Semestrální zkouška ISS, 6.1.2012, skupina A

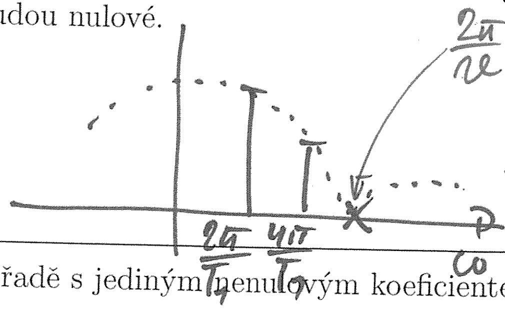
REF. A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je periodický sled obdélníkových impulsů o periodě T_1, jejichž délka je $\vartheta = \frac{T_1}{3}$. Určete, které koeficienty jeho Fourierovy řady c_k budou nulové.

c_3, c_6, c_9, c_{12}, atd.

$c_{-3}, c_{-6}, c_{-9}, c_{-12}$, atd.



$$\frac{2\pi}{\vartheta} = \frac{2\pi}{\frac{T_1}{3}} = \frac{6\pi}{T_1}$$

tedy každý třetí nula

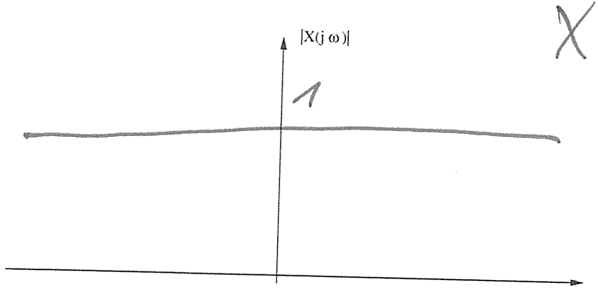
Příklad 2 Napište signál odpovídající Fourierově řadě s jediným nenulovým koeficientem: $c_{-1} = 3$

$x(t) =$ $3e^{-j\omega_1 t}$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

pouze jeden není nula.

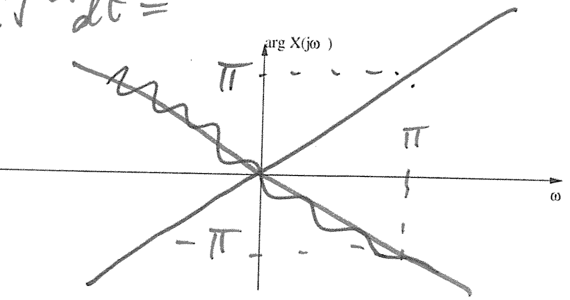
Příklad 3 Nakreslete modul a argument spektrální funkce posunutého Diracova impulsu: $x(t) = \delta(t+1)$



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = e^{+j\omega}$$

modul = 1

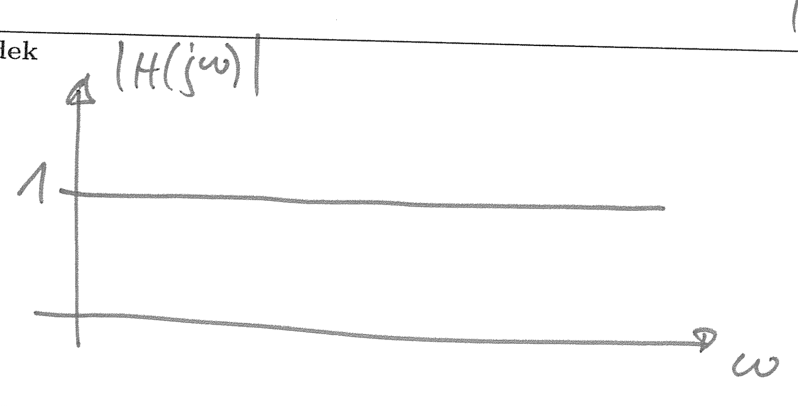
arg = +ω

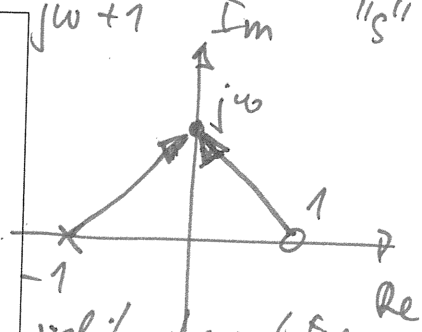


Příklad 4 Systém se spojitým časem je popsán přenosovou funkcí $H(s) = \frac{s-1}{s+1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ pro kladné kruhové frekvence ω, přesně jej určete pro $\omega = 0$.

$$H(j\omega) = \frac{j\omega - 1}{j\omega + 1}$$

výsledek

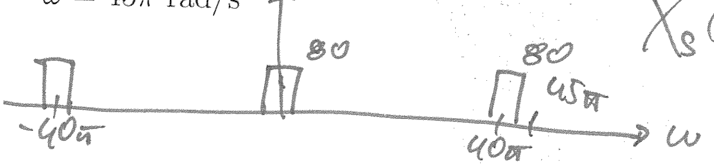




velikosti vektorů jsou vždy stejné, jejich podíl je 1.

Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ se spojitým časem má tvar obdélníka:
$$X(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro } \omega \in [-1\,\text{rad/s},\ 1\,\text{rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$
. Vzorkovací frekvence je $F_s = 20$ Hz.
Určete hodnotu spektrální funkce $X_s(j\omega)$ ideálně navzorkovaného signálu $x_s(t)$ pro kruhovou frekvenci: $\omega = 45\pi$ rad/s

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T_1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega + k\Omega_s)$$



- periodisace
- násobení hodnotou F_s.

$\Omega_s = 40\pi$ rad/s

$X_s(j\omega) =$ 0

A

Příklad 6 Jsou dány dvě cosinusovky s diskrétním časem: $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi}{32}n)$ a $x_2[n] = \cos(\frac{2\pi}{16}n)$ Určete hodnotu 16tého vzorku signálu, který vznikl vynásobením těchto cosinusovek: $y[n] = x_1[n]x_2[n]$.

$$x_1[16] = \cos\frac{32\pi}{32} = \cos\pi = -1$$

$$x_2[16] = \cos\frac{2\pi\cdot 16}{16} = \cos 2\pi = 1$$

$y[16] =$ −1

Příklad 7 Jsou dány dva diskrétní signály délky $N = 5$:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	4	4	0	0	0
$x_2[n]$	1	0	0	-2	0

1 0 −2 0 0

Určete hodnotu jejich periodické konvoluce $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$ pro $n = 9$.

