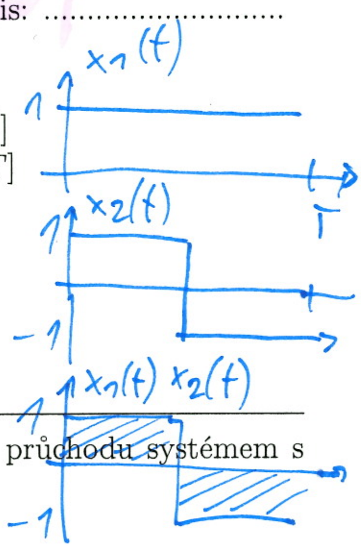
Semestrální zkouška ISS, 2.1.2013, skupina A

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

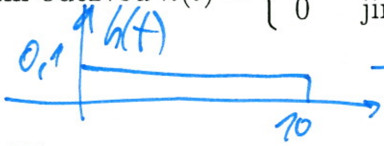
Příklad 1 Určete, zda jsou signály $x_1(t) = 1$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in [0,\ \frac{T}{2}] \\ -1 & \text{pro } t \in [\frac{T}{2},\ T] \end{cases}$ na intervalu $[0,\ T]$ ortogonální.

$\int_0^T x_1(t)\,x_2(t)\,dt = 0$

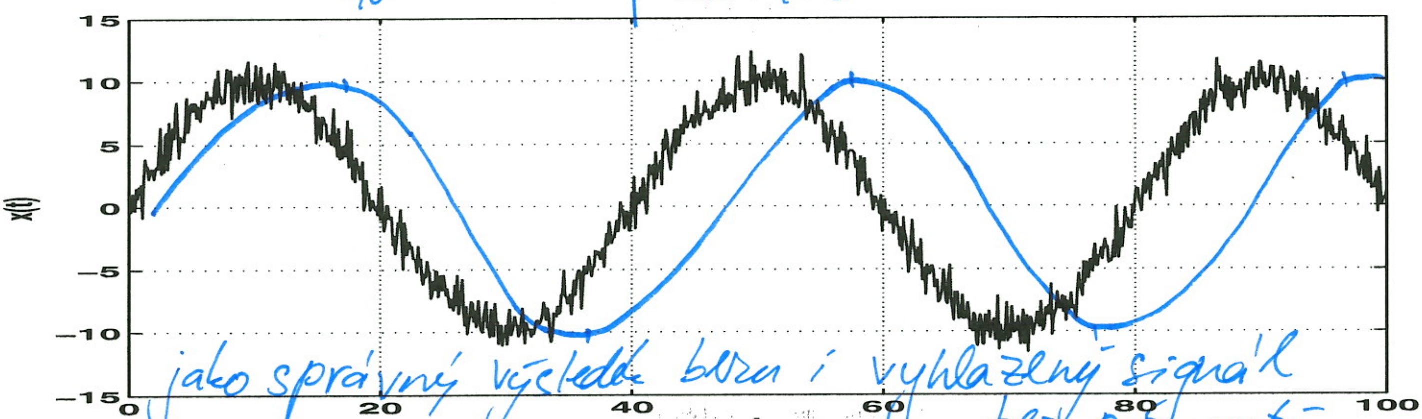


Ortogonální: JSOU / NEJSOU

Příklad 2 Nakreslete do obrázku, jak bude přibližně vypadat zadaný signál po průchodu systémem s impulsní odezvou $h(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } t \in [0,\ 10] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



— průměrování signálu přes 10 s.



jako správný výsledek beru i vyhlazený signál bez posunutí.

Příklad 3 Hodnota spektrální funkce signálu $x(t)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 5$ rad/s je $X(j\omega_1) = 10+1j$. Signál $y(t)$ je dán jako $y(t) = x(\frac{t}{2})$. Určete hodnotu spektrální funkce tohoto signálu na kruhové frekvenci $\omega_2 = 2.5$ rad/s.

$x(t) \rightarrow x(mt): \ X(j\omega) \rightarrow \frac{1}{m} X\left(j\frac{\omega}{m}\right)$

$Y(j\omega_2) =$ $2X(j\omega_1) = 20+2j$

Příklad 4 Zapište spektrální funkci signálu skládajícího se ze dvou Diracových impulsů:
$x(t) = -\delta(t+1) + \delta(t-1)$

úprava na sin není nutná!

$X(j\omega) =$ $-e^{j\omega} + e^{-j\omega} = -(e^{j\omega} - e^{-j\omega}) = -2j\sin\omega$

Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je určeno diferenciální rovnicí:

$$x(t) + 0.5\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - 0.2\frac{dy(t)}{dt}$$

Určete přenosovou funkci systému. $X(s) + 0{,}5s\,X(s) = Y(s) - 0{,}2s\,Y(s)$

$H(s) = \dfrac{1+0{,}5s}{1-0{,}2s}$

Příklad 6 Přenosová funkce systému se spojitým časem je zadána jako:

$$H(s) = s^2 + 2s + 1$$ — pouze čitatel, žádné póly ⇒ stabilní

Určete, zda se jedná o stabilní systém.

Stabilní: ANO / NE

Příklad 7 Stejnosměrný signál je vzorkován na frekvenci $F_s = 44100$ Hz
Určete, zda dojde k aliasingu a doplňte velmi krátké vysvětlení.

stejnosměrný signál má nenulové spektrum pouze na frekvenci nula, tudíž nemůže dojít k aliasingu pro každou $F_s > 0$.

ALIASING: ANO / NE
Proč? ......

Příklad 8 Hodnota Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{10}$ rad je $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 10j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = -\frac{\pi}{10}$ rad

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{-j\omega})^*$$

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ $-10j$

Příklad 9 Je zadán diskrétní periodický signál s periodou $N = 13$:
$\tilde{x}[n] = 10\cos(\frac{2\pi}{13}n + \frac{\pi}{4})$. Určete indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho DFŘ v intervalu $k \in [0, \ N-1]$.

$$|\tilde{X}[1]| = \frac{NC_1}{2} \quad \arg \tilde{X}[1] = \varphi_1$$

$$\tilde{X}[N-1] = \tilde{X}[1]^*$$

$\tilde{X}[1] = 65e^{j\frac{\pi}{4}}$
$\tilde{X}[12] = 65e^{-j\frac{\pi}{4}}$
....

