Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 5.2.2014, skupina A

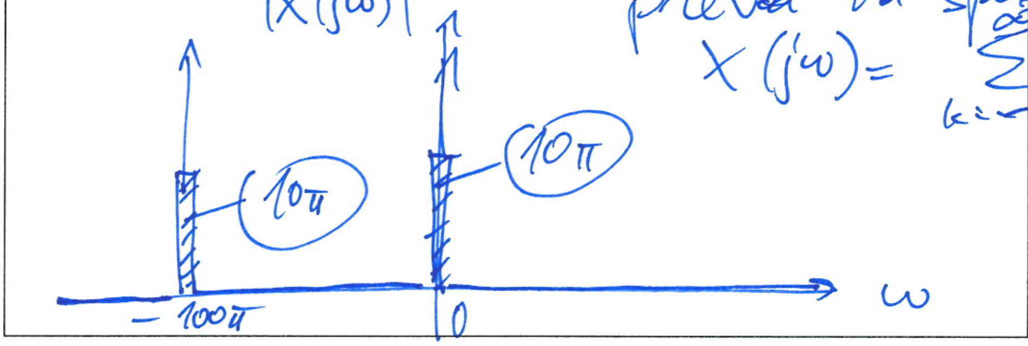
Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála se stejnosměrnou složkou:
$x(t) = -5 + 5e^{-j100\pi t}$.
Nakreslete modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ tohoto signálu.

Koeficienty FŘ jsou $c_0 = -5$, $c_1 = 5$

převod na spektrální funkci:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_1)$$



Příklad 2 Housle hrají lehce rozladěné komorní 'a' na f =441 Hz. Signál je navzorkován na vzorkovací frekvenci CD: F_s =44100 Hz. Kolik vzorků bude obsahovat 5 period signálu ?

1 perioda $\approx \frac{44100}{441} = 100$ vzorků

500

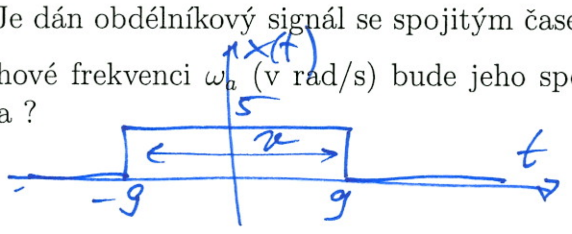
Příklad 3 Signál $x(t) = \underbrace{4e^{j0.4\pi}}_{c_1} e^{j200\pi t} + \underbrace{4e^{-j0.4\pi}}_{c_{-1}} e^{-j200\pi t}$ lze zapsat jako cosinusovku $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$. Určete její parametry.

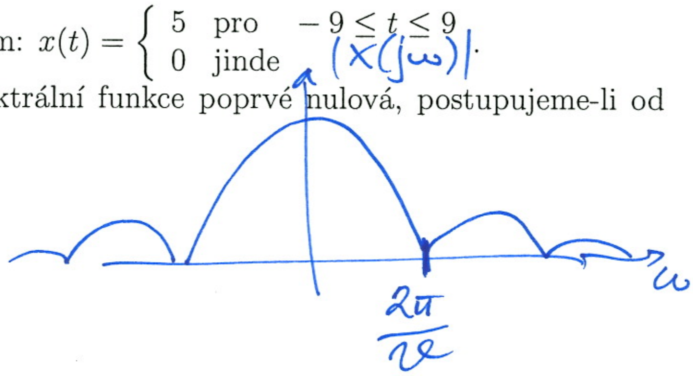
$x = 2|c_1| \cos(\omega_1 t + \arg c_1)$

$C_1 =$ 8 $\quad \omega_1 =$ 200π rad/s $\quad \phi_1 =$ $0{,}4\pi$ rad

Příklad 4 Je dán obdélníkový signál se spojitým časem: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -9 \leq t \leq 9 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Na které kruhové frekvenci ω_a (v rad/s) bude jeho spektrální funkce poprvé nulová, postupujeme-li od $\omega = 0$ doprava ?





$\omega_a = \frac{2\pi}{18} = \frac{\pi}{9}$ rad/s

Příklad 5 Do ideálního vzorkovače bez anti-aliasingového filtru vstupuje směs dvou cosinusovek: $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(9000\pi t)$. Vzorkovací frekvence je F_s =44100 Hz. Vzorkovaný signál je pak ideálně rekonstruován. Napište výsledný rekonstruovaný signál.

$f_1 = 1000$ Hz $\quad f_2 = 4500$ Hz $\quad F_s > 2f_{max} \Rightarrow$ vše ok.

$x_r(t) = x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(9000\pi t)$

A

Příklad 6 Diskrétní posloupnost délky $N = 5$ je pro $n =[0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$ dána jako $x[n] =[7\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]$. Posloupnost je kruhově zpožděna o 2 vzorky: $y[n] = R_5[n]x[\text{mod}_5(n-2)]$.
Napište výslednou posloupnost $y[n]$.

$y[n] =$ [2 1 7 4 3]

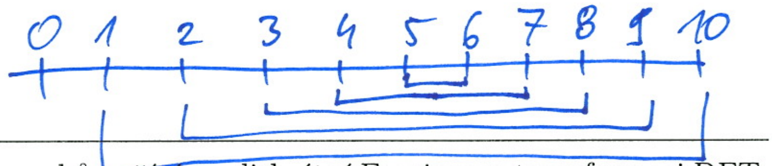
Příklad 7 Periodický diskrétní signál s periodou $N = 8$ má pro $n =[0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7]$ vzorky $x[n]$=[1 -1 0 0 0 0 0 0]. Určete hodnotu zadaného koeficientu jeho diskrétní Fourierovy řady. Pomůcka: Pokud se ve výpočtu vyskytne hodnota $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pokládejte ji pro jednoduchost za 0.7.