0 −2 0 0 1

odpovídá $n = 4$ v základním intervalu $0 \dots N-1$

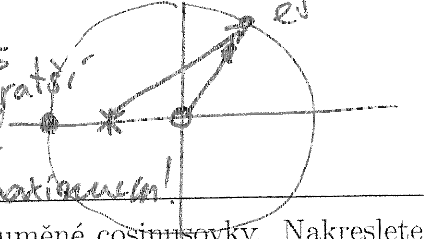
$y[9] =$ −8

Příklad 8 Napište funkci v C implementující číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$

$$y[n] = x[n] - 0{,}5\,y[n-1] - 0{,}2\,y[n-2]$$

```
float filtr_zkouska (float x) {
  float yn;
  static float yn1, yn2;
  yn = x - 0.5 * yn1 - 0.2 * yn2;
  yn2 = yn1;
  yn1 = yn;
  return yn;
}
```

Příklad 9 Určete polohu (normovaná kruhová frekvence v intervalu $[0, \pi]$) a hodnotu maxima modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}} = \frac{z}{z+0{,}5}$

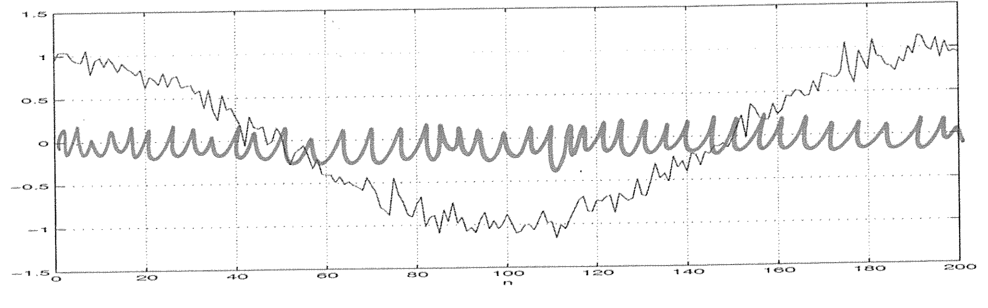


ZDE je nejkratší vektor od pólu ⇒ maximum!

$\omega_{max} =$ π rad, $|H(e^{j\omega})|_{max} = \frac{1}{0{,}5} = 2$

Příklad 10 Na obrázku je signál s diskrétním časem: jedna perioda zašuměné cosinusovky. Nakreslete do téhož obrázku, jak bude signál vypadat po průchodu číslicovým filtrem $H(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$

horní propust'



A

Příklad 11 Určete impulsní odezvu číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}$

pro FIR je stejná jako koeficienty, pak nula.]/

n	0	1	2	3
$h[n]$	1	0,2	0,4	0

Příklad 12 Nakreslete modul Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $|\tilde{X}(e^{j\omega})|$ pro signál o délce $N = 4$: $x[0] = 0, \quad x[1] = 0, \quad x[2] = 2, \quad x[3] = 0.$
pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \quad 2\pi]$.

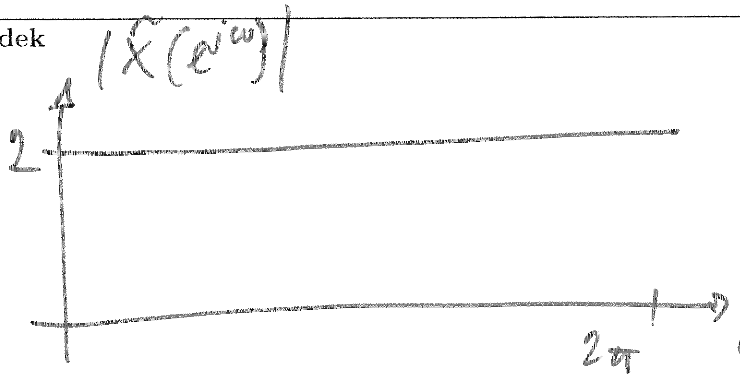
$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

pouze jeden nenulový vzorek.

$= 2 e^{-j\omega 2}$

Modul tohoto čísla je 2 pro $\forall$ ω.

výsledek



Příklad 13 Diskrétní signál má $N = 8$ vzorků, všechny hodnoty jsou nulové kromě $x[1] = 1$.
Vypočtěte koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

pouze jeden nenulový vzorek.

$$X[4] = x[1] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot 4 \cdot 1} = 1 \cdot e^{-j\pi}$$

$X[4] =$ ....-1

Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 2, \quad X[1] = 1 - j, \quad X[2] = 0, \quad X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[0]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4(n)x[\mod_4(n-2)]$.

stejnosměrná složka, té je kruhové zpoždění jedno!

$Y[0] =$ 2

Příklad 15 Je dán 2D-filtr (někdy nazývaný také "konvoluční jádro" nebo "maska"):

$$h[k,l] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

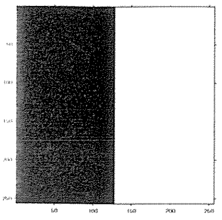
Vlevo jsou pixely původního obrázku $x[k,l]$. Vyplňte vpravo hodnoty pixelů filtrovaného obrázku $y[k,l]$.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	100	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

0	0	0	0	0
0	11	11	11	0
0	11	11	11	0
0	11	11	11	0
0	0	0	0	0

4

Příklad 16 Obrázek $x[k,l]$ má 256x256 pixelů. Uveďte, které z modulů jeho prvních 4 koeficientů 2D-DFT: $X[0,0]$, $X[0,1]$, $X[1,0]$, $X[1,1]$ jsou kladné (značkou '+'), a které nulové (značkou '0').

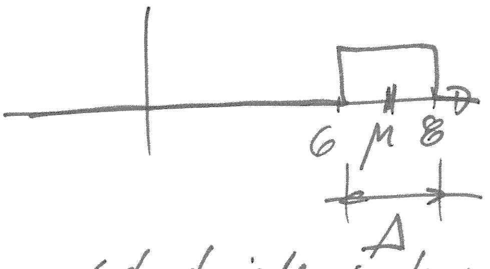


stejnosměrná složka - je
vodorovná frekvence - ANO (změna)
svislá - NE
(beze změny)

$X[m,n]$:

$m \downarrow$ $n \rightarrow$	0	1
0	+	+
1	0	0

Příklad 17 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } x \in [6,\ 8] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Určete střední výkon tohoto signálu.



ze vzorkování!