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ má $N = 8$ vzorků $x[0]$ až $x[7]$: 1 2 3 4 5 6 7 8
Jeho 2. koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) je: $X[2] = -4+4j$. Jaká bude hodnota 2. koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, jehož vzorky $y[0]$ až $y[7]$ jsou: 5 6 7 8 1 2 3 4

$m = 4$

pro kruhové zpoždění o m vzorků platí

$$X[k] \rightarrow X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$$

$$(-4+4j)\cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 2\cdot 4} = (-4+4j)e^{-j2\pi} = \text{= totéž.}$$

$Y[2] =$ $-4+4j$

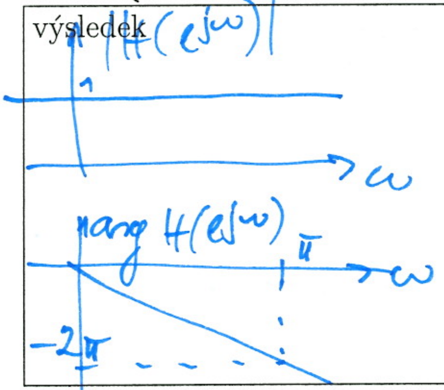
Příklad 11 Vzorkovací frekvence je F_s =8000 Hz. Máme N =256 vzorků diskrétního signálu. Kolika nulami je potřeba doplnit signál ("zero padding"), abychom po výpočtu DFT dostali ve frekvenci rozlišení minimálně 8Hz ? $8000/8 = 1000$ bodů

N_{zeros} = $1000 - 256 = \underline{744}$

Příklad 12 Nakreslete frekvenční charakteristiku (modulovou i argumentovou) číslicového filtru, který realizuje pouze zpoždění a má impulsní odezvu:

$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ Stačí kreslit pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega \in [0, \pi]$.

výsledek



pokud někdo "zalamoval" argument do intervalu $[-\pi, +\pi]$, je to také dobře.

$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} =$

$= e^{-j2\omega}$

modul: 1

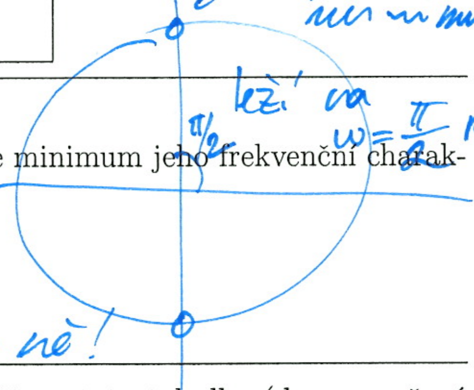
argument: -2ω

Příklad 13 Napište funkci v C pro implementaci filtru s diferenční rovnicí: $y[n] = x[n] - 0.5x[n-1]$ Nezapomeňte na statické proměnné!

```
float filtr (float xn) {
  static float xn1; float yn;
  yn = xn - 0.5 * xn1;
  xn1 = xn;
return yn;
}
```

Příklad 14 Číslicový filtr má přenosovou funkci $H(z) = 1 + z^{-2}$. Určete, na jaké normované kruhové frekvenci v intervalu $\omega \in [0, \pi]$ bude minimum jeho frekvenční charakteristiky. Pomůcka: Řešení kvadratické rovnice $z^2 + 1 = 0$ je $z_{1,2} = \pm j$.

nulový bod způsobí minimum



leží na $\omega = \frac{\pi}{2}$ rad

ω_{min} = $\frac{\pi}{2}$ rad ← bez jednotky OK, ale nezapomínejte na ně!

Příklad 15 Na Ω = 1000 realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-10, 0]	intervaly x_2 [0, 10]
[0, 10]	100	400
[-10, 0]	400	100

převod na $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ – dělení $1000 \cdot 10^2$

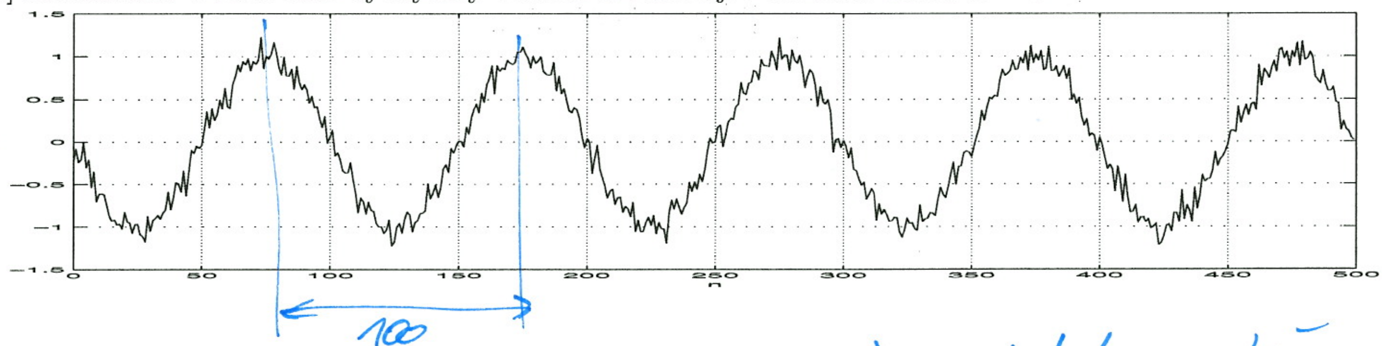
	středy −5	5
5	0,001	0,004
−5	0,004	0,001

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1, n_2]$ = $[(-5) \cdot 5 \cdot 0{,}001 + 5 \cdot 5 \cdot 0{,}004 + (-5)(-5) \cdot 0{,}004 + 5 \cdot (-5) \cdot 0{,}001] \cdot 100 =$

$= -2{,}5 + 10 + 10 - 2{,}5 = \underline{15}$

Příklad 16 Pro zadaný náhodný signál $x[n]$ určete, pro kterou hodnotu k bude autokorelační koeficient $R[k]$ maximální. Používáme vychýlený odhad. Neuvažujte triviální řešení $k = 0$.



$k_{max} = $ 100 správné řešení je ovšem také malé nenulové k, např. 1, 2, 3!

Příklad 17 Stacionární náhodný signál se spojitým časem má hodnoty rovnoměrně rozdělené mezi minimem a maximem, jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } 8 \le x \le 10 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete jeho střední výkon.

střední hodnota

rozptyl, počítali jsme u kvantování $\frac{\Delta^2}{12}$

$P_s = a^2 + D = 9^2 + \frac{2^2}{12} = \underline{81{,}33}$

Příklad 18 Máme k disposici $N = 10$ vzorků náhodného signálu. Koeficienty DFT $X[0 \ldots 4]$ jsou následující:

$X[0] = 5$
$X[1] = 1+j$
$X[2] = 2-j$
$X[3] = 3+j$
$X[4] = 4-j.$

indexy odpovídají frekvencím $k\frac{2\pi}{N}$

$3 \cdot \frac{2\pi}{10} = 0{,}6\pi$.

