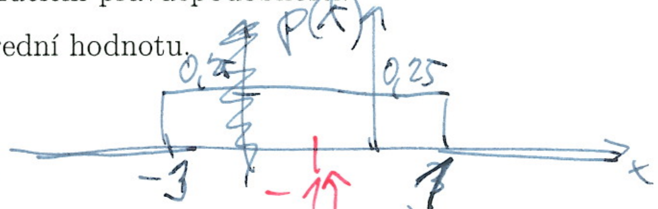
$$H(z) = \frac{(z-0)(z-0)}{(z-0{,}9j)(z+0{,}9j)} = \frac{z^2}{z^2+0{,}81} = \frac{1}{1+0{,}81z^{-2}}$$

---

**Příklad 17** Stacionární signál má funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro} \quad -3 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete jeho střední hodnotu.




$$a = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \int_{-3}^{1} 0{,}25 x \, dx = 0{,}25 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{1} = 0{,}125(1^2-(-3)^2) = 0{,}125(-8) = -1$$

nebo graficky jako těžiště obdélníka

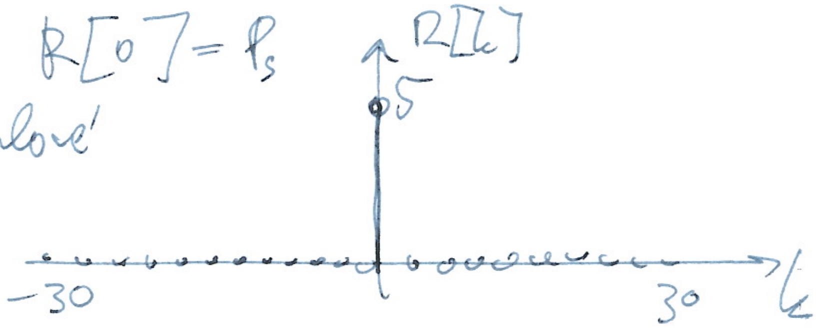
$a = -1$

---

**Příklad 18** Náhodný signál je bílý šum se středním výkonem $P_s = 5$. Nakreslete průběh jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro $k$ od -30 do 30.

kromě $R[0]$ všechny nulové

$R[0] = P_s$




---

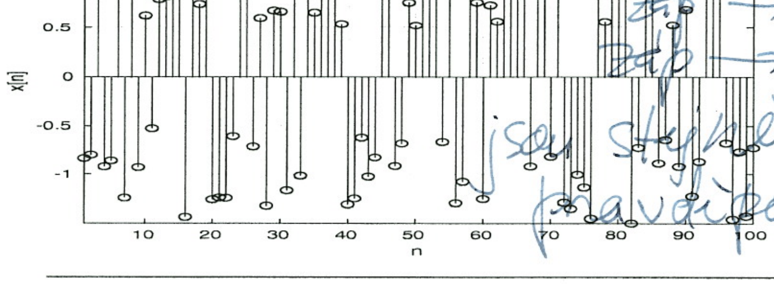
**Příklad 19** Hodnoty cukernatosti sladu v pivovaru byly původně kvantovány na $b_1 = 8$ bitech. Dva vodiče bylo ale nutné využít na jiné věci (jeden pro zapínání ohřevu kotle, jeden pro buzení sládka), pro kvantování tedy zbylo pouze $b_2 = 6$ bitů. Uveďte, o kolik dB se zhoršil poměr signálu ke kvantovacímu šumu.

1 bit $\simeq$ 6 dB

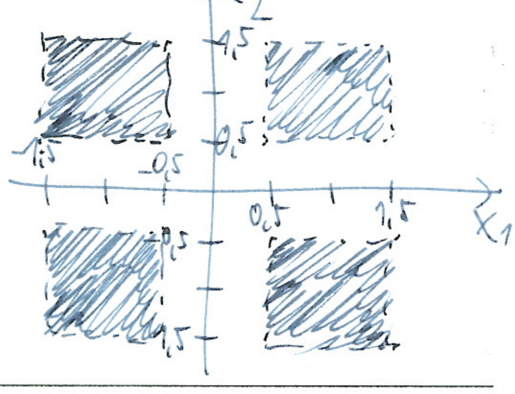
zhoršení SNR o 12 dB

---

**Příklad 20** Na obrázku je stacionární a ergodický diskrétní náhodný signál. Kladné vzorky mohou nabývat hodnoty od 0.5 do 1.5, záporné vzorky od -1.5 do -0.5. Vzorky jsou nekorelované, vzorek $x[n]$ tedy nezávisí na žádném jiném. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu na obrázku pro sousední vzorky (tedy $k = 1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu $x_1$ vodorovně, $x_2$ svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).




kladný → kladný
kladný → záp.
záp → záp.
záp → kladný
jsou stejně pravděpodobné




---

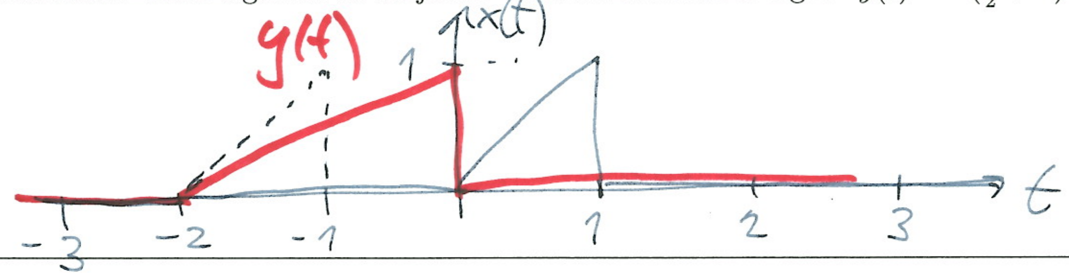
## Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 22.1.2019, skupina B REF

Login: ..................... Příjmení a jméno: .............................................. Podpis: ............................
(prosím čitelně!)