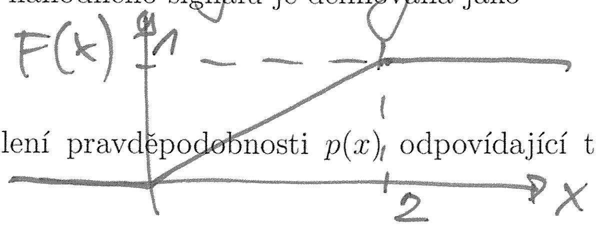
$D = \frac{\Delta^2}{12}$

$P_s = \mu^2 + D$

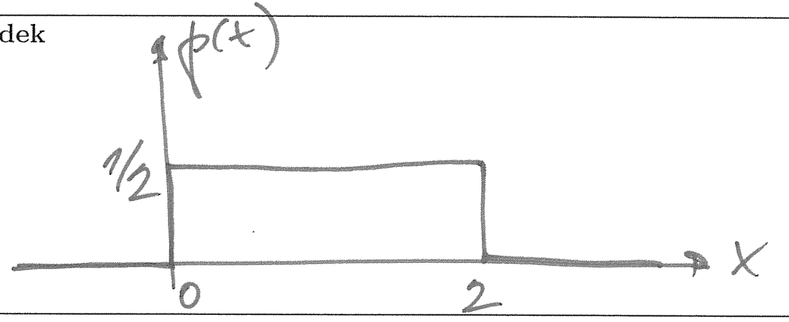
$P_s = 7^2 + \frac{2^2}{12} = \underline{\underline{49,33}}$

nebo to jde integrovat

Příklad 18 Distribuční funkce stacionárního náhodného signálu je definována jako
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{pro } x \in [0,2] \\ 1 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$
Napište nebo nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ odpovídající této distribuční funkci.



výsledek



p(x) je <u>derivace</u> F(x)

Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-4, -2]	[-2, 0] -1	[0, 2] 1	[2, 4] 3
[2, 4] 3	0	0	0	1000
[0, 2] 1	0	0	1500	0
[-2, 0] -1	0	1500	0	0
[-4, -2]	0	0	0	0

převod na $p(x_1, x_2)$:
- dělení počtem realizací
- dělení plochou čtverečku.

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1,n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1,n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1,x_2,n_1,n_2)dx_1dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1,n_2] = \frac{(3 \cdot 3 \cdot 1000 + 1 \cdot 1 \cdot 1500 + (-1)(-1) \cdot 1500)4}{4000 \cdot 4} = \frac{12000}{\cancel{16000}\ 4000} = \underline{\underline{\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}}} = \mathbf{3}$

Příklad 20 Kvantizační hladiny kvantizéru jsou lichá čísla: ...,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,.... Kvantování probíhá standardně zaokrouhlováním na nejbližší hladinu. Do kvantizéru přichází vstupní signál $x[n]$, který nabývá pouze dvou hodnot: +10 nebo -10.
Určete poměr signálu k šumu v dB při kvantování tohoto signálu.

chyba - vždy 1

$P_e = 1^2 = 1$
$P_s = 10^2 = 100$

$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 10 \log_{10} \frac{100}{1} = 20$

SNR= 20 dB

Semestrální zkouška ISS, 6.1.2012, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je periodický sled obdélníkových impulsů o periodě T_1, jejichž délka je $\vartheta = \frac{T_1}{6}$ Určete, které koeficienty jeho Fourierovy řady c_k budou nulové.

c_6, c_{12}, c_{18}, atd.

c_{-6}, c_{-12}, c_{-18}, atd.

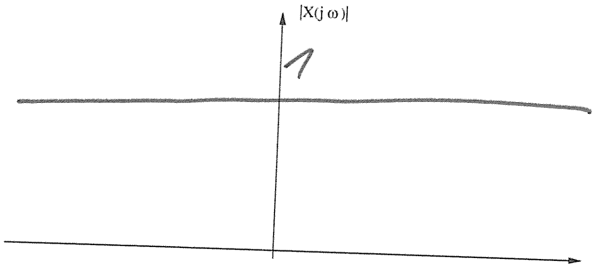
viz A

Příklad 2 Napište signál odpovídající Fourierově řadě s jediným nenulovým koeficientem: $c_{-1} = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$

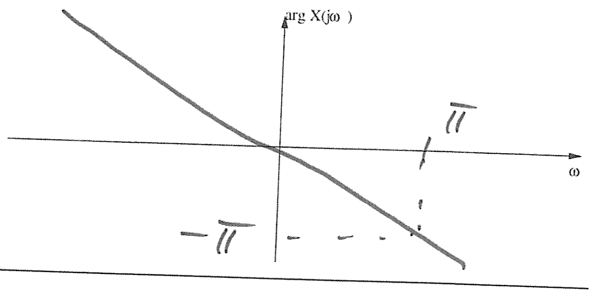
$x(t) = 4 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-j\omega_1 t}$

viz A

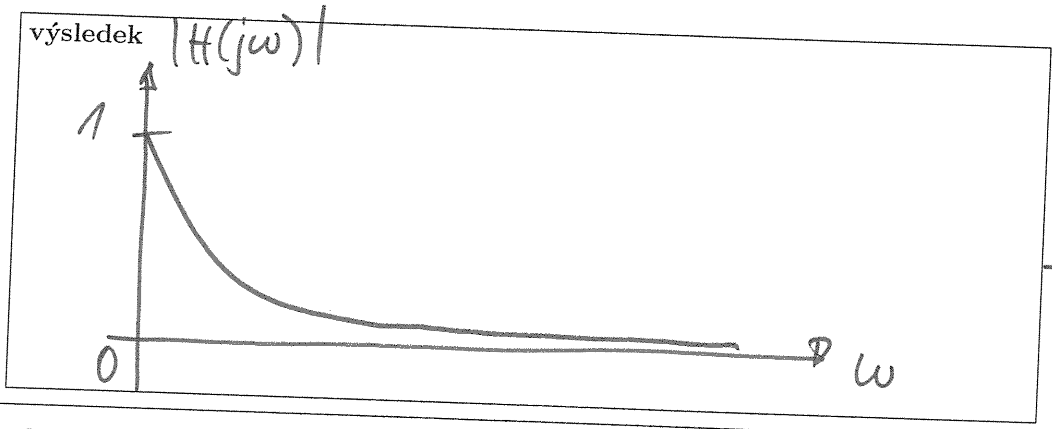
Příklad 3 Nakreslete modul a argument spektrální funkce posunutého Diracova impulsu: $x(t) = \delta(t-1)$



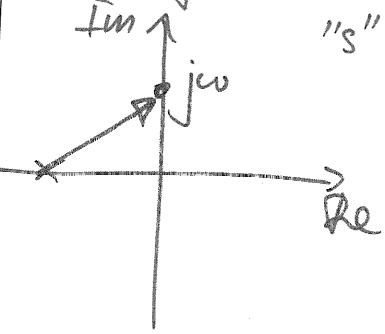
viz A



Příklad 4 Systém se spojitým časem je popsán přenosovou funkcí $H(s) = \frac{1}{s+1}$ Nakreslete přibližný průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ pro kladné kruhové frekvence ω, přesně jej určete pro $\omega = 0$.