Odhadněte jeho spektrální hustotu výkonu na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.6\pi$ rad

$G_x(e^{j\omega_1}) = \frac{|X[3]|^2}{10} = \frac{3^2+1^2}{10} = \frac{10}{10} = 1$

Příklad 19 Vypočítejte zadaný koeficient $X[m, n]$ pro 2D-DFT pro obrázek o velikosti 256×256, který je zadán: $x[k, l] = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0, \quad l \in [0,\ 255] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ (tedy pouze první řádek bílý, jinak černo). k indexuje řádky obrázku, l sloupce. m indexuje svislé obrazové frekvence, n vodorovné.

$X[0, 0] = \sum\sum x[k,l]e^{j(0+0)}$ ... takže součet pixelů ... $= \underline{256}$

Příklad 20 Napište matici (masku) 2D filtru o velikosti 3×3 pro detekci šikmých (zprava nahoře doleva dolů) hran v obrázku.

0	-1	0
-1	0	1
0	1	0

nebo podobně.

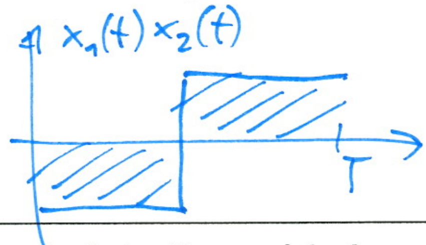
Semestrální zkouška ISS, 2.1.2013, skupina B

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

viz A

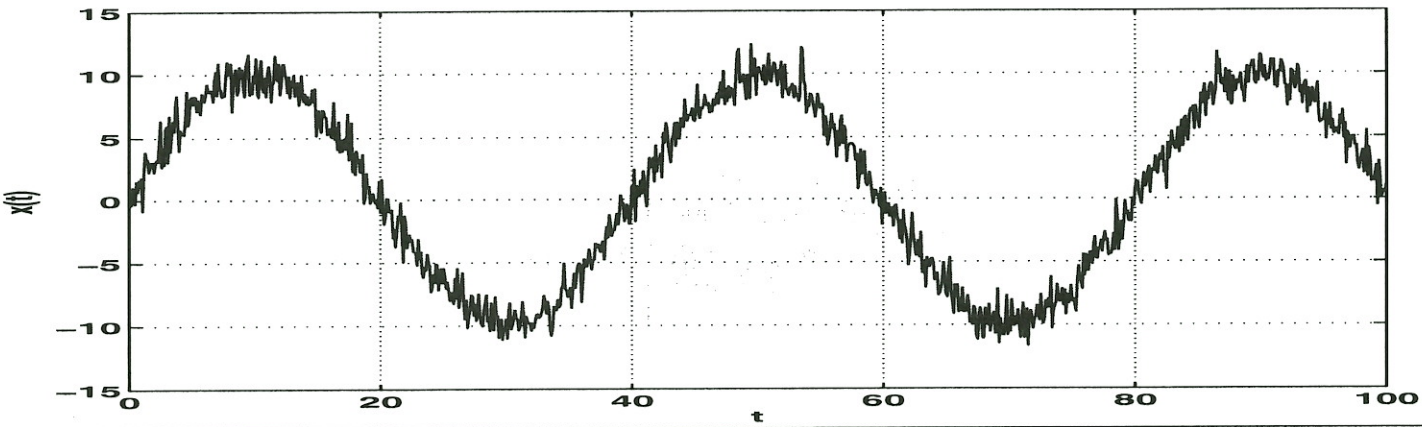
Příklad 1 Určete, zda jsou signály $x_1(t) = 1$ a $x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 1 & \text{pro } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$ na intervalu $[0, T]$ ortogonální.



Ortogonální: JSOU / NEJSOU

Příklad 2 Nakreslete do obrázku, jak bude přibližně vypadat zadaný signál po průchodu systémem s impulsní odezvou $h(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } t \in [0, 10] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

viz A



Příklad 3 Hodnota spektrální funkce signálu $x(t)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 5$ rad/s je $X(j\omega_1)$ =1+10j. Signál $y(t)$ je dán jako $y(t) = x(\frac{t}{2})$. Určete hodnotu spektrální funkce tohoto signálu na kruhové frekvenci $\omega_2 = 2.5$ rad/s.

viz A

$Y(j\omega_2) =$ $2+20j$

Příklad 4 Zapište spektrální funkci signálu skládajícího se ze dvou Diracových impulsů:
$x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$

úprava není nutná

$X(j\omega) =$ $e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos\omega$

Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je určeno diferenciální rovnicí:

$$x(t) + 0.2\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - 0.2\frac{dy(t)}{dt}$$

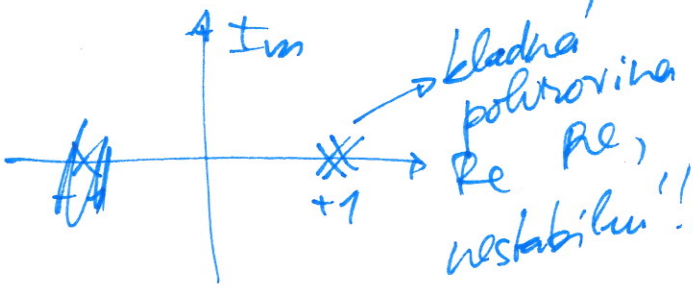
Určete přenosovou funkci systému.

$H(s) =$ $\dfrac{1+0{,}2s}{1-0{,}2s}$ viz A

Příklad 6 Přenosová funkce systému se spojitým časem je zadána jako:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1}{(s-1)(s-1)}$$

Určete, zda se jedná o stabilní systém.



Stabilní: ANO / NE

Příklad 7 Stejnosměrný signál je vzorkován na frekvenci F_s =36000 Hz
Určete, zda dojde k aliasingu a doplňte velmi krátké vysvětlení.

viz A

ALIASING: ANO / NE
Proč? ....

Příklad 8 Hodnota Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{10}$ rad je $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 10j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{39\pi}{10}$ rad.