**Příklad 1** Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(\frac{t}{2} + 1)$ $= x\left(\frac{t+2}{2}\right)$

počátek −2




**Příklad 2** Signál s diskrétním časem má nenulových $N = 100$ vzorků: $x[n] = \begin{cases} -5 & \text{pro } 0 \leq n \leq 49 \\ 3 & \text{pro } 50 \leq n \leq 99 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

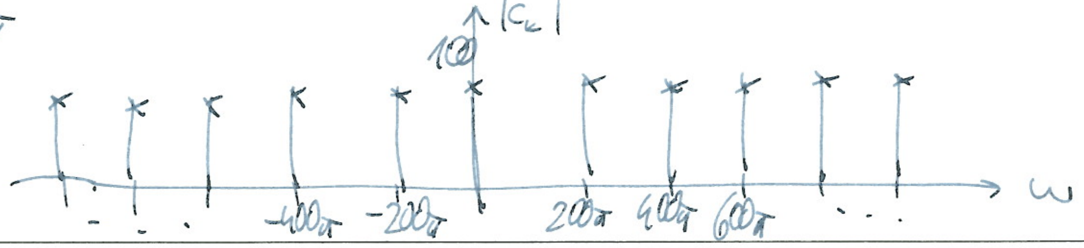
Spočítejte jeho celkovou energii. viz A

$E = 50 \cdot 25 + 50 \cdot 9 = 50 \cdot 34 = \underline{\underline{1700}}$

**Příklad 3** Je dán signál se spojitým časem: sled Diracových impulsů $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$, s periodou $T_1 = 10$ ms. Vypočtěte hodnoty všech jeho nenulových koeficientů Fourierovy řady $c_k$ a nakreslete jejich moduly $c_k$ pro $k \in -5 \ldots 5$ na správné frekvence. Pomůcka: můžete využít vzorce pro výpočet koeficientů FŘ sledu obdélníkových impulsů $c_k = D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$. viz A

$\omega_1 = 200\pi$

$\frac{1}{T_1} = 100$




**Příklad 4** Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 200\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \sqrt{18}e^{j\frac{3\pi}{4}}$. Určete hodnotu spektrální funkce předběhnutého signálu: $y(t) = x(t + \frac{3}{100})$ na téže kruhové frekvenci. Hodnotu napište **ve složkovém tvaru**.

viz A

$Y(j\omega_1) = \sqrt{18}e^{j\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{j200\pi \cdot \frac{3}{100}} = \sqrt{18}e^{j\frac{3}{4}\pi} \cdot \underbrace{e^{j6\pi}}_{=1,\ \text{žádná změna}} = \underline{-3+3j}$

$3/4\pi$

**Příklad 5** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -2 \text{ ms} \leq t \leq 2 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

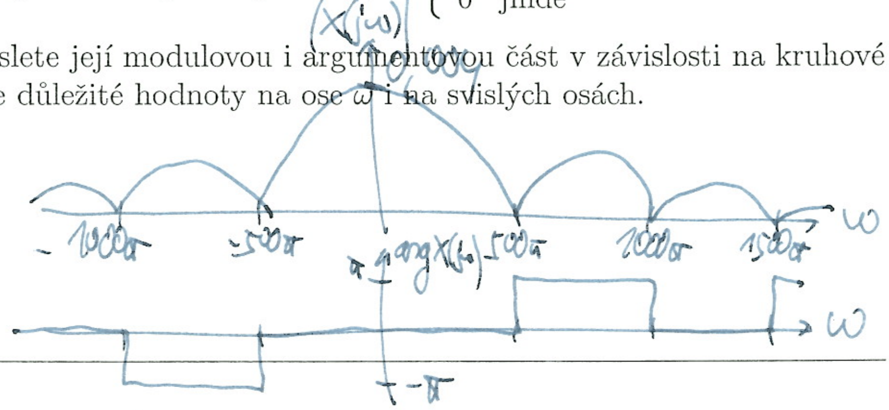
viz A

Vypočtěte jeho spektrální funkci a nakreslete její modulovou i argumentovou část v závislosti na kruhové frekvenci $\omega$ (do dvou obrázků). Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách.

$D\vartheta = 0{,}004$

$0{,}002\,\omega = \pi$

$\omega = \frac{\pi}{0{,}002} = 500\pi$



B

**Příklad 6** Napište matematicky i krátce slovně, jaký je vztah mezi impulsní odezvou $h(t)$ systému se spojitým časem a kmitočtovou charakteristikou $H(j\omega)$ tohoto systému.

viz A

---

**Příklad 7** Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -3 + 1000j$, $p_2 = -3 - 1000j$. Určete modul i argument kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ tohoto systému pro frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

viz A

$$\text{modul} = \frac{1000 \cdot 1000}{3 \cdot 2000} = \frac{1000}{6} = 166$$

$$\text{argument} = \pi/2 + \pi/2 - \pi/2 - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$|H(j1000)| =$ 166, $\arg H(j1000) =$ $\frac{\pi}{2}$ rad.

---

**Příklad 8** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \text{ ms} \le t \le 1 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Uveďte, jaká je minimální vzorkovací frekvence $F_{s_{min}}$ pro jeho ideální vzorkování a ideální rekonstrukci.

viz A

$F_{s_{min}} =$............ Hz

---

**Příklad 9** Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

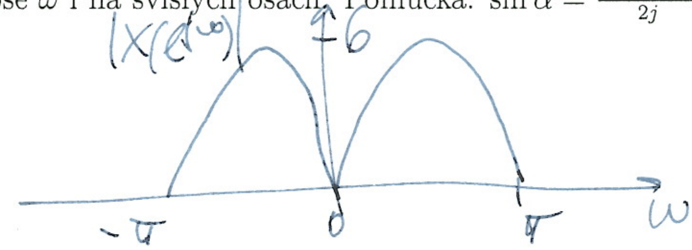
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1[n]$ | 4 | 0 | 1 | 0 |
| $x_2[n]$ | -1 | 1 | 0 | 3 |
| $x_1[n] \circledast x_2[n]$ | -4 | 7 | -1 | 13 |

---

**Příklad 10** Diskrétní signál má pouze dva vzorky nenulové: $x[1] = 3$, $x[-1] = -3$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskrétním časem $\tilde{X}(e^{j\omega})$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou) pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega \in -\pi \dots \pi$. Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách. Pomůcka: $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$.

viz A

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = 6j \sin \omega$$




argument viz A

3

**Příklad 11** V tabulce jsou uvedeny hodnoty diskrétní Fourierovy řady reálného diskrétního signálu s periodou $N = 8$. Doplňte chybějící hodnoty.