$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$



Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ se spojitým časem má tvar obdélníka:
$X(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro } \omega \in [-1\,\text{rad/s},\ 1\,\text{rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 20$ Hz.
Určete hodnotu spektrální funkce $X_s(j\omega)$ ideálně navzorkovaného signálu $x_s(t)$ pro kruhovou frekvenci: $\omega = 40.1\pi$ rad/s

viz A

$X_s(j\omega) = 80$

B

Příklad 6 Jsou dány dvě cosinusovky s diskrétním časem: $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi}{32}n)$ a $x_2[n] = \cos(\frac{2\pi}{8}n)$ Určete hodnotu 16tého vzorku signálu, který vznikl vynásobením těchto cosinusovek: $y[n] = x_1[n]x_2[n]$.

$x_1[16] = -1$ viz A

$x_2[16] = \cos\frac{32\pi}{8} = \cos 4\pi = 1$

$y[16] =$ -1

Příklad 7 Jsou dány dva diskrétní signály délky $N = 5$:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	4	4	0	0	0
$x_2[n]$	1	2	0	0	0

viz A

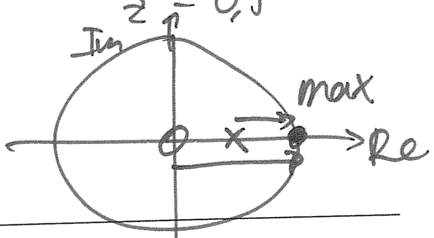
Určete hodnotu jejich periodické konvoluce $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$ pro $n = 9$.

$y[9] =$ 0

Příklad 8 Napište funkci v C implementující číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$

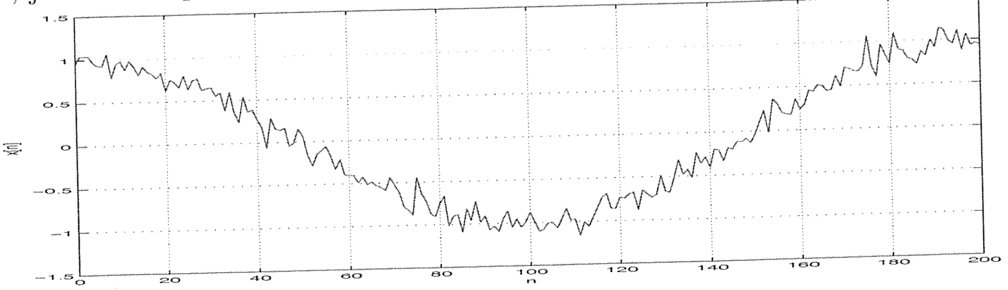
```
float filtr_zkouska (float x) {
        viz A
          :
    yn = x + 0.5 * yn1 - 0.2 * yn2;
          :
        viz A
          :
}
```

Příklad 9 Určete polohu (normovaná kruhová frekvence v intervalu $[0, \pi]$) a hodnotu maxima modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}} = \frac{z}{z-0,5}$



$\omega_{max} =$ 0 rad, $|H(e^{j\omega})|_{max} = \frac{1}{0,5} = 2$

Příklad 10 Na obrázku je signál s diskrétním časem: jedna perioda zašuměné cosinusovky. Nakreslete do téhož obrázku, jak bude signál vypadat po průchodu číslicovým filtrem $H(z) = \frac{1}{2}(1 - z^{-1})$



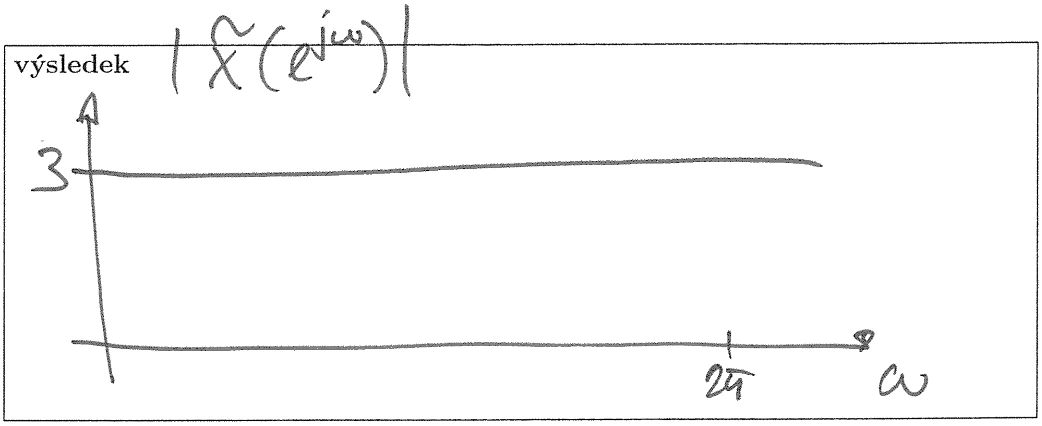
viz A

Příklad 11 Určete impulsní odezvu číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = 1 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}$

n	0	1	2	3
$h[n]$	1	-0,2	0,4	0

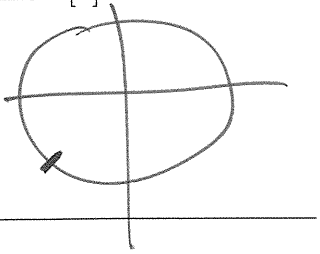
viz A

Příklad 12 Nakreslete modul Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $|\tilde{X}(e^{j\omega})|$ pro signál o délce $N = 4$: $x[0] = 0, \quad x[1] = 0, \quad x[2] = 3, \quad x[3] = 0.$
pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \quad 2\pi]$.



viz A

Příklad 13 Diskrétní signál má $N = 8$ vzorků, všechny hodnoty jsou nulové kromě $x[1] = 1$. Vypočtěte koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT)



$X[3] =$ $1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 3 \cdot 1} = e^{-j\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 1, \quad X[1] = 1 - j, \quad X[2] = 0, \quad X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[0]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4(n)x[\mod_4(n-2)]$.

viz A

$Y[0] =$ 1

Příklad 15 Je dán 2D-filtr (někdy nazývaný také "konvoluční jádro" nebo "maska"):

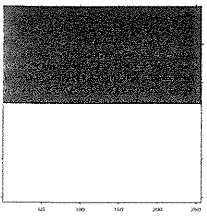
$$h[k,l] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Vlevo jsou pixely původního obrázku $x[k,l]$. Vyplňte vpravo hodnoty pixelů filtrovaného obrázku $y[k,l]$.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	100	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

viz A

Příklad 16 Obrázek $x[k,l]$ má 256x256 pixelů. Uveďte, které z modulů jeho prvních 4 koeficientů 2D-DFT: $X[0,0]$, $X[0,1]$, $X[1,0]$, $X[1,1]$ jsou kladné (značkou '+'), a které nulové (značkou '0').