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $\quad X[2] = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = \sum x[n] e^{-j\frac{\pi}{2}n}$

$\tilde{X}[2] = 1e^{0} - 1e^{-j\frac{\pi}{2}} = 1-(-j) = \underline{1+j}$

Příklad 8 Reálný diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 11$ vzorků, stejnou délku má tedy i jeho diskrétní Fourierova transformace $X[k]$. Zajímá nás modul této transformace $|X[k]|$.
Určete, které hodnoty $|X[k]|$ se pro $k = 0 \ldots N-1$ objevují pouze jednou (tedy jsou unikátní).

$X[k] = X^*[N-k]$, takže $|X[k]| = |X[N-k]|$



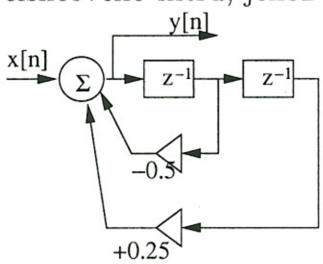
pouze $|X[0]|$

Příklad 9 Pro diskrétní signál o délce $N = 256$ vzorků počítáme diskrétní Fourierovu transformaci DFT. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8000$ Hz. Na frekvenční ose chceme rozlišení (vzdálenost dvou vzorků) 10 Hz.
Kolik nul musíme k signálu doplnit před výpočtem DFT (zero-padding) ?

8000/10 = 800 bodů

počet nul = 800 − 256 = 544 nul

Příklad 10 Napište diferenční rovnici číslicového filtru, jehož schéma je na obrázku.



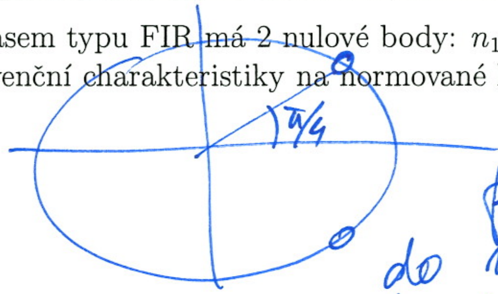
$y[n] = x[n] - 0{,}5\,y[n-1] + 0{,}25\,y[n-2]$

A

Příklad 11 Napište přenosovou funkci číslicového filtru z předcházejícího příkladu.

$H(z) =$ $\dfrac{1}{1+0{,}5\,z^{-1} - 0{,}25\,z^{-2}}$

Příklad 12 Filtr s diskrétním časem typu FIR má 2 nulové body: $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Určete hodnotu modulu jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$.

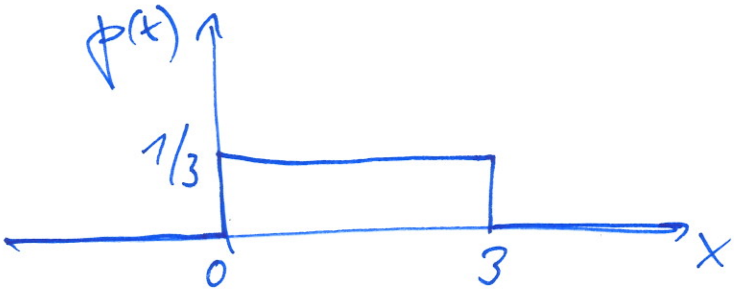


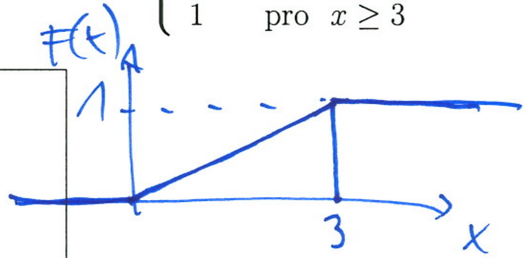
padne-li bod $e^{j\omega}$ do nulového bodu, bude délka vektoru 0. je to v čitateli takže $\Rightarrow 0$

$|H(e^{j\omega_1})| =$ 0

Příklad 13 Distribuční funkce stacionárního náhodného procesu je: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x/3 & \text{pro } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pro } x \geq 3 \end{cases}$

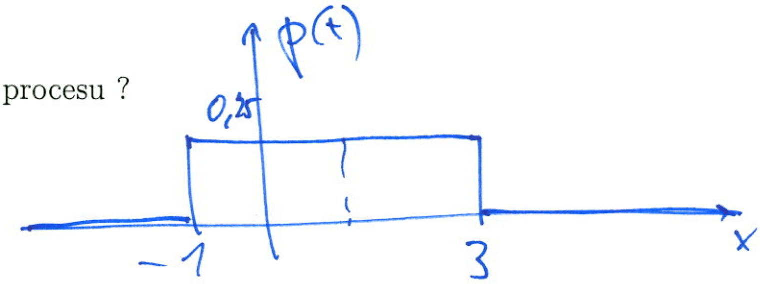
Nakreslete jeho funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti.





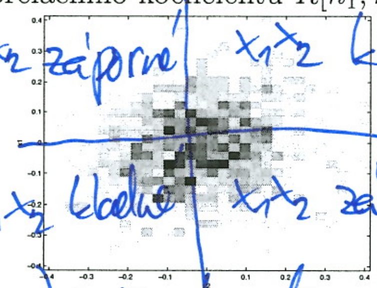
$p(x) = \dfrac{\partial F(x)}{\partial x}$

Příklad 14 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného procesu je:
$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } -1 < x < 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Jaká je střední hodnota tohoto náhodného procesu ?