| $k$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{X}[k]$ | | | | 5 | -3 | 1+j | -2 | 1 |

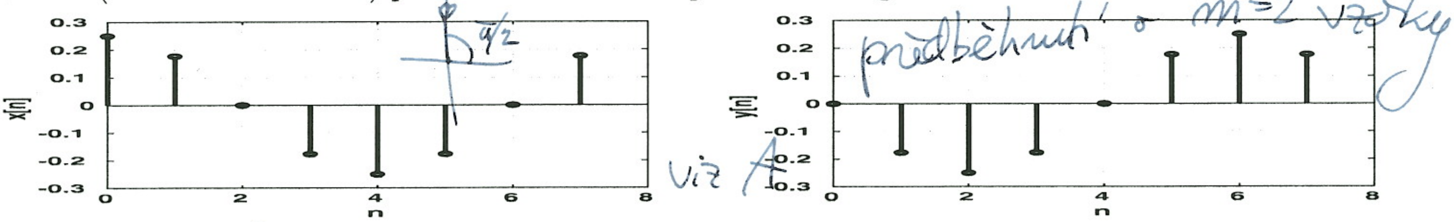
viz A

**Příklad 12** Diskrétní signál s délkou $N = 100$ má všechny vzorky stejné: $x[n] = 5$. Vypočtětě zadané koeficienty jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

X[0] = 500, X[2] = 0,

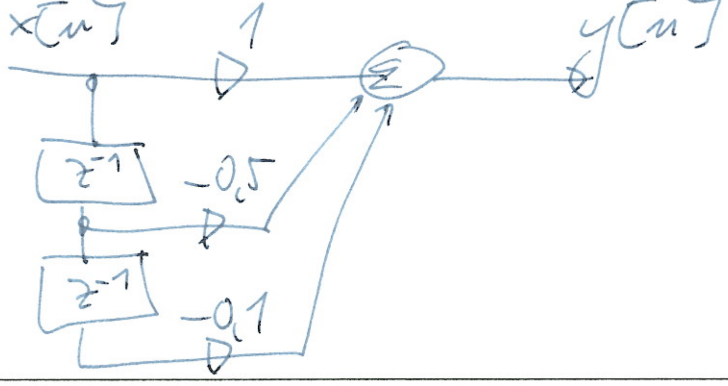
**Příklad 13** Signál $x[n]$ s diskrétním časem o délce $N = 8$ na obrázku byl kruhově posunut - viz druhý obrázek. První koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) signálu $x[n]$ má hodnotu $X[1] = 1$. Určete (ve složkovém tvaru) první koeficient DFT posunutého signálu.




viz A

$Y[1] = 1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{8}\cdot 2 \cdot 1} = 1 \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

**Příklad 14** Impulsní odezva systému s diskrétním časem (neboli číslicového filtru), má pouze tři nenulové vzorky: $h[0] = 1$, $h[1] = -0.5$, $h[2] = -0.1$
Nakreslete schema tohoto filtru. Pomůcka: blok zpožďující o jeden vzorek (většinou značený $z^{-1}$) má pouze **jeden** výstup.




**Příklad 15** Přenosová funkce $H(z)$ systému s diskrétním časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.8j$, $p_2 = -0.8j$.
Nakreslete průběh modulu jeho kmitočtové charakteristiky pro normované kruhové frekvence $\omega \in 0 \ldots \pi$ rad. Polohu maxima musíte určit přesně, hodnota maxima stačí pouze přibližně.

viz A

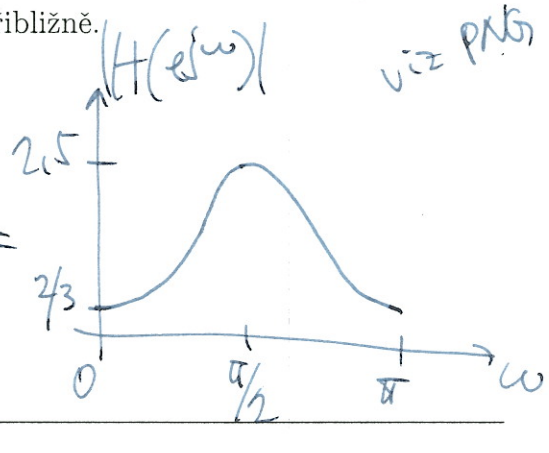
viz PNG

$\omega = \frac{\pi}{2}$

$|H| = \frac{1 \cdot 1}{0{,}2 \cdot 1{,}8} \doteq 2{,}5$

$\omega = 0$

$|H| = \frac{1 \cdot 1}{1 + 0{,}8^2} = \frac{1}{1{,}64} \doteq \frac{2}{3}$



B

**Příklad 16** Napište přenosovou funkci $H(z)$ systému s diskrétním časem z příkladu 15.

viz A

$H(z) = \frac{1}{1 + 0{,}64 z^{-2}}$

**Příklad 17** Stacionární signál má funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro} \quad -1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete jeho střední hodnotu.

viz A $\ldots = 0{,}25\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3} = 0{,}125\,(9-1) = 1$

nebo graficky

$a = 1$

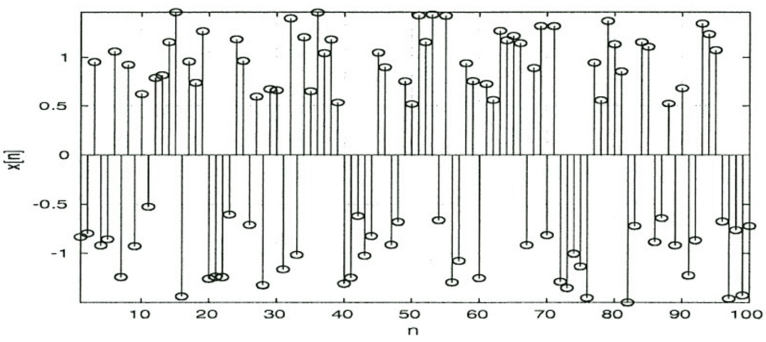
**Příklad 18** Náhodný signál je bílý šum se středním výkonem $P_s = 5$. Nakreslete průběh jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro $k$ od -30 do 30.