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}\left(e^{j(-\omega+2k\pi)}\right)^*$$

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ $-10j$

Příklad 9 Je zadán diskrétní periodický signál s periodou $N = 13$:
$\tilde{x}[n] = 6\cos(\frac{2\pi}{13}n - \frac{\pi}{4})$. Určete indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho DFŘ v intervalu $k \in [0, \quad N-1]$.

$$\frac{6 \cdot 13}{2} = 39$$

viz A

$\tilde{X}[1] = 39e^{-j\frac{\pi}{4}}$
$\tilde{X}[12] = 39e^{+j\frac{\pi}{4}}$
....

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ má $N = 8$ vzorků $x[0]$ až $x[7]$: 1 2 3 4 5 6 7 8
Jeho 2. koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) je: $X[2] = -4+4$j. Jaká bude hodnota 2. koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, jehož vzorky $y[0]$ až $y[7]$ jsou: 7 8 1 2 3 4 5 6

$m = 2$

$$(-4+4j)e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 2 \cdot 2} = (-4+4j)\underbrace{e^{-j\pi}}_{-1}$$

$Y[2] =$ $4-4j$

Příklad 11 Vzorkovací frekvence je F_s =8000 Hz. Máme N =256 vzorků diskrétního signálu. Kolika nulami je potřeba doplnit signál ("zero padding"), abychom po výpočtu DFT dostali ve frekvenci rozlišení minimálně 4Hz ?

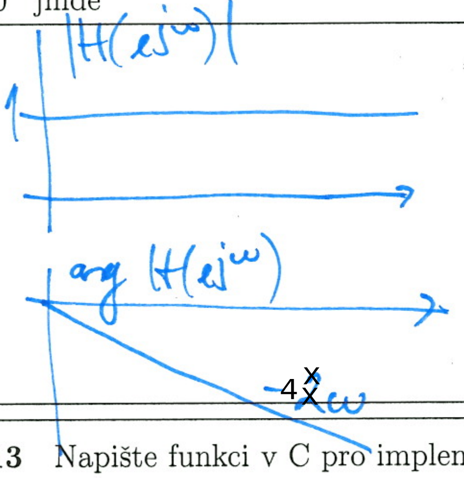
8000/4 = 2000 bodů

N_{zeros} = 2000 − 256 = 1744

Příklad 12 Nakreslete frekvenční charakteristiku (modulovou i argumentovou) číslicového filtru, který realizuje pouze zpoždění a má impulsní odezvu:

$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 4 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ Stačí kreslit pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega \in [0, \pi]$.

výsledek



viz A

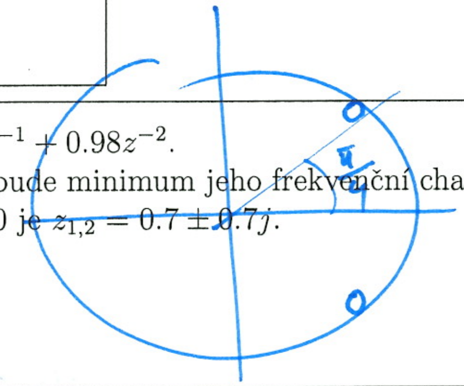
modul: 1

argument −4ω

Příklad 13 Napište funkci v C pro implementaci filtru s diferenční rovnicí: $y[n] = x[n] + 0.5y[n-1]$
Nezapomeňte na statické proměnné!

```
float filtr (float xn) {
    float yn; static float yn1;
    yn = xn + 0.5 * yn1;
    yn1 = yn;
return yn;
}
```

Příklad 14 Číslicový filtr má přenosovou funkci $H(z) = 1 + 1.4z^{-1} + 0.98z^{-2}$.
Určete, na jaké normované kruhové frekvenci v intervalu $\omega \in [0, \pi]$ bude minimum jeho frekvenční charakteristiky. Pomůcka: Řešení kvadratické rovnice $z^2 + 1.4z + 0.98 = 0$ je $z_{1,2} = 0.7 \pm 0.7j$.



ω_{min} = $\frac{\pi}{4}$ rad

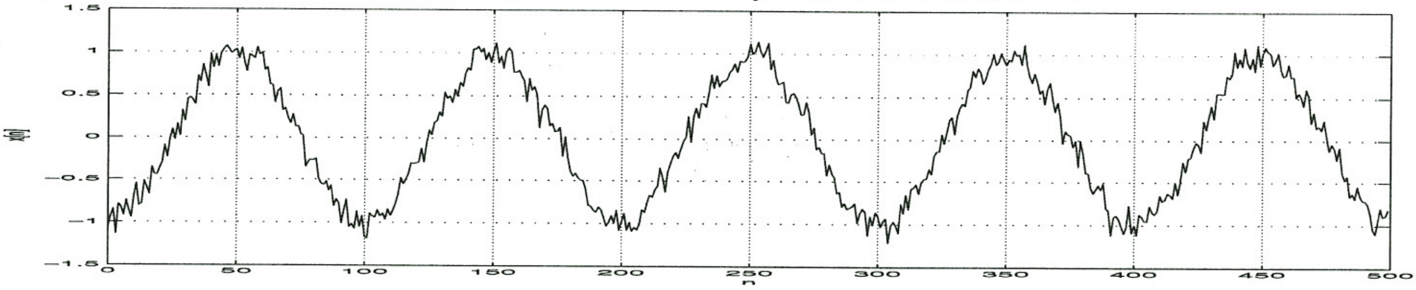
Příklad 15 Na Ω = 1000 realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-10, 0]	intervaly x_2 [0, 10]
[0, 10]	100	400
[-10, 0]	400	100

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1, n_2]$ = 15 viz A

Příklad 16 Pro zadaný náhodný signál $x[n]$ určete, pro kterou hodnotu k bude autokorelační koeficient $R[k]$ maximální. Používáme vychýlený odhad. Neuvažujte triviální řešení $k = 0$.



$k_{max} =$ 100 nebo něco malého

Příklad 17 Stacionární náhodný signál se spojitým časem má hodnoty rovnoměrně rozdělené mezi minimem a maximem, jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } 6 \le x \le 8 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Určete jeho střední výkon. viz A

$P_s = 7^2 + \frac{2^2}{12} = 49\frac{1}{3}$

Příklad 18 Máme k disposici $N = 10$ vzorků náhodného signálu. Koeficienty DFT $X[0\ldots4]$ jsou následující:
viz A

$X[0] = 5$
$X[1] = 1+j$
$X[2] = 2-j$
$X[3] = 3+j$
$X[4] = 4-j$.