$a =$ 1

Příklad 15 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti náhodného procesu s diskrétním časem $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ je znázorněna na obrázku (tmavá barva zde značí na rozdíl od přednášek **větší** hodnoty). Určete přibližně hodnotu korelačního koeficientu $R[n_1, n_2]$.



x_1x_2 záporné x_1x_2 kladné

x_1x_2 kladné x_1x_2 záporné

všude zhruba stejné

$R[n_1, n_2] =$ $\displaystyle\iint_{x_1\,x_2} p(x_1, x_2, n_1, n_2)\, x_1 x_2 \, dx_1 dx_2 = \underline{\underline{0}}$

Příklad 16 Frekvenční charakteristika číslicového filtru má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ hodnotu $H(e^{j\omega_1}) = 2e^{j\frac{\pi}{10}}$. Na vstupu filtru je reálný náhodný signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(e^{j\omega})$. Napište, pro které normované kruhové frekvence budete schopni určit spektrální hustotou výkonu signálu na výstupu $G_y(e^{j\omega})$ a jak.

A

$G_y(e^{j\omega}) = G_x(e^{j\omega}) \cdot |H(e^{j\omega})|^2$

Budeme tedy schopni určit výstupní hustotu na $\omega_1 = \frac{\pi}{\cancel{10}\,4}$ rad a bude se násobit kvadrátem abs. hodnoty tedy 4. Totéž na frekvenci $-\frac{\pi}{\cancel{10}\,4}$ rad.

....

Příklad 17 Signál s dikrétním časem má délku $N = 6$ a hodnoty $x[n] = [2\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$. Proveďte nevychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu

$\frac{2\ 1\ 1}{4}$

$\hat{R}[3] = \frac{4}{6-3} = \frac{4}{3}$

Příklad 18 Výkon kvantovacího šumu je $P_e = 160$. Určete, na jakou hodnotu se změní tento výkon, pokud se kvantovací krok zmenší šestnáctkrát (přidáme čtyři bity).

$P_e = \frac{\Delta^2}{12}$ $\quad P_{e\,nový} = \frac{\left(\frac{\Delta}{16}\right)^2}{12}$

$P_{e\,nový} = \frac{P_e}{256}$

$\frac{160}{256}$

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ o velikosti 101×101 pixelů má jediný pixel uprostřed bílý: $x[50, 50] = 1$, ostatní jsou černé (mají hodnotu nula).
Určete zadaný vzorek jeho dvourozměrné diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

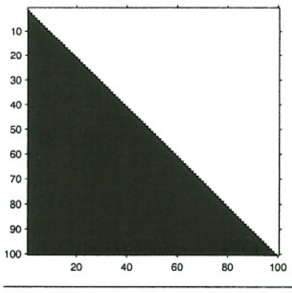
$X[m,n] = \sum_{k=0}^{100}\sum_{l=0}^{100} x[k,l]\, e^{-j2\pi\left(\frac{km}{100} + \frac{nl}{100}\right)}$

pro $m, n = 0$ je toto $e^{-j2\pi 0} = 1$

suma je tedy součet všech pixlů

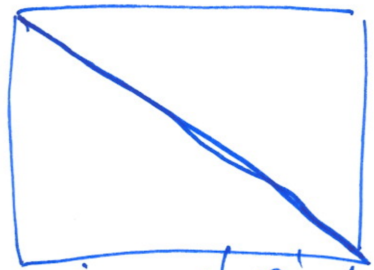
$X[0, 0] =$ 1

Příklad 20 Obrázek o rozměrech 100×100 pixelů (černá barva má hodnotu 0, bílá hodnotu 1) je filtrován 2D-filtrem. $H[k, l]$. Nakreslete výsledný obrázek nebo popište, co bude obsahovat.



$$H[k,l] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

detektor šikmé hrany

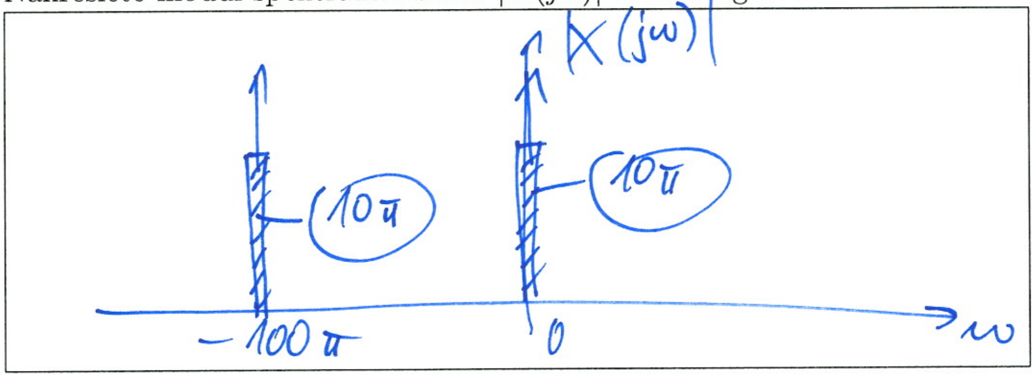


(barvy jsou obrácené)

Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 5.2.2014, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála se stejnosměrnou složkou:
$x(t) = 5 + 5e^{-j100\pi t}$. viz A
Nakreslete modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ tohoto signálu.