ss ANO,
vodorovně změna NE
svisle ANO

$X[m,n]$:

$m \downarrow \ n \rightarrow$	0	1
0	+	0
1	+	0

Příklad 17 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } x \in [4,\ 6] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete střední výkon tohoto signálu.

viz A

$P_s =$ $5^2 + \frac{2^2}{12} = 25,33$

Příklad 18 Distribuční funkce stacionárního náhodného signálu je definována jako

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{pro } x \in [0,2] \\ 1 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$

Napište nebo nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ odpovídající této distribuční funkci.

výsledek

viz A

Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2			
	[-4, -2]	[-2, 0]	[0, 2]	[2, 4]
[2, 4]	0	0	0	1000
[0, 2]	0	0	1500	0
[-2, 0]	0	1500	0	0
[-4, -2]	0	0	0	0

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1,n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1,n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1,x_2,n_1,n_2)dx_1dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1,n_2] =$ $\frac{\text{XXX}}{\text{XXX}}$ **= 3**

viz A

Příklad 20 Kvantizační hladiny kvantizéru jsou lichá čísla: ...,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,.... Kvantování probíhá standardně zaokrouhlováním na nejbližší hladinu. Do kvantizéru přichází vstupní signál $x[n]$, který nabývá pouze dvou hodnot: +100 nebo -100.

Určete poměr signálu k šumu v dB při kvantování tohoto signálu.

SNR= $10 \log_{10} \frac{100^2}{1} = 40$ dB dB

C

Semestrální zkouška ISS, 6.1.2012, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je periodický sled obdélníkových impulsů o periodě T_1, jejichž délka je $\vartheta = \frac{T_1}{4}$ Určete, které koeficienty jeho Fourierovy řady c_k budou nulové.

$c_4, c_8, c_{12},$ atd.
$c_{-4}, c_{-8}, c_{-12},$ atd.

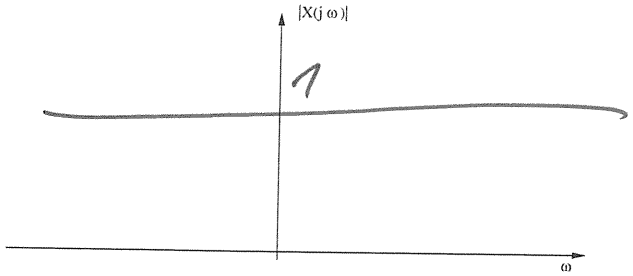
viz A

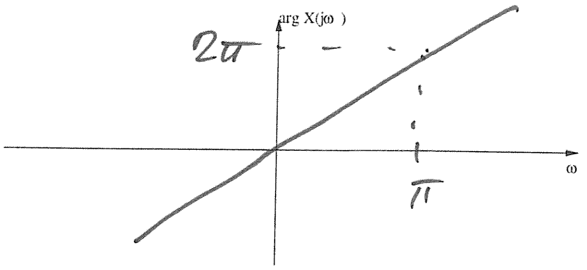
Příklad 2 Napište signál odpovídající Fourierově řadě s jediným nenulovým koeficientem: $c_1 = 2e^{j\frac{\pi}{2}}$

$x(t) = 2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\omega_1 t}$

viz A

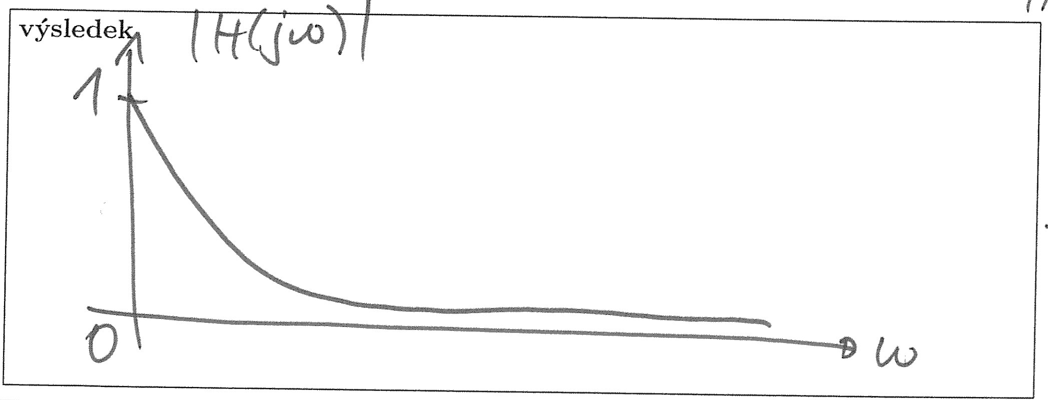
Příklad 3 Nakreslete modul a argument spektrální funkce posunutého Diracova impulsu: $x(t) = \delta(t+2)$

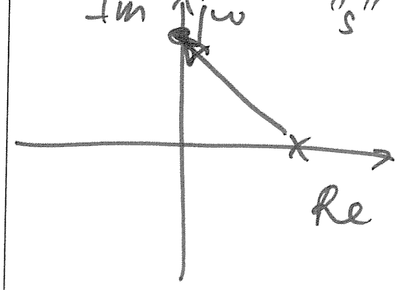




Příklad 4 Systém se spojitým časem je popsán přenosovou funkcí $H(s) = \frac{1}{s-1}$
Nakreslete přibližný průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ pro kladné kruhové frekvence ω, přesně jej určete pro $\omega = 0$.

$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 1}$





Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ se spojitým časem má tvar obdélníka:
$X(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro } \omega \in [-1\,\text{rad/s},\ 1\,\text{rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 20$ Hz.
Určete hodnotu spektrální funkce $X_s(j\omega)$ ideálně navzorkovaného signálu $x_s(t)$ pro kruhovou frekvenci: $\omega = 20\pi$ rad/s

viz A

$X_s(j\omega) = 0$

Příklad 6 Jsou dány dvě cosinusovky s diskrétním časem: $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi}{32}n)$ a $x_2[n] = \cos(\frac{2\pi}{4}n)$ Určete hodnotu 16tého vzorku signálu, který vznikl vynásobením těchto cosinusovek: $y[n] = x_1[n]x_2[n]$.