Odhadněte jeho spektrální hustotu výkonu na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.8\pi$ rad

$G_x(e^{j\omega_1}) = \frac{|X[4]|^2}{10} = \frac{4^2+1^2}{10} = 1{,}7$

Příklad 19 Vypočítejte zadaný koeficient $X[m,n]$ pro 2D-DFT pro obrázek o velikosti 256×256, který je zadán: $x[k,l] = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0, \quad l \in [0,\ 255] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ (tedy pouze první řádek bílý, jinak černo). k indexuje řádky obrázku, l sloupce. m indexuje svislé obrazové frekvence, n vodorovné.

$X[0,1] = \sum\sum x[k,l]\, e^{-j2\pi\left(0+\frac{l}{256}\right)}$, má smysl počítat jen pro $k=0$, takže $\sum_{l=0}^{255} 1 \cdot e^{-j2\pi\frac{l}{256}} = 0$

jedna "otočka" komplex. exponenciály, součet $\emptyset$.

Příklad 20 Napište matici (masku) 2D filtru o velikosti 3×3 pro detekci šikmých (zleva nahoře doprava dolů) hran v obrázku.

0	1	0
-1		1
0	-1	0

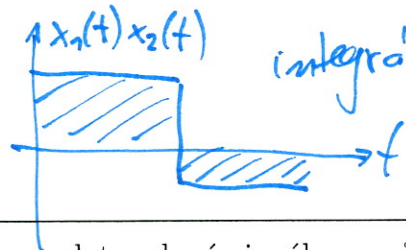
nebo podobně.

Semestrální zkouška ISS, 2.1.2013, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

viz A

Příklad 1 Určete, zda jsou signály $x_1(t) = 1$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in [0,\ \frac{T}{2}] \\ -0.5 & \text{pro } t \in [\frac{T}{2},\ T] \end{cases}$
na intervalu $[0,\ T]$ ortogonální.

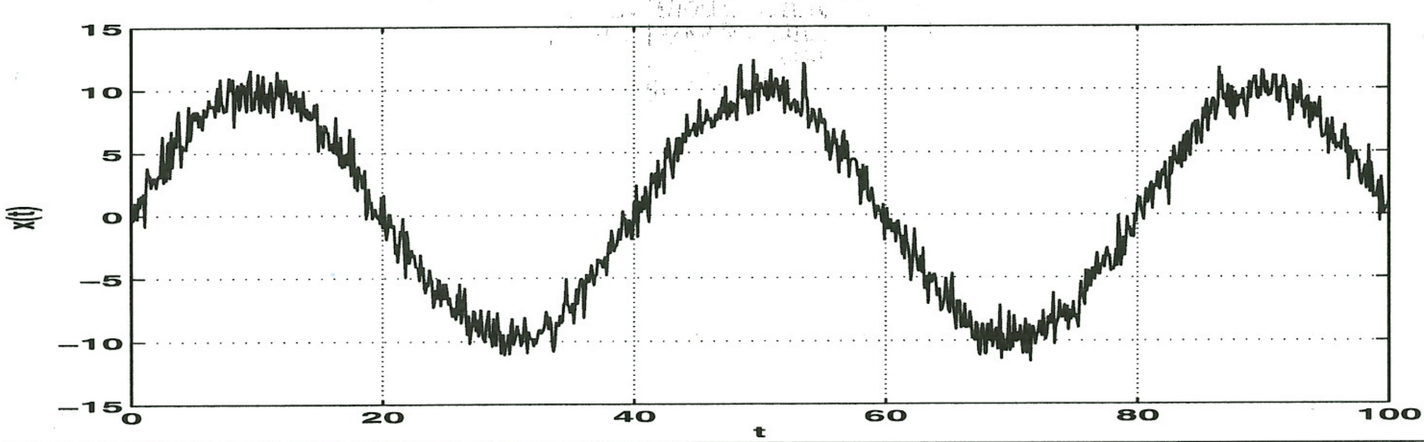


integrál není nula!

Ortogonální: JSOU / NEJSOU

Příklad 2 Nakreslete do obrázku, jak bude přibližně vypadat zadaný signál po průchodu systémem s impulsní odezvou $h(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } t \in [0,\ 10] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

viz A



Příklad 3 Hodnota spektrální funkce signálu $x(t)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 5$ rad/s je $X(j\omega_1) = 10+10j$. Signál $y(t)$ je dán jako $y(t) = x(\frac{t}{2})$. Určete hodnotu spektrální funkce tohoto signálu na kruhové frekvenci $\omega_2 = 2.5$ rad/s.

viz A

$Y(j\omega_2) =$ $20 + 20j$

Příklad 4 Zapište spektrální funkci signálu skládajícího se ze dvou Diracových impulsů:
$x(t) = \delta(t+1) - \delta(t-1)$

úprava není nutná

$X(j\omega) =$ $e^{j\omega} - e^{-j\omega} = 2j\sin\omega$

Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je určeno diferenciální rovnicí:

$$x(t) + 0.3\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - 0.2\frac{dy(t)}{dt}$$

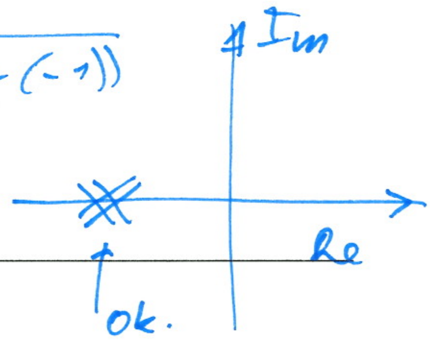
Určete přenosovou funkci systému.

$H(s) =$ $\dfrac{1 + 0{,}3s}{1 - 0{,}2s}$ viz A

Příklad 6 Přenosová funkce systému se spojitým časem je zadána jako:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} = \frac{1}{(s+1)(s+1)} = \frac{1}{(s-(-1))(s-(-1))}$$

Určete, zda se jedná o stabilní systém.



Stabilní: ANO / NE

Příklad 7 Stejnosměrný signál je vzorkován na frekvenci F_s =8000 Hz
Určete, zda dojde k aliasingu a doplňte velmi krátké vysvětlení.

viz A

ALIASING: ANO / NE
Proč? ....

Příklad 8 Hodnota Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{10}$ rad je $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 10j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{21\pi}{10}$ rad

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega + 2k\pi)})$$

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ ...10j...