Příklad 2 Housle hrají lehce rozladěné komorní 'a' na f =441 Hz. Signál je navzorkován na vzorkovací frekvenci CD: F_s =44100 Hz. Kolik vzorků budou obsahovat 4 periody ? viz A

400

Příklad 3 Signál $x(t) = 2e^{j0.4\pi}e^{j200\pi t} + 2e^{-j0.4\pi}e^{-j200\pi t}$ lze zapsat jako cosinusovku $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$. Určete její parametry. viz A

$C_1 =$ 4 $\quad \omega_1 =$ $200\pi \frac{rad}{s}$ $\quad \phi_1 =$ $0{,}4\pi$ rad

Příklad 4 Je dán obdélníkový signál se spojitým časem: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -10 \le t \le 10 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.
Na které kruhové frekvenci ω_a (v rad/s) bude jeho spektrální funkce poprvé nulová, postupujeme-li od $\omega = 0$ doprava ? viz A

$\omega_a =$ $\frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$ rad/s

rekonstrukce

Příklad 5 Do ideálního vzorkovače bez anti-aliasingového filtru vstupuje směs dvou cosinusovek: $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(9000\pi t)$. Vzorkovací frekvence je F_s =8000 Hz. Vzorkovaný signál je pak ideálně rekonstruován. Napište výsledný rekonstruovaný signál.

1000 Hz 4500 Hz ALIASING!

$x_r(t) =$ $\cos(2000\pi t) + \cos(7000\pi t)$

B

Příklad 6 Diskrétní posloupnost délky $N = 5$ je pro $n = [0\ 1\ 2\ 3\ 4]$ dána jako $x[n] = [7\ 4\ 3\ 2\ 1]$. Posloupnost je kruhově zpožděna o 3 vzorky: $y[n] = R_5[n]x[\mathrm{mod}_5(n-3)]$.
Napište výslednou posloupnost $y[n]$.

$y[n] = [$ 3 2 1 7 4 $]$

Příklad 7 Periodický diskrétní signál s periodou $N = 8$ má pro $n = [0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7]$ vzorky $x[n] = [1\ \text{-}1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]$. Určete hodnotu zadaného koeficientu jeho diskrétní Fourierovy řady. Pomůcka: Pokud se ve výpočtu vyskytne hodnota $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pokládejte ji pro jednoduchost za 0.7.

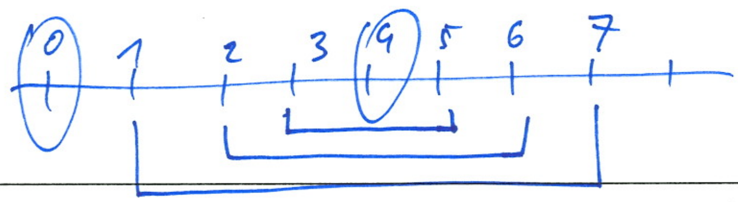
viz A

$$X[1] = \sum x[n] e^{-j\frac{\pi}{4}n}$$

$\tilde{X}[1] = 1e^{0} - 1e^{-j\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(-j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{0{,}3 + 0{,}7j}$

Příklad 8 Reálný diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků, stejnou délku má tedy i jeho diskrétní Fourierova transformace $X[k]$. Zajímá nás modul této transformace $|X[k]|$.
Určete, které hodnoty $|X[k]|$ se pro $k = 0 \ldots N-1$ objevují pouze jednou (tedy jsou unikátní).

viz A



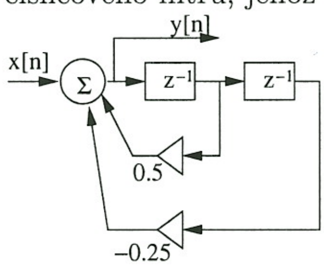
$|X[0]|$ a $|X[4]|$

Příklad 9 Pro diskrétní signál o délce $N = 256$ vzorků počítáme diskrétní Fourierovu transformaci DFT. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8000$ Hz. Na frekvenční ose chceme rozlišení (vzdálenost dvou vzorků) 8 Hz. Kolik nul musíme k signálu doplnit před výpočtem DFT (zero-padding) ?

$\frac{8000}{8} = 1000$ bodů

počet nul $= 1000 - 256 = \underline{744}$

Příklad 10 Napište diferenční rovnici číslicového filtru, jehož schéma je na obrázku.



$y[n] = x[n] + 0{,}5\, y[n-1] - 0{,}25\, y[n-2]$

B

Příklad 11 Napište přenosovou funkci číslicového filtru z předcházejícího příkladu.

$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}25z^{-2}}$

Příklad 12 Filtr s diskrétním časem typu FIR má 2 nulové body: $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Určete hodnotu modulu jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$.

viz A

$|H(e^{j\omega_1})| =$ 0

Příklad 13 Distribuční funkce stacionárního náhodného procesu je: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x/3 & \text{pro } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pro } x \geq 3 \end{cases}$

Nakreslete jeho funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti.

viz A

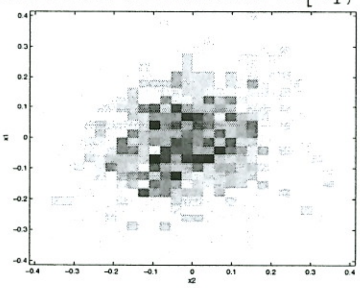
Příklad 14 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného procesu je:
$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } -1 < x < 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Jaká je střední hodnota tohoto náhodného procesu ?

viz A

$a =$ 1

Příklad 15 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti náhodného procesu s diskrétním časem $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ je znázorněna na obrázku (tmavá barva zde značí na rozdíl od přednášek **větší** hodnoty). Určete přibližně hodnotu korelačního koeficientu $R[n_1, n_2]$.

viz A



$R[n_1, n_2] =$ 0

B

Příklad 16 Frekvenční charakteristika číslicového filtru má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ hodnotu $H(e^{j\omega_1}) = 2e^{-j\frac{\pi}{10}}$. Na vstupu filtru je reálný náhodný signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(e^{j\omega})$. Napište, pro které normované kruhové frekvence budete schopni určit spektrální hustotou výkonu signálu na výstupu $G_y(e^{j\omega})$ a jak.