$x_1[16] = -1$ viz A

$x_2[16] = \cos\frac{32\pi}{4} = \cos 8\pi = 1$

$y[16] =$ …… -1 ……

Příklad 7 Jsou dány dva diskrétní signály délky $N = 5$:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	4	4	0	0	0
$x_2[n]$	1	0	2	0	0

Určete hodnotu jejich periodické konvoluce $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$ pro $n = 9$. viz A

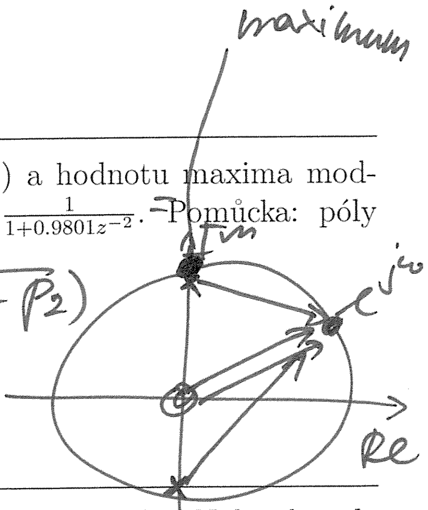
$y[9] =$ …… 0 ……

Příklad 8 Napište funkci v C implementující číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = 1{+}0.5z^{-1}{+}0.2z^{-2}$

```
float filtr_zkouska (float x) {
  float ym;
  static float xm1, xm2;
  ym = x + 0.5*xm1 + 0.2*xm2;
  xm2 = xm1;
  xm1 = x;
  return ym;
}
```

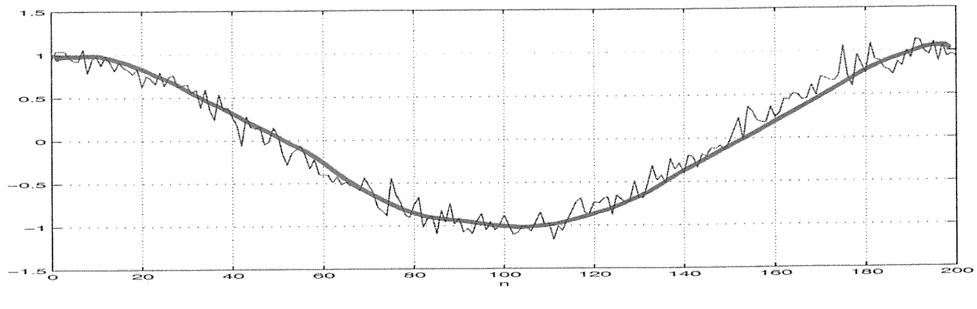
Příklad 9 Určete polohu (normovaná kruhová frekvence v intervalu $[0,\ \pi]$) a hodnotu maxima modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.9801z^{-2}}$. Pomůcka: póly jmenovatele leží v tomto případě v $p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{z^2}{(z-p_1)(z-p_2)}$



$\omega_{max} =$ …… $\frac{\pi}{2}$ …… rad, $|H(e^{j\omega})|_{max} =$ …… $\frac{1^2}{0{,}01 \cdot 2} = 50$

Příklad 10 Na obrázku je signál s diskrétním časem: jedna perioda zašuměné cosinusovky. Nakreslete do téhož obrázku, jak bude signál vypadat po průchodu číslicovým filtrem $H(z) = \frac{1}{10}\left(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-9}\right)$



dolní propust, vyhlazovač

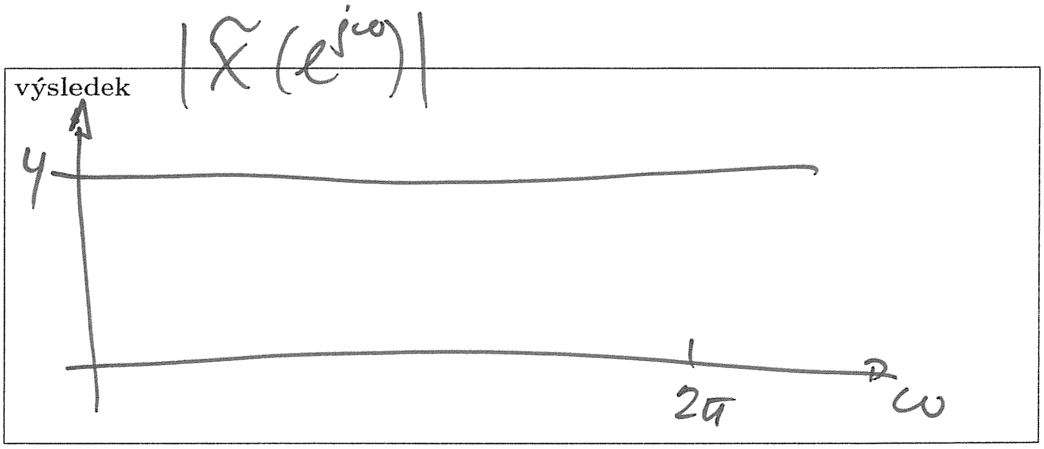
Příklad 11 Určete impulsní odezvu číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = 1 - 0.2z^{-1} - 0.4z^{-2}$

n	0	1	2	3
$h[n]$	1	-0,2	-0,4	0

viz A

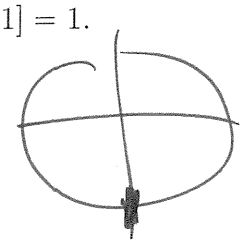
Příklad 12 Nakreslete modul Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $|\tilde{X}(e^{j\omega})|$ pro signál o délce $N = 4$: $x[0] = 0$, $x[1] = 0$, $x[2] = 4$, $x[3] = 0$.
pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 2\pi]$.

viz A



Příklad 13 Diskrétní signál má $N = 8$ vzorků, všechny hodnoty jsou nulové kromě $x[1] = 1$. Vypočtěte koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT)

$X[2] = 1 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{8} \cdot 2 \cdot 1} = e^{-j \frac{\pi}{2}} = -j$



Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 5$, $X[1] = 1 - j$, $X[2] = 0$, $X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[0]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4(n)x[\mod_4(n-2)]$.

$Y[0] = 5$

viz A

Příklad 15 Je dán 2D-filtr (někdy nazývaný také "konvoluční jádro" nebo "maska"):

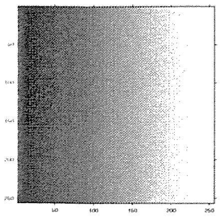
$$h[k,l] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Vlevo jsou pixely původního obrázku $x[k,l]$. Vyplňte vpravo hodnoty pixelů filtrovaného obrázku $y[k,l]$.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	100	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

viz A

Příklad 16 Obrázek $x[k,l]$ má 256x256 pixelů. Uveďte, které z modulů jeho prvních 4 koeficientů 2D-DFT: $X[0,0]$, $X[0,1]$, $X[1,0]$, $X[1,1]$ jsou kladné (značkou '+'), a které nulové (značkou '0').