Příklad 9 Je zadán diskrétní periodický signál s periodou $N = 13$:
$\tilde{x}[n] = 8\cos(\frac{2\pi}{13}n + \frac{\pi}{3})$. Určete indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho DFŘ v intervalu $k \in [0, \quad N-1]$.

$$\frac{8 \cdot 13}{2} = 52$$

viz A

$\tilde{X}[1] = 52 e^{j\frac{\pi}{3}}$
$\tilde{X}[12] = 52 e^{-j\frac{\pi}{3}}$
....

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ má $N = 8$ vzorků $x[0]$ až $x[7]$: 1 2 3 4 5 6 7 8
Jeho 2. koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) je: $X[2]$ = -4+4j. Jaká bude hodnota 2. koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, jehož vzorky $y[0]$ až $y[7]$ jsou: 3 4 5 6 7 8 1 2

$m = 6$

$$(-4+4j)e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 6 \cdot 2} = (-4+4j)\underbrace{e^{-j3\pi}}_{-1}$$

$Y[2] =$ ...4 − 4j...

Příklad 11 Vzorkovací frekvence je F_s =8000 Hz. Máme N =256 vzorků diskrétního signálu. Kolika nulami je potřeba doplnit signál ("zero padding"), abychom po výpočtu DFT dostali ve frekvenci rozlišení minimálně 2Hz ?

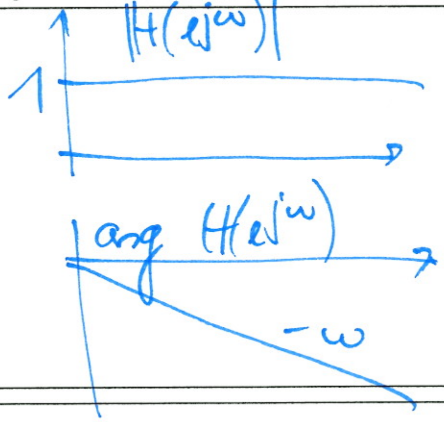
$8000/2 = 4000$

N_{zeros} = $4000 - 256 = 3744$

Příklad 12 Nakreslete frekvenční charakteristiku (modulovou i argumentovou) číslicového filtru, který realizuje pouze zpoždění a má impulsní odezvu:

$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n = 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ Stačí kreslit pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega \in [0, \pi]$.

výsledek



viz A

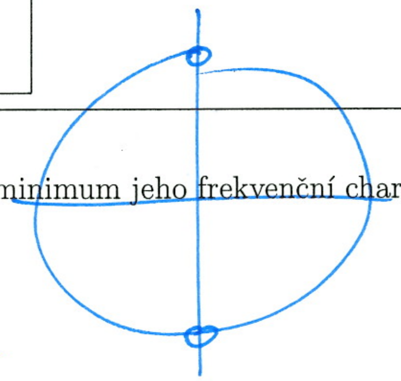
modul: 1

arg: $-\omega$

Příklad 13 Napište funkci v C pro implementaci filtru s diferenční rovnicí: $y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$
Nezapomeňte na statické proměnné!

```
float filtr (float xn) {
   float yn; static float yn1;
   yn = xn - 0.5* yn1;
   yn1 = yn;
return yn;
}
```

Příklad 14 Číslicový filtr má přenosovou funkci $H(z) = 1 + z^{-2}$.
Určete, na jaké normované kruhové frekvenci v intervalu $\omega \in [0, \pi]$ bude minimum jeho frekvenční charakteristiky. Pomůcka: Řešení kvadratické rovnice $z^2 + 1 = 0$ je $z_{1,2} = \pm j$.



ω_{min} = $\frac{\pi}{2}$ rad

viz A

Příklad 15 Na Ω = 1000 realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

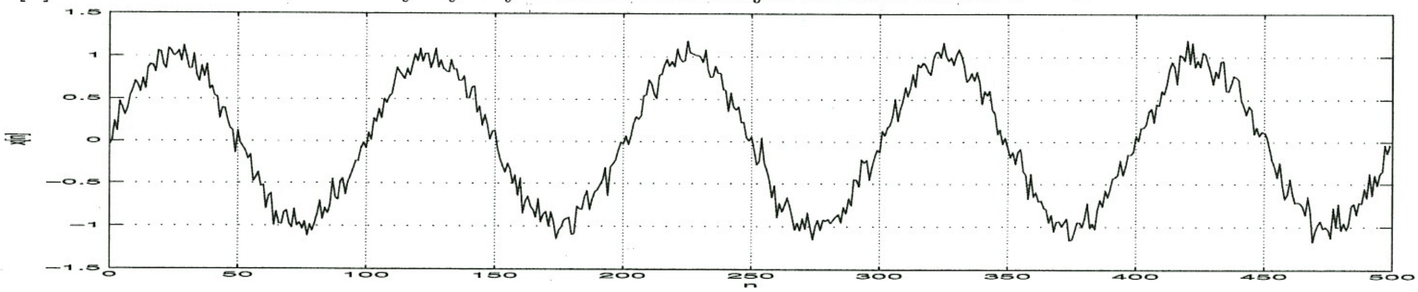
intervaly x_1	intervaly x_2 [-10, 0]	intervaly x_2 [0, 10]
[0, 10]	100	400
[-10, 0]	400	100

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1, n_2]$ = 15

viz A

Příklad 16 Pro zadaný náhodný signál $x[n]$ určete, pro kterou hodnotu k bude autokorelační koeficient $R[k]$ maximální. Používáme vychýlený odhad. Neuvažujte triviální řešení $k = 0$.



$k_{max} =$ .... 100 nebo něco malého

Příklad 17 Stacionární náhodný signál se spojitým časem má hodnoty rovnoměrně rozdělené mezi minimem a maximem, jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } 7 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete jeho střední výkon. viz A

$P_s =$ .... $8^2 + \frac{2^2}{12} = 64\frac{1}{3}$

Příklad 18 Máme k disposici $N = 10$ vzorků náhodného signálu. Koeficienty DFT $X[0\ldots4]$ jsou následující:

$X[0] = 5$ viz A

$X[1] = 1+\mathrm{j}$

$X[2] = 2-\mathrm{j}$

$X[3] = 3+\mathrm{j}$

$X[4] = 4-\mathrm{j}$.

Odhadněte jeho spektrální hustotu výkonu na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.4\pi$ rad

$G_x(e^{j\omega_1}) =$ .... $\frac{|X[2]|^2}{10} = \frac{2^2+1^2}{10} = 0{,}5$

Příklad 19 Vypočítejte zadaný koeficient $X[m,n]$ pro 2D-DFT pro obrázek o velikosti 256×256, který je zadán: $x[k,l] = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0, \quad l \in [0,\ 255] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ (tedy pouze první řádek bílý, jinak černo). k indexuje řádky obrázku, l sloupce. m indexuje svislé obrazové frekvence, n vodorovné.