Viz A

na frekvenci $\frac{\pi}{4}$ a $-\frac{\pi}{4}$, násobení 4 mi. ....

Příklad 17 Signál s dikrétním časem má délku $N = 6$ a hodnoty $x[n] =$[2 1 1 1 1 1].
Proveďte nevychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu 2 1 1 1

$\hat{R}[2] = \frac{5}{6-2} = \frac{5}{4}$

Příklad 18 Výkon kvantovacího šumu je $P_e = 160$. Určete, na jakou hodnotu se změní tento výkon, pokud se kvantovací krok zmenší osmkrát (přidáme tři bity).

Viz A

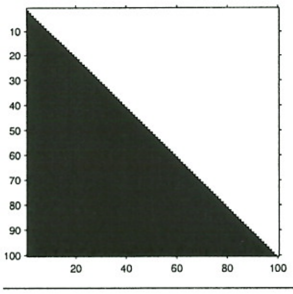
$\frac{160}{64}$

Příklad 19 Obrázek $x[k,l]$ o velikosti 101×101 pixelů má jediný pixel uprostřed bílý: $x[50,50] = 1$, ostatní jsou černé (mají hodnotu nula).
Určete zadaný vzorek jeho dvourozměrné diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

Viz A

$X[0,0] =$ 1

Příklad 20 Obrázek o rozměrech 100×100 pixelů (černá barva má hodnotu 0, bílá hodnotu 1) je filtrován 2D-filtrem. $H[k,l]$. Nakreslete výsledný obrázek nebo popište, co bude obsahovat.



detektor šikmé hrany, ale té opačné

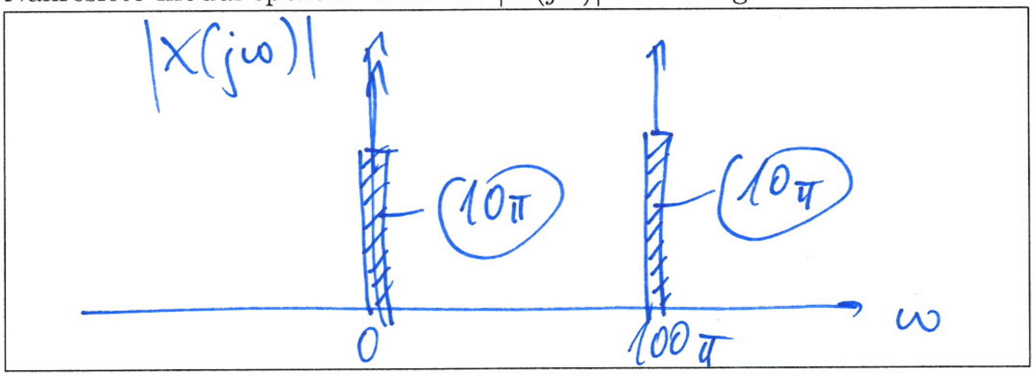
$$H[k,l] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

samé nuly

Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 5.2.2014, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála se stejnosměrnou složkou:
$x(t) = -5 + 5e^{j100\pi t}$.
Nakreslete modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ tohoto signálu. viz A



Příklad 2 Housle hrají lehce rozladěné komorní 'a' na f =441 Hz. Signál je navzorkován na vzorkovací frekvenci CD: F_s =44100 Hz. Kolik vzorků budou obsahovat 3 periody ? viz A

300

Příklad 3 Signál $x(t) = 4e^{-j0.4\pi}e^{j200\pi t} + 4e^{j0.4\pi}e^{-j200\pi t}$ lze zapsat jako cosinusovku $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$. Určete její parametry. viz A

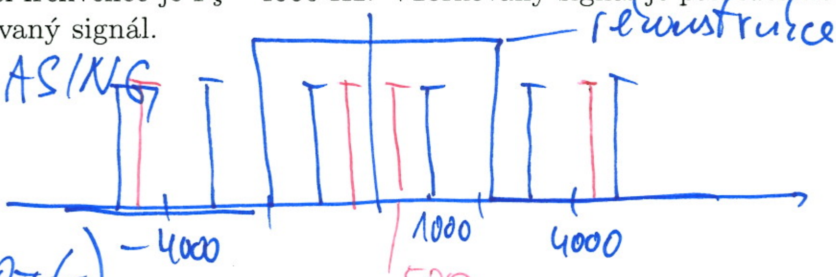
C_1 = 8 ω_1 = 200π rad/s ϕ_1 = $-0{,}4\pi$ rad

Příklad 4 Je dán obdélníkový signál se spojitým časem: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -6 \leq t \leq 6 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.
Na které kruhové frekvenci ω_a (v rad/s) bude jeho spektrální funkce poprvé nulová, postupujeme-li od $\omega = 0$ doprava ? viz A

ω_a = $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ rad/s

Příklad 5 Do ideálního vzorkovače bez anti-aliasingového filtru vstupuje směs dvou cosinusovek: $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(9000\pi t)$. Vzorkovací frekvence je F_s =4000 Hz. Vzorkovaný signál je pak ideálně rekonstruován. Napište výsledný rekonstruovaný signál.

