Půlsemestrální zkouška ISS, 3.11.2023, zadání E

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....

(prosím čitelně!)

Příklad 1 Vydělte komplexní čísla: $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 2\,e^{j\frac{\pi}{8}}$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{2} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{2} e^{j\frac{\pi}{8}}$

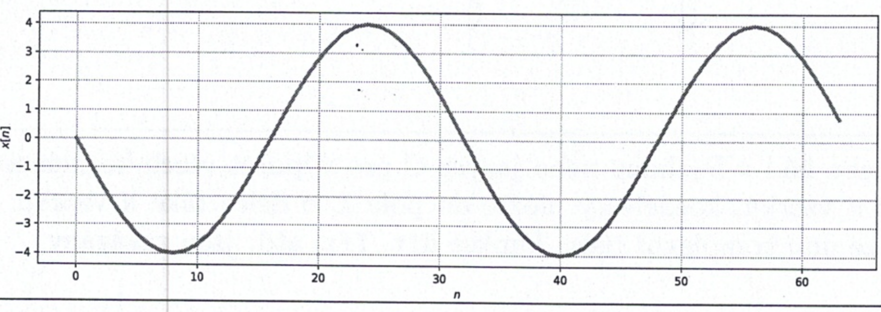
Příklad 2 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet určitého integrálu $\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$ signálu se spojitým časem $x(t)$. Signál je uložen v poli `x`, časový krok (vzorkovací perioda) je `Delta`, indexy do pole `x` odpovídající časům t_1 a t_2 už jsou nalezeny a jsou v proměnných `i1` a `i2`.

```
I = np.sum(x[i1:i2]) * Delta
```

nebo

```
I = np.sum(x[i1:(i2+1)]) * Delta
```

Příklad 3 Signál na obrázku je diskrétní cosinusovka $x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1)$ s amplitudou C_1, normovanou kruhovou frekvencí ω_1 a fází ϕ_1. Určete hodnoty těchto parametrů.



$C_1 = 4$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{32}$

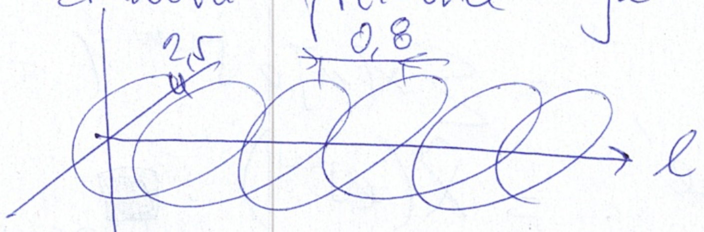
$\varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$

Příklad 4 Jsou dány dvě komplexní exponenciály s diskrétním časem:
$e_1[n] = 8e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j0.1\pi n}$, $e_2[n] = 8e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j0.1\pi n}$. Napište cosinusovku, která vznikne jejich součtem: $x[n] = e_1[n] + e_2[n]$, se správnými hodnotami všech parametrů.

$x[n] = 16 \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

Příklad 5 Popište šroub velikosti M5 pomocí spojité komplexní exponenciály. Jeho průměr je 5 mm (poloměr je tedy 2.5 mm), stoupání závitu je 0.8 mm.

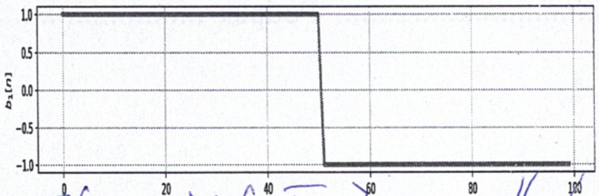
Kruhová "frekvence" je $\frac{2\pi}{0{,}8}$

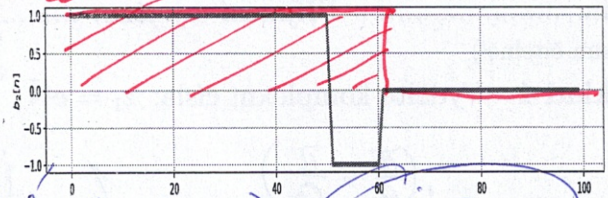


$x[l] = 2{,}5\, e^{j\frac{2\pi}{0{,}8} l}$

Příklad 6 Na obrázku jsou zadány dvě báze: $b_1[n]$ a $b_2[n]$, obě o délce $N = 100$ vzorků. Zjistěte, zda jsou ortogonální.

