

# Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 10.1.2018, skupina C

Login: ..... Příjmení a jméno: ..... Podpis: .....  
(čitelně!)

**Příklad 1** Čtvrtý koeficient Fourierovy řady periodického signálu se spojitým časem  $x(t)$  je  $c_{x,4} = j$ . Určete tentýž koeficient posunutého signálu  $y(t) = x(t - \frac{1}{16}\mu\text{s})$ , víte-li, že základní frekvence periodického signálu je  $f_1 = 1$  MHz.

$c_{y,4} = \dots\dots\dots$

---

**Příklad 2** Signál se spojitým časem je dán jako:  $x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro } -4\text{s} \leq t \leq 4\text{s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočtěte jeho spektrální funkci  $X(j\omega)$  a nakreslete její modulovou i argumentovou část (do dvou obrázků pod sebou). Vyznačte důležité hodnoty na ose  $\omega$  i na svislých osách.

---

**Příklad 3** Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem:  $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$ .

$$x_1(t) = \begin{cases} t+1 & \text{pro } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{pro } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1).$$

$\delta(t)$  označuje Diracův impuls.

---

**Příklad 4** Popište princip fungování anti-aliasingového filtru při vzorkování.

---

**Příklad 5** Vzorek signálu s diskrétním časem je:  $x[20] = 4$ . Napište a/nebo nakreslete, jak bude tento vzorek přispívat do ideálně rekonstruovaného signálu se spojitým časem. Víte, že vzorkovací frekvence  $F_s = 8000$  Hz. Pomůcka: rekonstrukční funkce “spouštěná” každým vzorkem je kardinální sinus. Musíte ho správně natáhnout a umístit na časové ose a vynásobit hodnotou vzorku.

---

**Příklad 6** Hodnota Fourierovy transformace s diskretním časem (DTFT) reálného signálu  $x[n]$  pro normovanou kruhovou frekvenci  $\omega = 0.1\pi$  rad je  $\tilde{X}(e^{j0.1\pi}) = 5 + 2j$ .

Určete hodnotu DTFT na zadané normované kruhové frekvenci nebo napište jasně “nejde to”:

$$\omega = -0.1\pi \text{ rad. } \tilde{X}(e^{j\omega}) = \dots\dots\dots$$

---

**Příklad 7** Systém se spojitým časem má impulsní odezvu  $h(t)$ . Napište, jaké podmínky musí splňovat  $h(t)$  **stabilního** a **kauzálního** systému se spojitým časem.

---

**Příklad 8** Převeďte diferenciální rovnici systému se spojitým časem

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} - 0.2\frac{dy(t)}{dt} - 0.1y(t) \quad \text{na přenosovou funkci.}$$

$$H(s) = \dots\dots\dots$$

---

**Příklad 9** Přenosová funkce systému se spojitým časem je:  $H(s) = \frac{s}{s+1}$ . Nakreslete přibližný průběh modulu frekvenční charakteristiky tohoto systému  $|H(j\omega)|$  pro kladné frekvence  $\omega$ . Přesně určete hodnoty modulu pro  $\omega = 0$  rad/s a pro  $\omega = \infty$  rad/s.

---

**Příklad 10** Dokažte, že pro periodický signál s diskretním časem  $\tilde{x}[n]$  s periodou  $N$  vzorků jsou koeficienty Diskrétní Fourierovy řady (DFŘ) také periodické s periodou  $N$  koeficientů. Pomůcka: použijte definiční vzorec DFŘ:  $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

---

**Příklad 11** Určete všechny nenulové koeficienty a jejich hodnoty Diskrétní Fourierovy transformace (DFT) **komplexního** signálu o délce  $N = 256$  vzorků, který je dán:  $x[n] = \frac{1}{256} e^{j2\pi \frac{38}{256} n}$  Pomůcka: zvažte, zda koeficienty nejdou spíše **najít** než vypočítat.

**Příklad 12** Je dán signál s diskretním časem o délce  $N = 8$  vzorků. Pro  $n = 0 \dots 7$  má hodnoty 1 1 1 1 0 0 0. Vypočtěte zadaný koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Hodnotu  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  zaokrouhlete na 0.7.

$X[3] = \dots\dots\dots$

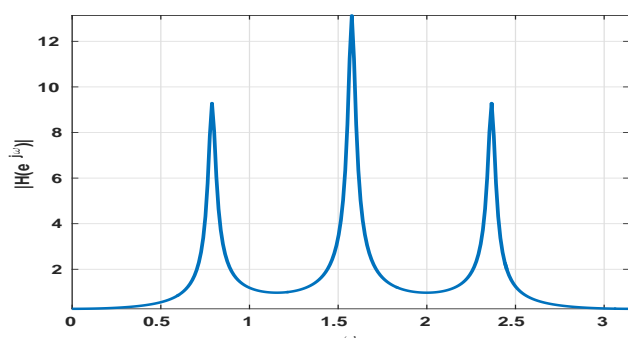
**Příklad 13** Diferenční rovnice číslicového filtru je dána:  
 $y[n] = x[n] - 0.5x[n - 1] + 0.1x[n - 2] - 0.5y[n - 1] + 0.25y[n - 2]$ .  
 Určete přenosovou funkci.