1000 Hz 4500 Hz ALIASING



$x_r(t)$ = $\cos(2000\pi t) + \cos(1000\pi t)$

C

Příklad 6 Diskrétní posloupnost délky $N = 5$ je pro $n =[0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4]$ dána jako $x[n] =[7 \ \ 4 \ \ 3 \ \ 2 \ \ 1]$. Posloupnost je kruhově předběhnuta o 2 vzorky: $y[n] = R_5[n]x[\mathrm{mod}_5(n + 2)]$.
Napište výslednou posloupnost $y[n]$.

$y[n] = [3 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 7 \ \ 4]$

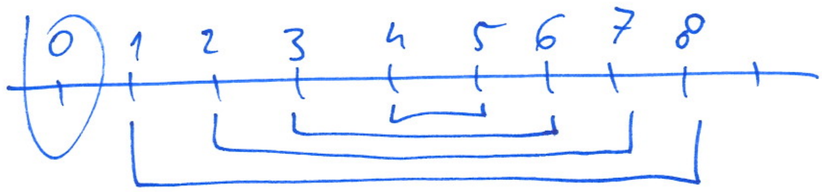
Příklad 7 Periodický diskrétní signál s periodou $N = 8$ má pro $n =[0 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4 \ \ 5 \ \ 6 \ \ 7]$ vzorky $x[n]$=[1 -1 0 0 0 0 0 0]. Určete hodnotu zadaného koeficientu jeho diskrétní Fourierovy řady. Pomůcka: Pokud se ve výpočtu vyskytne hodnota $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pokládejte ji pro jednoduchost za 0.7.

Viz A

$X[k] = \sum \cancel{k}\, x[n]\, e^{-j\pi n}$

$\tilde{X}[4] = 1e^{0} - 1e^{-j\pi} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}$

Příklad 8 Reálný diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 9$ vzorků, stejnou délku má tedy i jeho diskrétní Fourierova transformace $X[k]$. Zajímá nás modul této transformace $|X[k]|$. Viz A
Určete, které hodnoty $|X[k]|$ se pro $k = 0 \ldots N - 1$ objevují pouze jednou (tedy jsou unikátní).



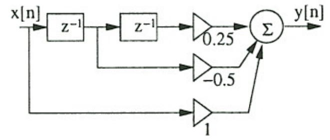
pouze $|X[0]|$

Příklad 9 Pro diskrétní signál o délce $N = 256$ vzorků počítáme diskrétní Fourierovu transformaci DFT. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8000$ Hz. Na frekvenční ose chceme rozlišení (vzdálenost dvou vzorků) 4 Hz. Kolik nul musíme k signálu doplnit před výpočtem DFT (zero-padding) ?

$\frac{8000}{4} = 2000$ bodů

počet nul = $2000 - 256 = \underline{1744}$

Příklad 10 Napište diferenční rovnici číslicového filtru, jehož schéma je na obrázku.



$y[n] = x[n] - 0{,}5\,x[n-1] + 0{,}25\,x[n-2]$

C

Příklad 11 Napište přenosovou funkci číslicového filtru z předcházejícího příkladu.

$H(z) =$ $1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}25z^{-2}$

Příklad 12 Filtr s diskrétním časem typu FIR má 2 nulové body: $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Určete hodnotu modulu jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$.

viz A

$|H(e^{j\omega_1})| =$ 0

Příklad 13 Distribuční funkce stacionárního náhodného procesu je: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x < 0 \\ x/3 & \text{pro} \quad 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pro} \quad x \geq 3 \end{cases}$

Nakreslete jeho funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti.

viz A

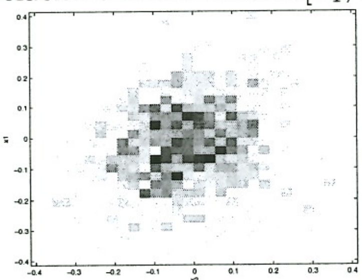
Příklad 14 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného procesu je:
$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro} \quad -1 < x < 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Jaká je střední hodnota tohoto náhodného procesu ?

viz A

$a =$ 1

Příklad 15 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti náhodného procesu s diskrétním časem $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ je znázorněna na obrázku (tmavá barva zde značí na rozdíl od přednášek **větší** hodnoty). Určete přibližně hodnotu korelačního koeficientu $R[n_1, n_2]$.

viz A



$R[n_1, n_2] =$ 0

C

Příklad 16 Frekvenční charakteristika číslicového filtru má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ hodnotu $H(e^{j\omega_1}) = 4e^{j\frac{\pi}{10}}$. Na vstupu filtru je reálný náhodný signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(e^{j\omega})$. Napište, pro které normované kruhové frekvence budete schopni určit spektrální hustotou výkonu signálu na výstupu $G_y(e^{j\omega})$ a jak.

viz A

na frekvenci $\frac{\pi}{\cancel{10}\ 4}$ a $-\frac{\pi}{\cancel{10}\ 4}$, násobení 16 krát

Příklad 17 Signál s dikrétním časem má délku $N = 6$ a hodnoty $x[n] =$[2 1 1 1 1 1].
Proveďte nevychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu
2 1 1 1 1 1

$\hat{R}[1] = \frac{6}{6-1} = \underline{\underline{\frac{6}{5}}}$

Příklad 18 Výkon kvantovacího šumu je $P_e = 160$. Určete, na jakou hodnotu se změní tento výkon, pokud se kvantovací krok zmenší čtyřikrát (přidáme dva bity).
viz A