$X[0,2] =$ .... viz B, dvě "otočky" komplexní exponenciály = 0.

Příklad 20 Napište matici (masku) 2D filtru o velikosti 3×3 pro detekci vodorovných hran v obrázku.

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

nebo podobně

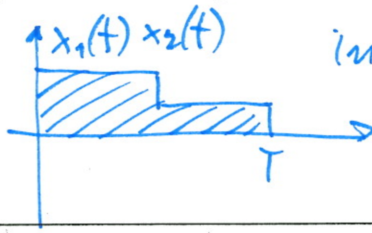
REF

Semestrální zkouška ISS, 2.1.2013, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

viz A

Příklad 1 Určete, zda jsou signály $x_1(t) = 1$ a $x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in [0, \frac{T}{2}] \\ 0.5 & \text{pro } t \in [\frac{T}{2}, T] \end{cases}$ na intervalu $[0, T]$ ortogonální.

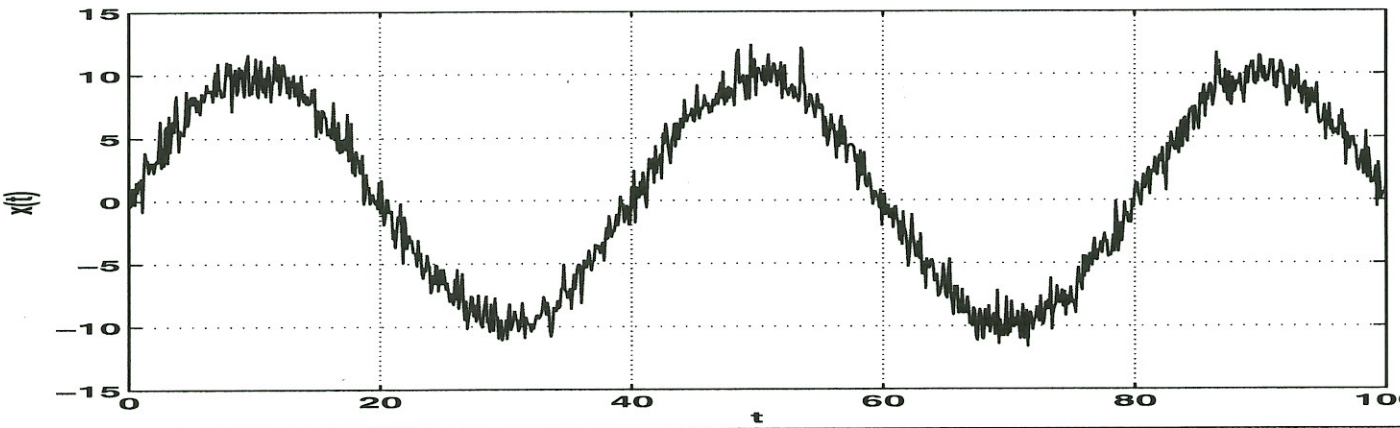


integrál není nula!

Ortogonální: JSOU / NEJSOU

Příklad 2 Nakreslete do obrázku, jak bude přibližně vypadat zadaný signál po průchodu systémem s impulsní odezvou $h(t) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } t \in [0, 10] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

viz A



Příklad 3 Hodnota spektrální funkce signálu $x(t)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 5$ rad/s je $X(j\omega_1)$ =1+1j. Signál $y(t)$ je dán jako $y(t) = x(\frac{t}{2})$. Určete hodnotu spektrální funkce tohoto signálu na kruhové frekvenci $\omega_2 = 2.5$ rad/s.

viz A

$Y(j\omega_2) =$ $2+2j$

Příklad 4 Zapište spektrální funkci signálu skládajícího se ze dvou Diracových impulsů: $x(t) = -\delta(t+1) - \delta(t-1)$

úprava není nutná

$X(j\omega) =$ $-e^{+j\omega} - e^{-j\omega} = -2\cos\omega$

Příklad 5 Chování systému se spojitým časem je určeno diferenciální rovnicí:

$$x(t) - 0.5\frac{dx(t)}{dt} = y(t) - 0.2\frac{dy(t)}{dt}$$

Určete přenosovou funkci systému.

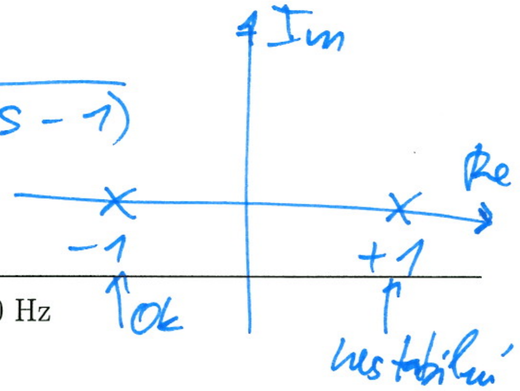
$H(s) =$ $\dfrac{1-0{,}5s}{1-0{,}2s}$

viz A

Příklad 6 Přenosová funkce systému se spojitým časem je zadána jako:

$$H(s) = \frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{(s+1)(s-1)} = \frac{1}{(s-(-1))(s-1)}$$

Určete, zda se jedná o stabilní systém.



Stabilní: ANO / NE

Příklad 7 Stejnosměrný signál je vzorkován na frekvenci F_s =16000 Hz
Určete, zda dojde k aliasingu a doplňte velmi krátké vysvětlení.

viz A

ALIASING: ANO / NE
Proč? ....

Příklad 8 Hodnota Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{10}$ rad je $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 10j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{19\pi}{10}$ rad

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(-\omega+2k\pi)})$$

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ $-10j$

Příklad 9 Je zadán diskrétní periodický signál s periodou $N = 13$:
$\tilde{x}[n] = 4\cos(\frac{2\pi}{13}n - \frac{\pi}{3})$. Určete indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho DFŘ v intervalu $k \in [0, \quad N-1]$.

$$\frac{4 \cdot 13}{2} = 26$$

viz A

$\tilde{X}[1] = 26e^{-j\frac{\pi}{3}}$
$\tilde{X}[12] = 26e^{+j\frac{\pi}{3}}$
....