$X[m,n]$:

$m \downarrow$ $n \rightarrow$	0	1
0	+	+
1	0	0

SS ANO
vodorovně změna ANO
svisle NE

Příklad 17 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } x \in [2,\ 4] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete střední výkon tohoto signálu.

viz A

$P_s = 3^2 + \frac{2^2}{12} = 9,33$

Příklad 18 Distribuční funkce stacionárního náhodného signálu je definována jako

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{pro } x \in [0,2] \\ 1 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$

Napište nebo nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ odpovídající této distribuční funkci.

jakýkoliv výsledek v tomto intervalu je OK.

výsledek

viz A

Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-4, -2]	[-2, 0]	[0, 2]	[2, 4]
[2, 4]	0	0	0	1000
[0, 2]	0	0	1500	0
[-2, 0]	0	1500	0	0
[-4, -2]	0	0	0	0

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1,n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1,n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1,x_2,n_1,n_2)dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1,n_2] = \frac{XXX}{XXX}$ = **3**

viz A

Příklad 20 Kvantizační hladiny kvantizéru jsou lichá čísla: ...,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,.... Kvantování probíhá standardně zaokrouhlováním na nejbližší hladinu. Do kvantizéru přichází vstupní signál $x[n]$, který nabývá pouze dvou hodnot: 0 nebo 10.
Určete poměr signálu k šumu v dB při kvantování tohoto signálu.

chyba - vždy 1 $P_e = 1^2 = 1$
užitečný signál: záleží na poměru hodnot 0 a 10, podle něj užitečný výkon $P_s = 0$ až $P_s = 100$

$SNR_{good} = 10\log_{10}\frac{100}{1} = 20$ dB
$SNR_{bad} = 10\log_{10}\frac{0}{1} = -\infty$ dB

SNR= $-\infty$ až 20 dB

D

Semestrální zkouška ISS, 6.1.2012, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je periodický sled obdélníkových impulsů o periodě T_1, jejichž délka je $\vartheta = \frac{T_1}{5}$
Určete, které koeficienty jeho Fourierovy řady c_k budou nulové.

c_5, c_{10}, c_{15}, atd.
c_{-5}, c_{-10}, c_{-15}, atd.

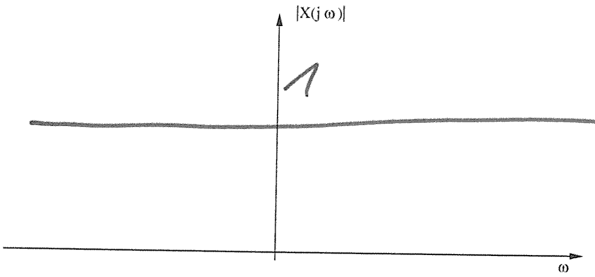
viz A

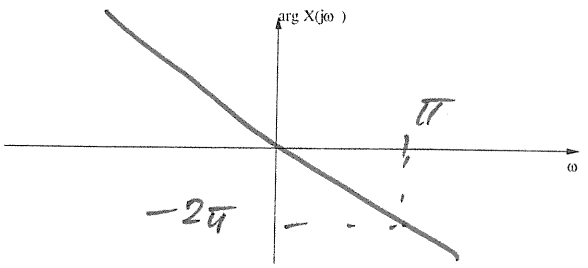
Příklad 2 Napište signál odpovídající Fourierově řadě s jediným nenulovým koeficientem: $c_1 = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$

$x(t) = 4e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\omega_1 t}$

viz A

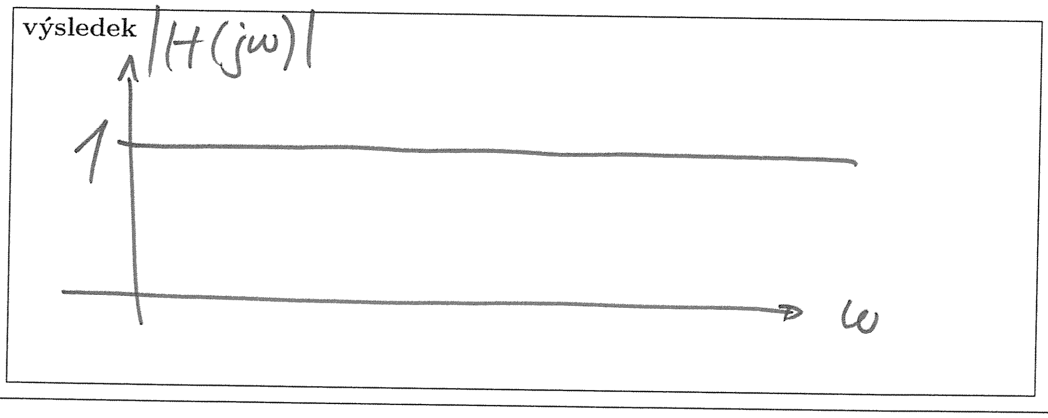
Příklad 3 Nakreslete modul a argument spektrální funkce posunutého Diracova impulsu: $x(t) = \delta(t-2)$

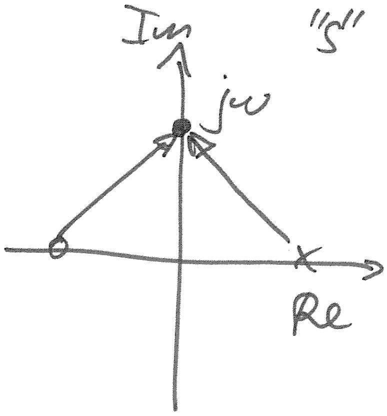




Příklad 4 Systém se spojitým časem je popsán přenosovou funkcí $H(s) = \frac{s+1}{s-1}$
Nakreslete přibližný průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ pro kladné kruhové frekvence ω, přesně jej určete pro $\omega = 0$.

viz A





Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ se spojitým časem má tvar obdélníka:
$X(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro } \omega \in [-1\,\text{rad/s},\ 1\,\text{rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 20$ Hz.
Určete hodnotu spektrální funkce $X_s(j\omega)$ ideálně navzorkovaného signálu $x_s(t)$ pro kruhovou frekvenci: $\omega = 40\pi$ rad/s

viz A

$X_s(j\omega) = 80$

D

Příklad 6 Jsou dány dvě cosinusovky s diskrétním časem: $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi}{32}n)$ a $x_2[n] = \cos(\frac{2\pi}{2}n)$ Určete hodnotu 16tého vzorku signálu, který vznikl vynásobením těchto cosinusovek: $y[n] = x_1[n]x_2[n]$.