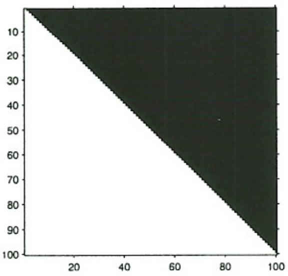
$\frac{160}{16} = \underline{\underline{10}}$

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ o velikosti 101×101 pixelů má jediný pixel uprostřed bílý: $x[50, 50] = 1$, ostatní jsou černé (mají hodnotu nula).
Určete zadaný vzorek jeho dvourozměrné diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

viz A

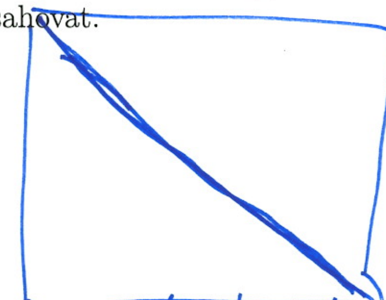
$X[0, 0] = 1$

Příklad 20 Obrázek o rozměrech 100×100 pixelů (černá barva má hodnotu 0, bílá hodnotu 1) je filtrován 2D-filtrem. $H[k, l]$. Nakreslete výsledný obrázek nebo popište, co bude obsahovat.



detektor šikmé hrany

$$H[k, l] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

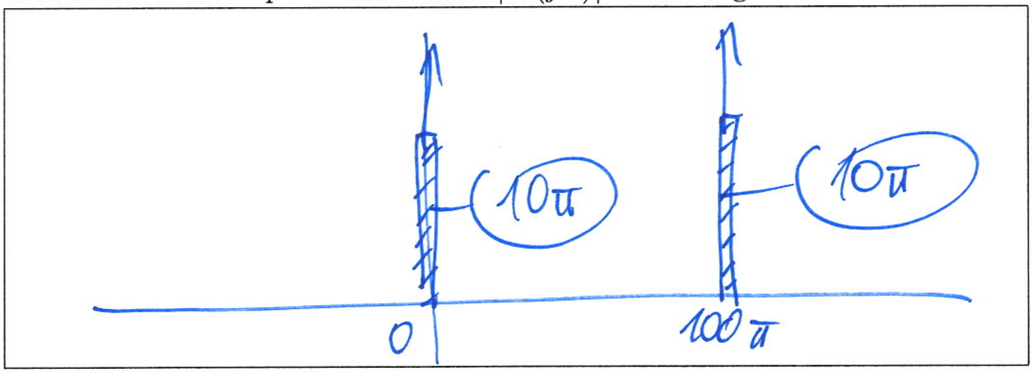


(barvy jsou obrácené)

Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 5.2.2014, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála se stejnosměrnou složkou:
$x(t) = 5 + 5e^{j100\pi t}$. viz A
Nakreslete modul spektrální funkce $|X(j\omega)|$ tohoto signálu.



Příklad 2 Housle hrají lehce rozladěné komorní 'a' na f =441 Hz. Signál je navzorkován na vzorkovací frekvenci CD: F_s =44100 Hz. Kolik vzorků budou obsahovat 2 periody ?
viz A

200
....

Příklad 3 Signál $x(t) = 2e^{-j0.4\pi}e^{j200\pi t} + 2e^{j0.4\pi}e^{-j200\pi t}$ lze zapsat jako cosinusovku
$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$. Určete její parametry.

$C_1 =$ 4 $\omega_1 =$ 200π rad/s $\phi_1 =$ $-0{,}4\pi$ rad

Příklad 4 Je dán obdélníkový signál se spojitým časem: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -3 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.
Na které kruhové frekvenci ω_a (v rad/s) bude jeho spektrální funkce poprvé nulová, postupujeme-li od $\omega = 0$ doprava ?
viz A

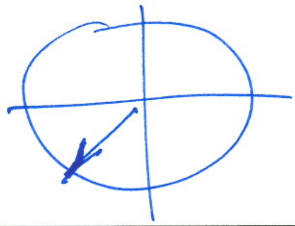
$\omega_a = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ rad/s

Příklad 5 Do ideálního vzorkovače bez anti-aliasingového filtru vstupuje směs dvou cosinusovek:
$x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(9000\pi t)$. Vzorkovací frekvence je F_s =16000 Hz. Vzorkovaný signál je pak ideálně rekonstruován. Napište výsledný rekonstruovaný signál.

1000 Hz 4500 Hz $F_s > 2f_{max} \rightarrow$ Ok

$x_r(t) =$ $x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(9000\pi t)$

Příklad 6 Diskrétní posloupnost délky $N = 5$ je pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$ dána jako $x[n] = [7\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1]$.
Posloupnost je kruhově předběhnuta o 3 vzorky: $y[n] = R_5[n]x[\mathrm{mod}_5(n+3)]$.
Napište výslednou posloupnost $y[n]$.



$y[n] = [$ 2 1 7 4 3 $]$

Příklad 7 Periodický diskrétní signál s periodou $N = 8$ má pro $n = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7]$ vzorky $x[n] = [1\ \text{-}1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$. Určete hodnotu zadaného koeficientu jeho diskrétní Fourierovy řady. Pomůcka: Pokud se ve výpočtu vyskytne hodnota $\frac{1}{\sqrt{2}}$, pokládejte ji pro jednoduchost za 0.7.