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ má $N = 8$ vzorků $x[0]$ až $x[7]$: 1 2 3 4 5 6 7 8
Jeho 2. koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) je: $X[2]$ = -4+4j. Jaká bude hodnota 2. koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, jehož vzorky $y[0]$ až $y[7]$ jsou: 3 4 5 6 7 8 1 2

$m=6$

viz C

$Y[2] =$ $4-4j$

Příklad 11 Vzorkovací frekvence je F_s =8000 Hz. Máme N =256 vzorků diskrétního signálu. Kolika nulami je potřeba doplnit signál ("zero padding"), abychom po výpočtu DFT dostali ve frekvenci rozlišení minimálně 1Hz ? $8000/1 = 8000$

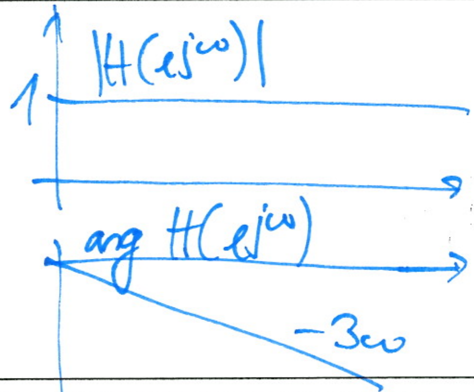
N_{zeros} = $8000 - 256 = 7744$

Příklad 12 Nakreslete frekvenční charakteristiku (modulovou i argumentovou) číslicového filtru, který realizuje pouze zpoždění a má impulsní odezvu:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Stačí kreslit pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega \in [0, \pi]$.

výsledek



viž A

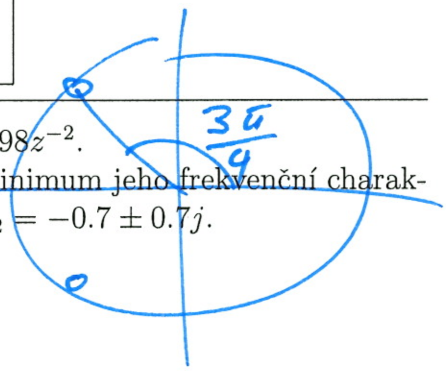
modul: 1

arg: -3ω

Příklad 13 Napište funkci v C pro implementaci filtru s diferenční rovnicí: $y[n] = x[n] + 0.5x[n-1]$
Nezapomeňte na statické proměnné!

```
float filtr (float xn) {
  float yn; static float xn1;
  yn = xn + 0.5 * xn1;
  xn1 = xn;
return yn;
}
```

Příklad 14 Číslicový filtr má přenosovou funkci $H(z) = 1 - 1.4z^{-1} + 0.98z^{-2}$.
Určete, na jaké normované kruhové frekvenci v intervalu $\omega \in [0, \pi]$ bude minimum jeho frekvenční charakteristiky. Pomůcka: Řešení kvadratické rovnice $z^2 - 1.4z + 0.98 = 0$ je $z_{1,2} = -0.7 \pm 0.7j$.



ω_{min} = $\frac{3}{4}\pi$ rad

Příklad 15 Na Ω = 1000 realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

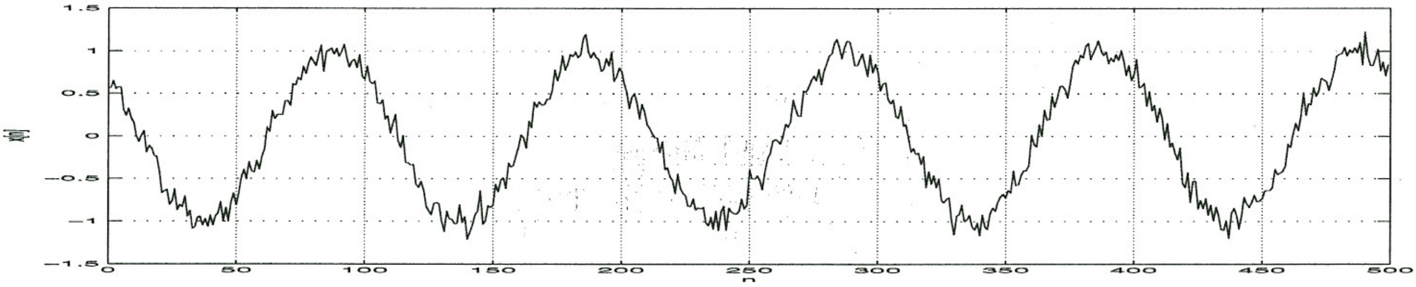
intervaly x_1	intervaly x_2 [-10, 0]	[0, 10]
[0, 10]	100	400
[-10, 0]	400	100

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1, n_2]$ = 15

viz A

Příklad 16 Pro zadaný náhodný signál $x[n]$ určete, pro kterou hodnotu k bude autokorelační koeficient $R[k]$ maximální. Používáme vychýlený odhad. Neuvažujte triviální řešení $k = 0$.



$k_{max} =$ 100 nebo něco malého.

Příklad 17 Stacionární náhodný signál se spojitým časem má hodnoty rovnoměrně rozdělené mezi minimem a maximem, jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } 8 \le x \le 10 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete jeho střední výkon.

viz A

$P_s = 9^2 + \frac{\Delta^2}{12} = \underline{\underline{81,33}}$

Příklad 18 Máme k disposici $N = 10$ vzorků náhodného signálu. Koeficienty DFT $X[0\ldots4]$ jsou následující:

$X[0] = 5$
$X[1] = 1+j$
$X[2] = 2-j$
$X[3] = 3+j$
$X[4] = 4-j$.

viz A

Odhadněte jeho spektrální hustotu výkonu na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.2\pi$ rad

$G_x(e^{j\omega_1}) = \frac{|X[1]|^2}{10} = \frac{1^2+1^2}{10} = 0,2$

Příklad 19 Vypočítejte zadaný koeficient $X[m,n]$ pro 2D-DFT pro obrázek o velikosti 256×256, který je zadán: $x[k,l] = \begin{cases} 1 & \text{pro } k = 0, \quad l \in [0,\ 255] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ (tedy pouze první řádek bílý, jinak černo). k indexuje řádky obrázku, l sloupce. m indexuje svislé obrazové frekvence, n vodorovné.

$X[1,0] = \sum\sum x[k,l] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k}{256}+0\right)}$ ... má smysl počítat jen pro $k=0$, takže $e^{-j2\pi(0+0)} = 1$ ... takže součet pixelů $= \underline{\underline{256}}$

Příklad 20 Napište matici (masku) 2D filtru o velikosti 3×3 pro detekci svislých hran v obrázku.

1	0	-1
2	0	-2
1	0	-1

nebo podobně.