$x_1[16] = -1$ viz A

$x_2[16] = \cos \frac{32\pi}{2} = \cos 16\pi = 1$

$y[16] =$ ……… -1 ………

Příklad 7 Jsou dány dva diskrétní signály délky $N = 5$:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	4	4	0	0	0
$x_2[n]$	1	0	0	2	0

Určete hodnotu jejich periodické konvoluce $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$ pro $n = 9$.

viz A

$y[9] =$ ……… 8 ………

Příklad 8 Napište funkci v C implementující číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = 1+0.5z^{-1}-0.2z^{-2}$

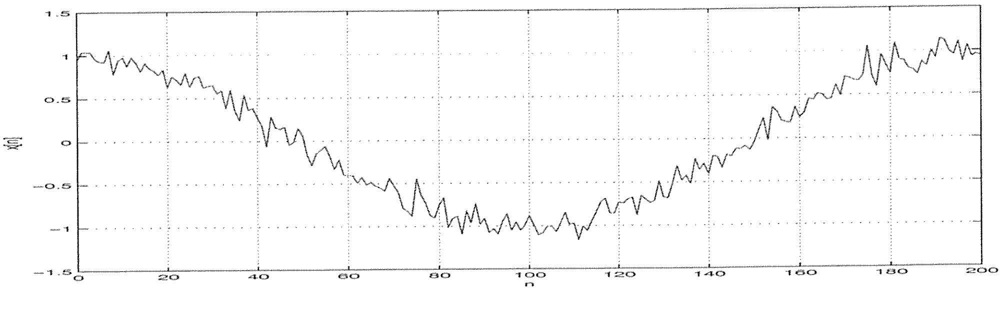
```
float filtr_zkouska (float x) {
      ⋮
     viz C

  yn = x + 0.5 * xn1 - 0.2 * xn2;
      ⋮
     viz C

}
```

Příklad 9 Určete polohu (normovaná kruhová frekvence v intervalu $[0, \pi]$) a hodnotu maxima modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.9801z^{-2}}$. Pomůcka: póly jmenovatele leží v tomto případě v $p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

viz C

$\omega_{max} =$ ……… 0 xxx pi/2 ……… rad, $|H(e^{j\omega})|_{max} =$ ……… 2 xxxxx 50. ………

Příklad 10 Na obrázku je signál s diskrétním časem: jedna perioda zašuměné cosinusovky. Nakreslete do téhož obrázku, jak bude signál vypadat po průchodu číslicovým filtrem $H(z) = \frac{1}{10}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-9})$



viz C

D

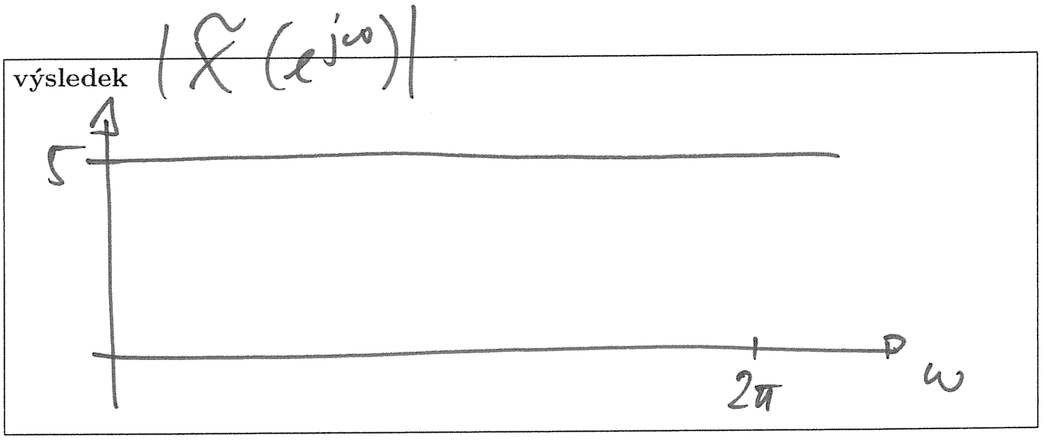
Příklad 11 Určete impulsní odezvu číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = 1 + 0.2z^{-1} - 0.4z^{-2}$

viz A

n	0	1	2	3
$h[n]$	1	0,2	−0,4	0

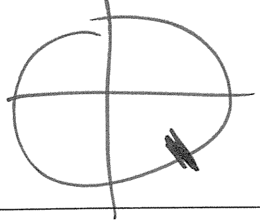
Příklad 12 Nakreslete modul Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $|\tilde{X}(e^{j\omega})|$ pro signál o délce $N = 4$: $x[0] = 0, \quad x[1] = 0, \quad x[2] = 5, \quad x[3] = 0.$
pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \ 2\pi]$.

viz A



Příklad 13 Diskrétní signál má $N = 8$ vzorků, všechny hodnoty jsou nulové kromě $x[1] = 1$.
Vypočtěte koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT)

$X[1] = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 1 \cdot 1} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$



Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 7, \quad X[1] = 1 - j, \quad X[2] = 0, \quad X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[0]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4(n)x[\mod_4(n-2)]$.

viz A

$Y[0] =$ 7

Příklad 15 Je dán 2D-filtr (někdy nazývaný také "konvoluční jádro" nebo "maska"):

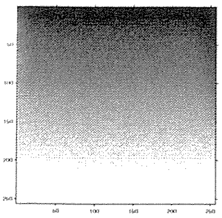
$$h[k,l] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Vlevo jsou pixely původního obrázku $x[k,l]$. Vyplňte vpravo hodnoty pixelů filtrovaného obrázku $y[k,l]$.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	100	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

viz A

Příklad 16 Obrázek $x[k, l]$ má 256x256 pixelů. Uveďte, které z modulů jeho prvních 4 koeficientů 2D-DFT: $X[0, 0]$, $X[0, 1]$, $X[1, 0]$, $X[1, 1]$ jsou kladné (značkou '+'), a které nulové (značkou '0').



$X[m, n]$:

$m \downarrow \ n \rightarrow$	0	1
0	+	0
1	+	0

ss ANO
vodorovně změna NE
svisle ANO

Příklad 17 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } x \in [0,\ 2] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Určete střední výkon tohoto signálu.

viz A

$P_s = 1^2 + \frac{2^2}{12} = \underline{\underline{1,33}}$

Příklad 18 Distribuční funkce stacionárního náhodného signálu je definována jako

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{pro } x \in [0, 2] \\ 1 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$$

Napište nebo nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ odpovídající této distribuční funkci.

výsledek

viz A

Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-4, -2]	[-2, 0]	[0, 2]	[2, 4]
[2, 4]	0	0	0	1000
[0, 2]	0	0	1500	0
[-2, 0]	0	1500	0	0
[-4, -2]	0	0	0	0

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$R[n_1, n_2] = \frac{3}{4}$ XXX XXX **= 3** viz A

Příklad 20 Kvantizační hladiny kvantizéru jsou lichá čísla: …,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,… . Kvantování probíhá standardně zaokrouhlováním na nejbližší hladinu. Do kvantizéru přichází vstupní signál $x[n]$, který nabývá pouze dvou hodnot: +1000 nebo -1000.
Určete poměr signálu k šumu v dB při kvantování tohoto signálu.

SNR= $10 \log_{10} \frac{1000^2}{1} = 60$ dB