$H(z) = \dots\dots\dots$

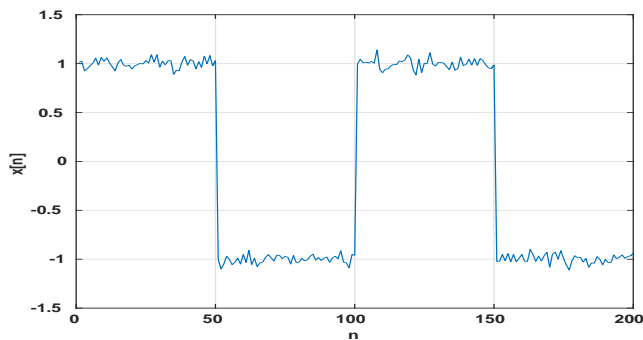
**Příklad 14** Frekvenční charakteristika číslicového filtru má pro normovanou kruhovou frekvenci  $\omega = 0.1\pi$  rad hodnotu  $H(e^{j0.1\pi}) = 5e^{-j\frac{\pi}{2}}$ . Do filtru vstupuje diskretní cosinusovka  $x[n] = 7 \cos(0.1\pi n + \frac{\pi}{2})$ . Napište vztah pro signál na výstupu.

$y[n] = \dots\dots\dots$

**Příklad 15** Modul frekvenční charakteristiky  $|H(e^{j\omega})|$  čistě IIR filtru 6-řádu (ve jmenovateli jsou tedy koeficienty  $a_1 \dots a_6$ ) je na obrázku. Nakreslete přibližně pozice pólů filtru. Nezapomeňte, že pokud jsou póly komplexní, musí být v komplexně sdružených párech.



**Příklad 16** Na obrázku je signál o délce  $N = 200$  vzorků ovlivněný šumem. Odhadněte zadaný autokorelační koeficient. Použijte standardní vychýlený odhad:  $\hat{R}_{vych}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]x[n+k]$ .



$R[100] = \dots\dots\dots$

**Příklad 17** Naměřené hodnoty stacionárního náhodného signálu  $\xi[n]$  jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu  $-6$  až  $6$ . Určete hodnotu distribuční funkce  $F(x)$  pro zadané  $x$ .

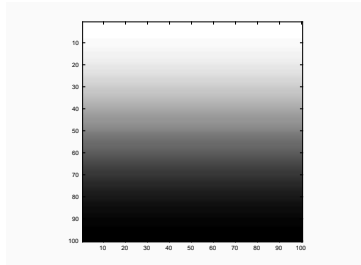
$F(6) = \dots\dots\dots$

**Příklad 18** Na  $\Omega = 4000$  realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy  $n_1$  a  $n_2$ . Spočítejte korelační koeficient  $R[n_1, n_2]$ . Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty  $x_1$  a  $x_2$  při numerickém výpočtu integrálu  $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$  použijte středy intervalů v tabulce.

| intervaly $x_1$ | intervaly $x_2$ |            |           |            |
|-----------------|-----------------|------------|-----------|------------|
|                 | $[-20, -10]$    | $[-10, 0]$ | $[0, 10]$ | $[10, 20]$ |
| $[10, 20]$      | 0               | 0          | 0         | 0          |
| $[0, 10]$       | 0               | 1000       | 1000      | 0          |
| $[-10, 0]$      | 0               | 1000       | 1000      | 0          |
| $[-20, -10]$    | 0               | 0          | 0         | 0          |

$R[n_1, n_2] = \dots\dots\dots$

**Příklad 19** Nakreslete, jaký bude výsledek operace 2D filtrování  $y[k, l] = x[k, l] \star h[k, l]$ . Vstup  $x[k, l]$  je na obrázku. Výsledek nakreslete do nového obrázku nebo popište. Konvoluční jádro (nebo také 2D filtr, nebo maska)  $h[k, l]$  je čtvercové o velikosti  $5 \times 5$ , všechny hodnoty jsou rovny  $\frac{1}{25}$ .



**Příklad 20** Obrázek o rozměrech  $100 \times 100$  je celý černý (pouze hodnoty nula), jen 2 pixely jsou bílé:  $x[0, 0] = x[50, 50] = 1$ . Určete zadanou hodnotu jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

$X[0, 2] = \dots\dots\dots$