viz A

**Příklad 19** Hodnoty cukernatosti sladu v pivovaru byly původně kvantovány na $b_1 = 8$ bitech. Dva vodiče bylo ale nutné využít na jiné věci (jeden pro zapínání ohřevu kotle, jeden pro buzení sládka), pro kvantování tedy zbylo pouze $b_2 = 6$ bitů. Uveďte, o kolik dB se zhoršil poměr signálu ke kvantovacímu šumu.

viz A

**Příklad 20** Na obrázku je stacionární a ergodický diskrétní náhodný signál. Kladné vzorky mohou nabývat hodnoty od 0.5 do 1.5, záporné vzorky od -1.5 do -0.5. Vzorky jsou nekorelované, vzorek $x[n]$ tedy nezávisí na žádném jiném. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu na obrázku pro sousední vzorky (tedy $k = 1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu $x_1$ vodorovně, $x_2$ svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).




viz A

# Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 22.1.2019, skupina C

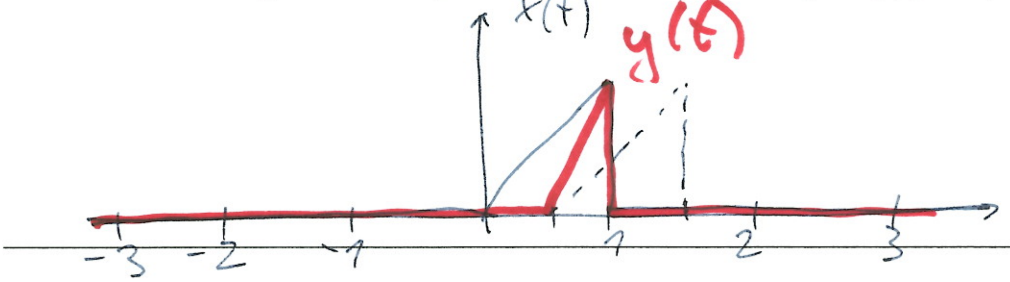
REF

Login: ..................... Příjmení a jméno: ............................................... Podpis: ..............................
(prosím čitelně!)

**Příklad 1** Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(2t-1) = x\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)$

počátek $\frac{1}{2}$




**Příklad 2** Signál s diskrétním časem má nenulových $N = 100$ vzorků: $x[n] = \begin{cases} -5 & \text{pro } 0 \le n \le 49 \\ 2 & \text{pro } 50 \le n \le 99 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

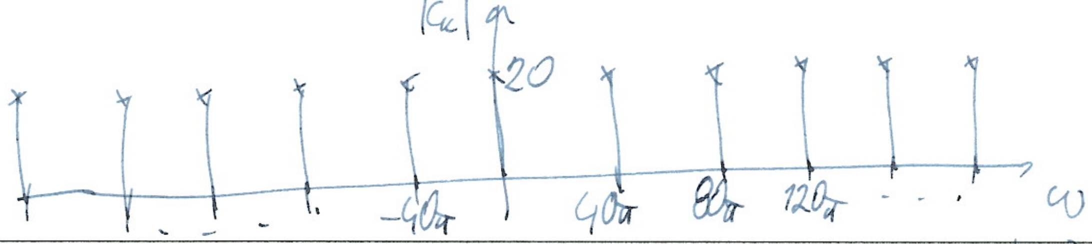
Spočítejte jeho celkovou energii. viz A

$E = 50 \cdot 25 + 50 \cdot 4 = 50 \cdot 29 = \underline{1450}$

**Příklad 3** Je dán signál se spojitým časem: sled Diracových impulsů $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$, s periodou $T_1 = 50$ ms. Vypočtěte hodnoty všech jeho nenulových koeficientů Fourierovy řady $c_k$ a nakreslete jejich moduly $c_k$ pro $k \in -5 \dots 5$ na správné frekvence. Pomůcka: můžete využít vzorce pro výpočet koeficientů FŘ sledu obdélníkových impulsů $c_k = D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$. viz A

$\omega_1 = 40\pi$

$\frac{1}{T_1} = 20$




**Příklad 4** Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 200\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \sqrt{18}e^{j\frac{3\pi}{4}}$. Určete hodnotu spektrální funkce předběhnutého signálu: $y(t) = x(t + \frac{1}{200})$ na téže kruhové frekvenci. Hodnotu napište **ve složkovém tvaru**.

viz A

$Y(j\omega_1) = \sqrt{18}\, e^{j\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{j200\pi \cdot \frac{1}{200}} = \sqrt{18}\, e^{j\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{j\pi} = \underline{3 - 3j}$

**Příklad 5** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \text{ ms} \le t \le 1 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

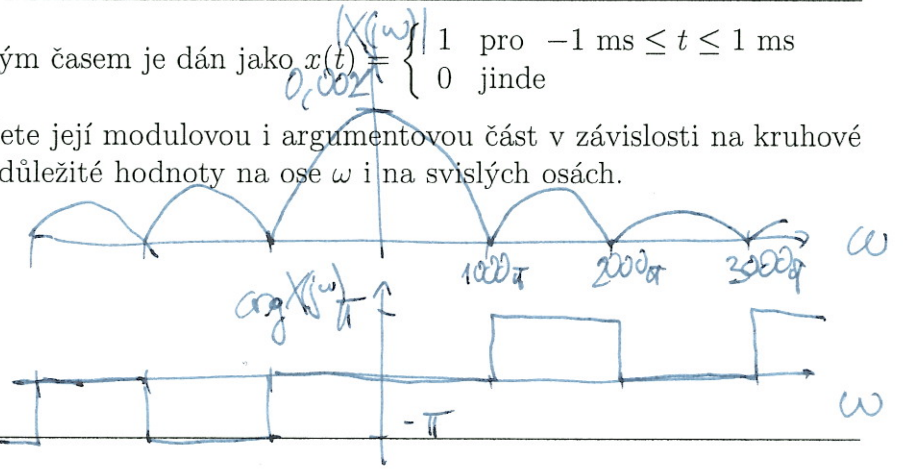
viz A

Vypočtětě jeho spektrální funkci a nakreslete její modulovou i argumentovou část v závislosti na kruhové frekvenci $\omega$ (do dvou obrázků). Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách.