$b_1[n] \cdot b_2[n]$





$\sum b_1[n]\, b_2[n]$ = velké kladné číslo $\neq 0 \Rightarrow$ nejsou

---

Příklad 7 Určete frekvenční rozlišení diskrétní Fourierovy transformace DFT (vzdálenost mezi $X[k]$ a $X[k+1]$). Počet vzorků je $N = 100$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 10$ kHz. Výsledek napište pro všechny používané typy frekvencí:

$\frac{F_s}{N} = \frac{10\,000}{100} = 100$ Hz

běžná frekvence: ...100 Hz...

kruhová frekvence: ...200π... rad/s

normovaná frekvence: ...$\frac{1}{100}$...

normovaná kruhová frekvence: ...$\frac{2\pi}{100}$... rad

Příklad 8 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má pro $n = 0 \ldots 7$ hodnoty $x[n] = 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$. Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$x[n]$ 1 0 −1 0

$e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} = $ 1 −j −1 j ...

$e^{-j\frac{\pi}{2}n}$

$X[2] =$ ...2...

Příklad 9 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet všech koeficientů DFT. Signál je uložen v poli `x`, o délce `N` vzorků, koeficienty uložte do pole `X`, o délce také `N` vzorků. Pokud budete psát v C, předpokládejte, že umí komplexní čísla. Funkce `dft`, `fft`, atd. jsou zakázány.

```
n = range(N)
for k in range(N):
    e = np.exp(-1j * 2 * np.pi / N * k * n)
    X[k] = np.sum(e * x)
```

Příklad 10 Dokažte periodicitu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT), tedy platnost $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega+m2\pi)})$, kde m je libovolné celé číslo. Pomůcka: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$.

$\tilde{X}(e^{j(\omega+m2\pi)}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(\omega+m2\pi)n} = \sum x[n] e^{-j\omega n} e^{-j2\pi mn} =$

$= \sum x[n] e^{-j\omega n} \cdot 1 =$

$= \tilde{X}(e^{j\omega})$

m·n je celé číslo
$e^{j0} = 1$ a funkce $e^{j\ldots}$ je periodická se 2π, takže také
$e^{j2\pi mn} = 1$

(dokázáno)

Půlsemestrální zkouška ISS, 3.11.2023, zadání F

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....

(prosím čitelně!)

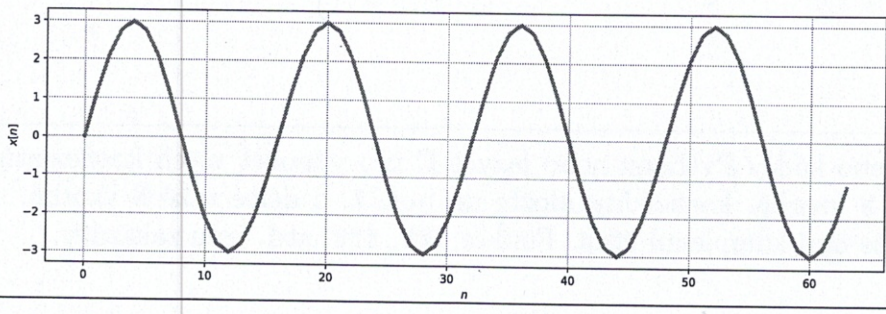
Příklad 1 Vydělte komplexní čísla: $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 3\,e^{-j\frac{\pi}{8}}$.

$\frac{z_1}{z_2} =$ $\frac{1}{3} e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{3} e^{j\frac{3\pi}{8}}$

Příklad 2 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet určitého integrálu $\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$ signálu se spojitým časem $x(t)$. Signál je uložen v poli `x`, časový krok (vzorkovací perioda) je `Delta`, indexy do pole `x` odpovídající časům t_1 a t_2 už jsou nalezeny a jsou v proměnných `i1` a `i2`.

viz A

Příklad 3 Signál na obrázku je diskrétní cosinusovka $x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1)$ s amplitudou C_1, normovanou kruhovou frekvencí ω_1 a fází ϕ_1. Určete hodnoty těchto parametrů.



$C_1 = 3$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{16}$

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

Příklad 4 Jsou dány dvě komplexní exponenciály s diskrétním časem:
$e_1[n] = 7e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j0.1\pi n}$, $e_2[n] = 7e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j0.1\pi n}$. Napište cosinusovku, která vznikne jejich součtem: $x[n] = e_1[n] + e_2[n]$, se správnými hodnotami všech parametrů.