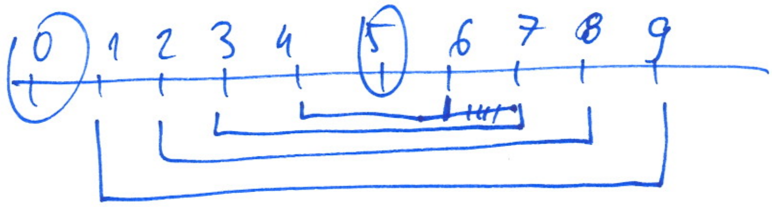
viz A

$$X[3] = \sum x[n] e^{-j\frac{3}{4}\pi n}$$

$\tilde{X}[3] =$ $1e^{0} - 1e^{-j\frac{3}{4}\pi} = 1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \underline{1{,}7 + 0{,}7j}$

Příklad 8 Reálný diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 10$ vzorků, stejnou délku má tedy i jeho diskrétní Fourierova transformace $X[k]$. Zajímá nás modul této transformace $|X[k]|$.
Určete, které hodnoty $|X[k]|$ se pro $k = 0 \ldots N-1$ objevují pouze jednou (tedy jsou unikátní).

viz A



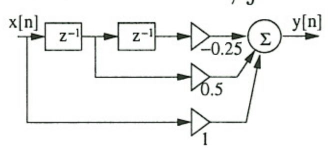
$|X[0]|$ a $|X[5]|$

Příklad 9 Pro diskrétní signál o délce $N = 256$ vzorků počítáme diskrétní Fourierovu transformaci DFT. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8000$ Hz. Na frekvenční ose chceme rozlišení (vzdálenost dvou vzorků) 2 Hz. Kolik nul musíme k signálu doplnit před výpočtem DFT (zero-padding) ?

$$\frac{8000}{2} = 4000 \text{ bodů}$$

počet nul = $4000 - 256 = \underline{\underline{3744}}$

Příklad 10 Napište diferenční rovnici číslicového filtru, jehož schéma je na obrázku.



$y[n] =$ $x[n] + 0{,}5\,x[n-1] - 0{,}25\,x[n-2]$

D

Příklad 11 Napište přenosovou funkci číslicového filtru z předcházejícího příkladu.

$H(z) =$ $1 + 0{,}5z^{-1} - 0{,}25z^{-2}$

Příklad 12 Filtr s diskrétním časem typu FIR má 2 nulové body: $n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Určete hodnotu modulu jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$.

viz A

$|H(e^{j\omega_1})| =$ 0

Příklad 13 Distribuční funkce stacionárního náhodného procesu je: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ x/3 & \text{pro } 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{pro } x \geq 3 \end{cases}$

Nakreslete jeho funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti.

viz A

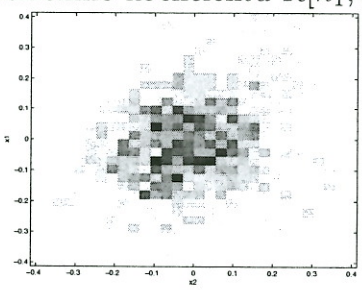
Příklad 14 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného procesu je:
$p(x) = \begin{cases} 0.25 & \text{pro } -1 < x < 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Jaká je střední hodnota tohoto náhodného procesu ?

viz A

$a =$ 1

Příklad 15 Dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti náhodného procesu s diskrétním časem $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ je znázorněna na obrázku (tmavá barva zde značí na rozdíl od přednášek **větší** hodnoty). Určete přibližně hodnotu korelačního koeficientu $R[n_1, n_2]$.

viz A



$R[n_1, n_2] =$ 0

D

Příklad 16 Frekvenční charakteristika číslicového filtru má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ hodnotu $H(e^{j\omega_1}) = 4e^{-j\frac{\pi}{10}}$. Na vstupu filtru je reálný náhodný signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(e^{j\omega})$. Napište, pro které normované kruhové frekvence budete schopni určit spektrální hustotou výkonu signálu na výstupu $G_y(e^{j\omega})$ a jak.

na frekvenci $+\frac{\pi}{\cancel{10}\,4}$ a $-\frac{\pi}{\cancel{10}\,4}$ rad, násobení 16ti.

Příklad 17 Signál s dikrétním časem má délku $N = 6$ a hodnoty $x[n] = [2\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$.
Proveďte nevychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu

2 1

$\hat{R}[4] = \frac{3}{6-4} = \frac{3}{2}$

Příklad 18 Výkon kvantovacího šumu je $P_e = 160$. Určete, na jakou hodnotu se změní tento výkon, pokud se kvantovací krok zmenší dvakrát (přidáme jeden bit).

viz A

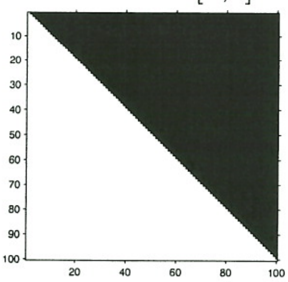
$\frac{160}{4} = 40$

Příklad 19 Obrázek $x[k,l]$ o velikosti 101×101 pixelů má jediný pixel uprostřed bílý: $x[50,50] = 1$, ostatní jsou černé (mají hodnotu nula).
Určete zadaný vzorek jeho dvourozměrné diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT).

viz A

$X[0,0] = 1$

Příklad 20 Obrázek o rozměrech 100×100 pixelů (černá barva má hodnotu 0, bílá hodnotu 1) je filtrován 2D-filtrem. $H[k,l]$. Nakreslete výsledný obrázek nebo popište, co bude obsahovat.



detektor šikmé hrany, ale té opačné :-(

$$H[k,l] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

samé nuly