$D\vartheta = 0{,}002$

$0{,}001\omega = \pi$

$\omega = 1000\pi$



C

**Příklad 6** Napište matematicky i krátce slovně, jaký je vztah mezi impulsní odezvou $h(t)$ systému se spojitým časem a kmitočtovou charakteristikou $H(j\omega)$ tohoto systému.

viz A

---

**Příklad 7** Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -2 + 1000j$, $p_2 = -2 - 1000j$. Určete modul i argument kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ tohoto systému pro frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s. viz A

$$\text{modul} = \frac{1000 \cdot 1000}{2 \cdot 2000} = 250$$

$$\text{argument} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$|H(j1000)| =$ 250, $\arg H(j1000) =$ $\frac{\pi}{2}$ rad.

---

**Příklad 8** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -2 \text{ ms} \le t \le 2 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Uveďte, jaká je minimální vzorkovací frekvence $F_{s_{min}}$ pro jeho ideální vzorkování a ideální rekonstrukci.

viz A

$F_{s_{min}} =$............. Hz

---

**Příklad 9** Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

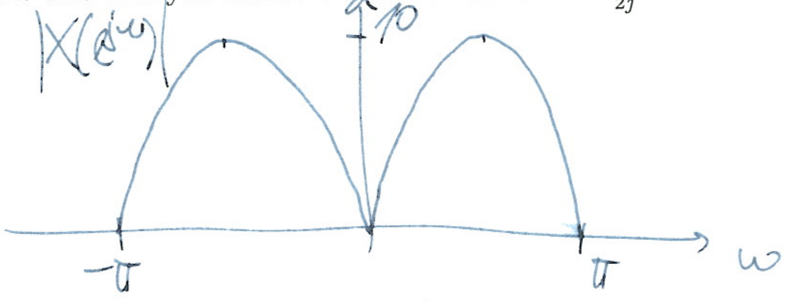
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1[n]$ | 4 | 0 | 1 | 0 |
| $x_2[n]$ | 1 | -1 | 0 | 3 |
| $x_1[n] \circledast x_2[n]$ | 4 | -1 | 1 | 11 |

---

**Příklad 10** Diskrétní signál má pouze dva vzorky nenulové: $x[1] = 5$, $x[-1] = -5$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskrétním časem $\tilde{X}(e^{j\omega})$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou) pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega \in -\pi \dots \pi$. Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách. Pomůcka: $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$.

viz A

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = 10j\sin\omega$$




argument viz A

C

**Příklad 11** V tabulce jsou uvedeny hodnoty diskrétní Fourierovy řady reálného diskrétního signálu s periodou $N = 8$. Doplňte chybějící hodnoty.

| $k$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{X}[k]$ | | | | 5 | -3 | 1+j | -2 | 1 |

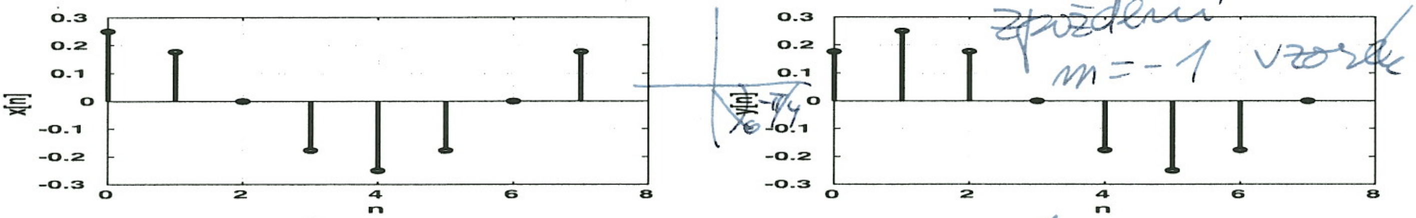
viz A

**Příklad 12** Diskrétní signál s délkou $N = 100$ má všechny vzorky stejné: $x[n] = 5$. Vypočtětě zadané koeficienty jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

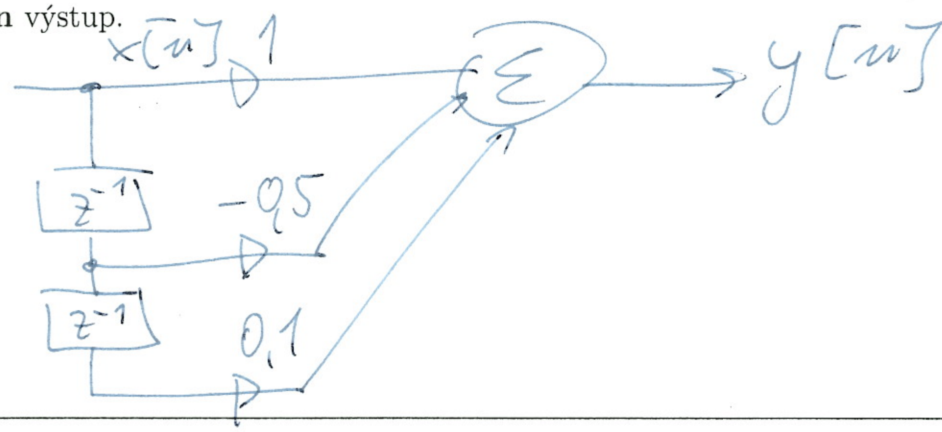
X[0] = 500, X[4] = 0,

**Příklad 13** Signál $x[n]$ s diskrétním časem o délce $N = 8$ na obrázku byl kruhově posunut - viz druhý obrázek. První koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) signálu $x[n]$ má hodnotu $X[1] = 1$. Určete (ve složkovém tvaru) první koeficient DFT posunutého signálu.




$Y[1] = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 1 \cdot 1} = 1 e^{-j\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Příklad 14** Impulsní odezva systému s diskrétním časem (neboli číslicového filtru), má pouze tři nenulové vzorky: $h[0] = 1$, $h[1] = -0.5$, $h[2] = 0.1$
Nakreslete schema tohoto filtru. Pomůcka: blok zpožďující o jeden vzorek (většinou značený $z^{-1}$) má pouze **jeden** výstup.




**Příklad 15** Přenosová funkce $H(z)$ systému s diskrétním časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.7j$, $p_2 = -0.7j$.
Nakreslete průběh modulu jeho kmitočtové charakteristiky pro normované kruhové frekvence $\omega \in 0 \dots \pi$ rad. Polohu maxima musíte určit přesně, hodnota maxima stačí pouze přibližně.

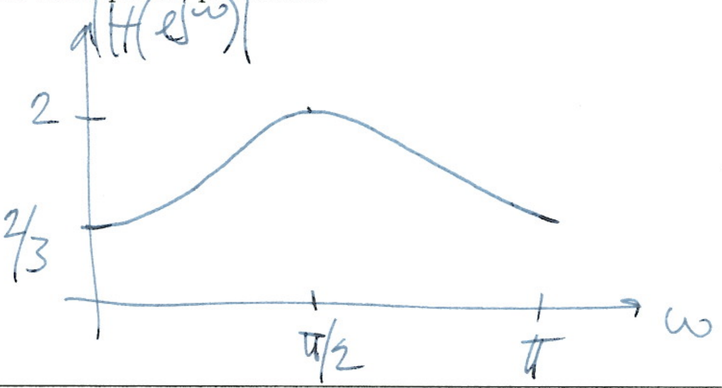
viz A

$\omega = \pi/2$

$|H| = \frac{1 \cdot 1}{0,3 \cdot 1,7} \doteq \frac{1}{0,5} = 2$

$\omega = 0$

$|H| = \frac{1 \cdot 1}{1 + 0,7^2} \doteq \frac{2}{3}$



C

**Příklad 16** Napište přenosovou funkci $H(z)$ systému s diskrétním časem z příkladu 15.

viz A

$H(z) = \frac{1}{1 + 0{,}49 z^{-2}}$

**Příklad 17** Stacionární signál má funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } 0 \le x \le 4 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete jeho střední hodnotu.

viz A

$$\ldots = 0{,}25 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 0{,}125(4^2 - 0^2) = 0{,}125 \cdot 16 = 2$$

nebo graficky

$a = 2$

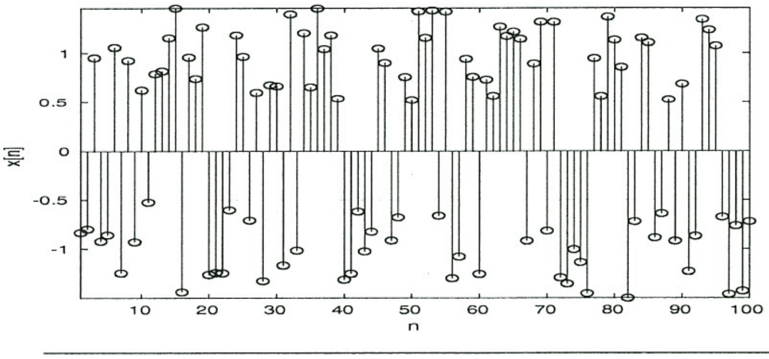
**Příklad 18** Náhodný signál je bílý šum se středním výkonem $P_s = 5$. Nakreslete průběh jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro $k$ od -30 do 30.

viz A

**Příklad 19** Hodnoty cukernatosti sladu v pivovaru byly původně kvantovány na $b_1 = 8$ bitech. Dva vodiče bylo ale nutné využít na jiné věci (jeden pro zapínání ohřevu kotle, jeden pro buzení sládka), pro kvantování tedy zbylo pouze $b_2 = 6$ bitů. Uveďte, o kolik dB se zhoršil poměr signálu ke kvantovacímu šumu.

viz A

**Příklad 20** Na obrázku je stacionární a ergodický diskrétní náhodný signál. Kladné vzorky mohou nabývat hodnoty od 0.5 do 1.5, záporné vzorky od -1.5 do -0.5. Vzorky jsou nekorelované, vzorek $x[n]$ tedy nezávisí na žádném jiném. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu na obrázku pro sousední vzorky (tedy $k = 1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu $x_1$ vodorovně, $x_2$ svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).




viz A

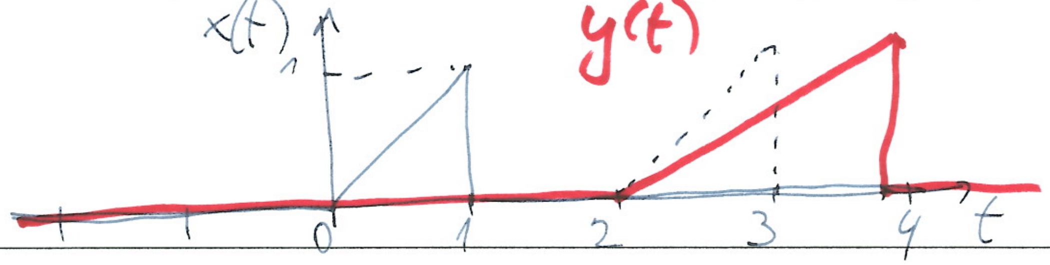
## Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 22.1.2019, skupina D

Login: ...................... Příjmení a jméno: ................................................ Podpis: REF ..........................
(prosím čitelně!)

**Příklad 1** Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(\frac{t}{2} - 1)$ $= x\left(\frac{t-2}{2}\right)$

počátek +2




**Příklad 2** Signál s diskrétním časem má nenulových $N = 100$ vzorků: $x[n] = \begin{cases} -5 & \text{pro } 0 \le n \le 49 \\ 1 & \text{pro } 50 \le n \le 99 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

viz A

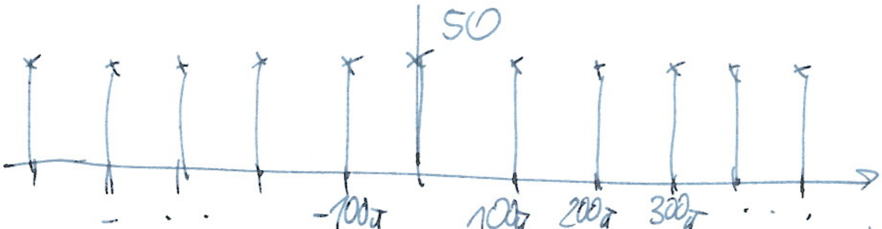
Spočítejte jeho celkovou energii.

$E = 50 \cdot 25 + 50 \cdot 1 = 50 \cdot 26 = \underline{\underline{1300}}$

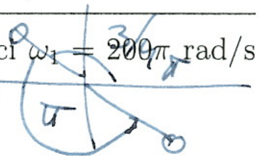
**Příklad 3** Je dán signál se spojitým časem: sled Diracových impulsů $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$, s periodou $T_1 = 20$ ms. Vypočtěte hodnoty všech jeho nenulových koeficientů Fourierovy řady $c_k$ a nakreslete jejich moduly $c_k$ pro $k \in -5 \ldots 5$ na správné frekvence. Pomůcka: můžete využít vzorce pro výpočet koeficientů FŘ sledu obdélníkových impulsů $c_k = D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$. viz A

$\omega_1 = 100\pi$

$\frac{1}{T_1} = 50$




**Příklad 4** Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 200\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \sqrt{18}e^{j\frac{3\pi}{4}}$. Určete hodnotu spektrální funkce předběhnutého signálu: $y(t) = x(t + \frac{3}{200})$ na téže kruhové frekvenci. Hodnotu napište **ve složkovém tvaru**.




viz A

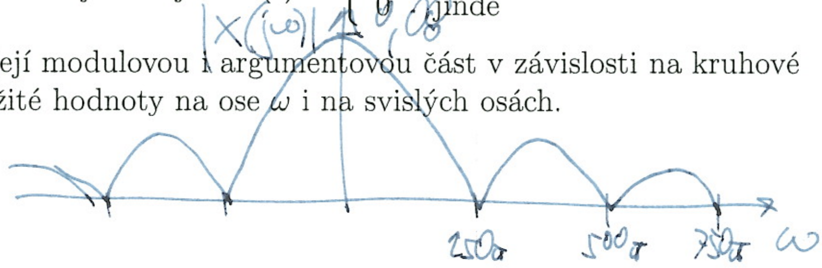
$Y(j\omega_1) =$ ............ $\sqrt{18}e^{j\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{j 200\pi \cdot \frac{3}{200}} = \sqrt{18}e^{j\frac{3}{4}\pi} \cdot e^{j3\pi} = \underline{\underline{3 - 3j}}$

2π můžeme zrušit...

**Příklad 5** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro } -4 \text{ ms} \le t \le 4 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočtětě jeho spektrální funkci a nakreslete její modulovou i argumentovou část v závislosti na kruhové frekvenci $\omega$ (do dvou obrázků). Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách.

$D\vartheta = 10 \cdot 0{,}008 = 0{,}08$




frekvence a argumenty viz A

D

**Příklad 6** Napište matematicky i krátce slovně, jaký je vztah mezi impulsní odezvou $h(t)$ systému se spojitým časem a kmitočtovou charakteristikou $H(j\omega)$ tohoto systému.

viz A

---

**Příklad 7** Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -1 + 1000j$, $p_2 = -1 - 1000j$. Určete modul i argument kmitočtové charakteristiky $H(j\omega)$ tohoto systému pro frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

viz A

$$\text{modul} = \frac{1000 \cdot 1000}{1 \cdot 2000} = 500$$

$$\text{argument} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$|H(j1000)| =$ 500, $\arg H(j1000) =$ $\frac{\pi}{2}$ rad.

---

**Příklad 8** Obdélníkový impuls se spojitým časem je dán jako $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -4 \text{ ms} \leq t \leq 4 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Uveďte, jaká je minimální vzorkovací frekvence $F_{s_{min}}$ pro jeho ideální vzorkování a ideální rekonstrukci.

viz A

$F_{s_{min}} =$............. Hz

---

**Příklad 9** Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

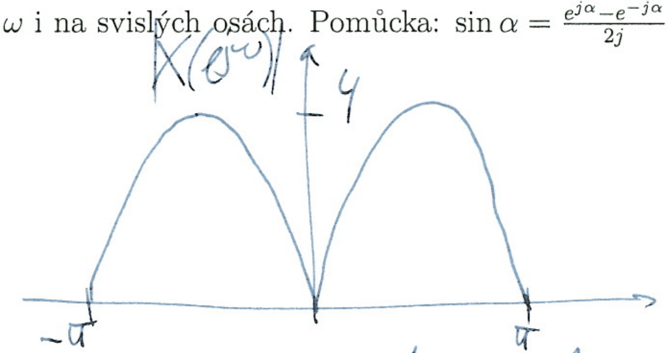
| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1[n]$ | 4 | 0 | 1 | 0 |
| $x_2[n]$ | -1 | -1 | 0 | 3 |
| $x_1[n] \circledast x_2[n]$ | -4 | -1 | -1 | 11 |

---

**Příklad 10** Diskrétní signál má pouze dva vzorky nenulové: $x[1] = 2$, $x[-1] = -2$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskrétním časem $\tilde{X}(e^{j\omega})$ a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou) pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega \in -\pi \ldots \pi$. Vyznačte důležité hodnoty na ose $\omega$ i na svislých osách. Pomůcka: $\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$.

viz A

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = 4j \sin\omega$$




argument viz A

D

**Příklad 11** V tabulce jsou uvedeny hodnoty diskrétní Fourierovy řady reálného diskrétního signálu s periodou $N = 8$. Doplňte chybějící hodnoty.

viz A

| $k$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\tilde{X}[k]$ | | | | 5 | -3 | 1+j | -2 | 1 |

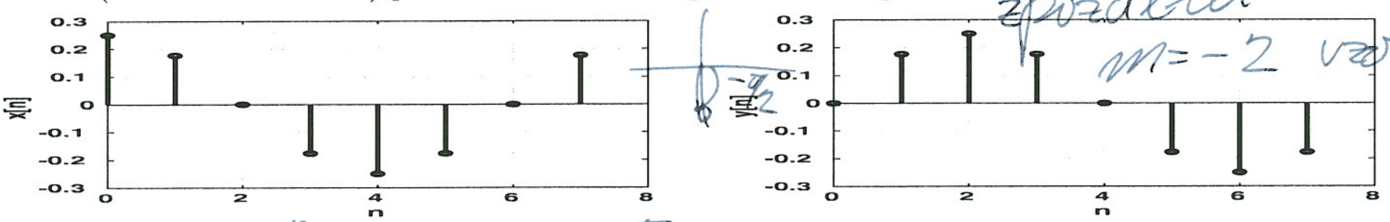
**Příklad 12** Diskrétní signál s délkou $N = 100$ má všechny vzorky stejné: $x[n] = 5$. Vypočtětě zadané koeficienty jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

X[0] = 500, X[1] = 0,

**Příklad 13** Signál $x[n]$ s diskrétním časem o délce $N = 8$ na obrázku byl kruhově posunut - viz druhý obrázek. První koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) signálu $x[n]$ má hodnotu $X[1] = 1$. Určete (ve složkovém tvaru) první koeficient DFT posunutého signálu.

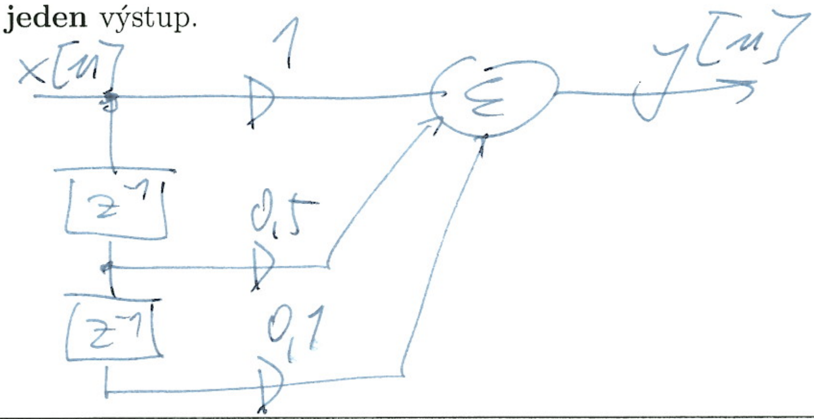
zpoždění $m = -2$ vzorky




$Y[1] = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 2 \cdot 1} = 1 \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

**Příklad 14** Impulsní odezva systému s diskrétním časem (neboli číslicového filtru), má pouze tři nenulové vzorky: $h[0] = 1$, $h[1] = 0.5$, $h[2] = 0.1$

Nakreslete schema tohoto filtru. Pomůcka: blok zpožďující o jeden vzorek (většinou značený $z^{-1}$) má pouze **jeden** výstup.




**Příklad 15** Přenosová funkce $H(z)$ systému s diskrétním časem má dva nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = 0.6j$, $p_2 = -0.6j$.

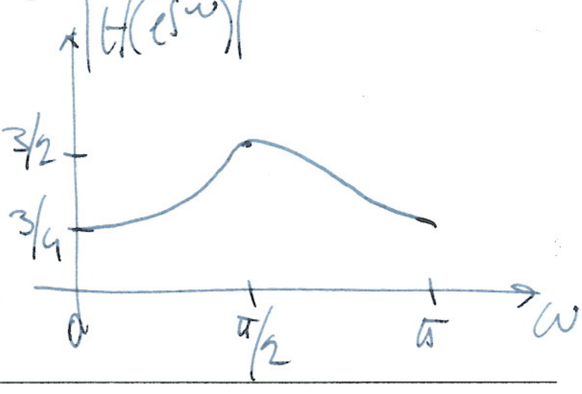
Nakreslete průběh modulu jeho kmitočtové charakteristiky pro normované kruhové frekvence $\omega \in 0 \dots \pi$ rad. Polohu maxima musíte určit přesně, hodnota maxima stačí pouze přibližně.

$\omega = \pi/2$

$|H| = \frac{1 \cdot 1}{0{,}4 \cdot 1{,}6} = \frac{1}{0{,}64} \doteq \frac{3}{2}$

$\omega = 0$

$|H| = \frac{1 \cdot 1}{1 + 0{,}6^2} \doteq \frac{1}{1{,}36} \doteq \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$



D

**Příklad 16** Napište přenosovou funkci $H(z)$ systému s diskrétním časem z příkladu 15. viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1 + 0{,}36 z^{-2}}$

**Příklad 17** Stacionární signál má funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

$$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } 1 \leq x \leq 5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete jeho střední hodnotu.

viz A

$$\ldots = 0{,}25 \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5 = 0{,}125\left(5^2 - 1^2\right) = 0{,}125 \cdot 24 = 3$$

nebo graficky

$a = 3$

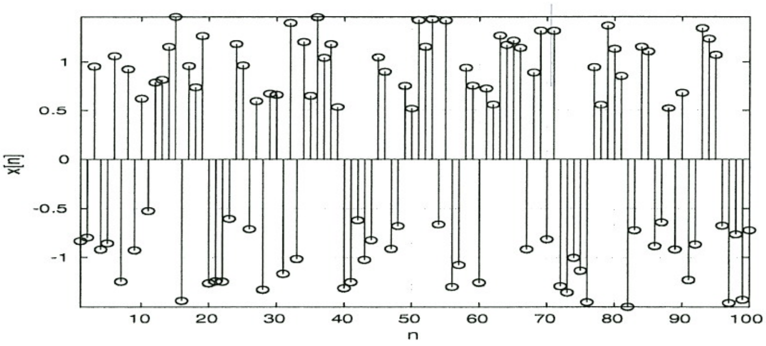
**Příklad 18** Náhodný signál je bílý šum se středním výkonem $P_s = 5$. Nakreslete průběh jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro $k$ od -30 do 30.

viz A

**Příklad 19** Hodnoty cukernatosti sladu v pivovaru byly původně kvantovány na $b_1 = 8$ bitech. Dva vodiče bylo ale nutné využít na jiné věci (jeden pro zapínání ohřevu kotle, jeden pro buzení sládka), pro kvantování tedy zbylo pouze $b_2 = 6$ bitů. Uveďte, o kolik dB se zhoršil poměr signálu ke kvantovacímu šumu.

viz A

**Příklad 20** Na obrázku je stacionární a ergodický diskrétní náhodný signál. Kladné vzorky mohou nabývat hodnoty od 0.5 do 1.5, záporné vzorky od -1.5 do -0.5. Vzorky jsou nekorelované, vzorek $x[n]$ tedy nezávisí na žádném jiném. Nakreslete, jak bude přibližně vypadat sdružená funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, k)$ náhodného signálu na obrázku pro sousední vzorky (tedy $k = 1$) a krátce zdůvodněte. Pomůcka: funkce bude 2D, doporučuji osu $x_1$ vodorovně, $x_2$ svisle a jako hodnoty stupně šedi (příp. stupně barvy Vaší tužky).




viz A