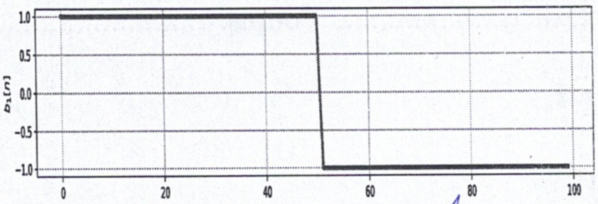
$x[n] = 14\cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

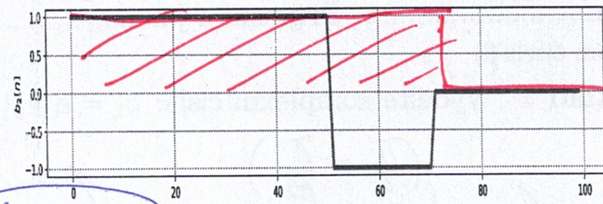
Příklad 5 Popište šroub velikosti M5 pomocí spojité komplexní exponenciály. Jeho průměr je 5 mm (poloměr je tedy 2.5 mm), stoupání závitu je 0.8 mm.

viz A

Příklad 6 Na obrázku jsou zadány dvě báze: $b_1[n]$ a $b_2[n]$, obě o délce $N = 100$ vzorků. Zjistěte, zda jsou ortogonální.

$b_1[n]\, b_2[n]$





viz A nejsou

Příklad 7 Určete frekvenční rozlišení diskrétní Fourierovy transformace DFT (vzdálenost mezi $X[k]$ a $X[k+1]$). Počet vzorků je $N = 100$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 10$ kHz. Výsledek napište pro všechny používané typy frekvencí:

běžná frekvence: ....

kruhová frekvence: ....

normovaná frekvence: ....

normovaná kruhová frekvence: ....

Příklad 8 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má pro $n = 0 \ldots 7$ hodnoty $x[n] = 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$. Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

$x[n] \quad 1 \quad 0 \quad -1 \quad 0$

$e^{-j\frac{2\pi}{8}n} = e^{-j\frac{\pi}{4}n} \quad 1 \quad +\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{j}{\sqrt{2}} \quad -j$

$X[1] =$ .... $1+j$ ....

Příklad 9 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet všech koeficientů DFT. Signál je uložen v poli `x`, o délce `N` vzorků, koeficienty uložte do pole `X`, o délce také `N` vzorků. Pokud budete psát v C, předpokládejte, že umí komplexní čísla. Funkce `dft`, `fft`, atd. jsou zakázány.

viz A

Příklad 10 Dokažte periodicitu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT), tedy platnost $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega + m2\pi)})$, kde m je libovolné celé číslo. Pomůcka: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$.

viz A

Půlsemestrální zkouška ISS, 3.11.2023, zadání G

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

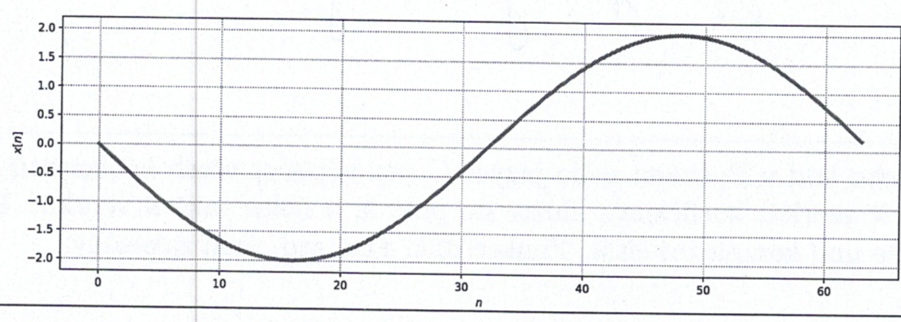
Příklad 1 Vydělte komplexní čísla: $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 4\,e^{j\frac{\pi}{8}}$.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{4} e^{j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{4} e^{j\frac{\pi}{8}}$

Příklad 2 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet určitého integrálu $\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$ signálu se spojitým časem $x(t)$. Signál je uložen v poli `x`, časový krok (vzorkovací perioda) je `Delta`, indexy do pole `x` odpovídající časům t_1 a t_2 už jsou nalezeny a jsou v proměnných `i1` a `i2`.

viz A

Příklad 3 Signál na obrázku je diskrétní cosinusovka $x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1)$ s amplitudou C_1, normovanou kruhovou frekvencí ω_1 a fází ϕ_1. Určete hodnoty těchto parametrů.



$C_1 = 2$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{64}$

$\varphi_1 = +\frac{\pi}{2}$

Příklad 4 Jsou dány dvě komplexní exponenciály s diskrétním časem:
$e_1[n] = 2e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j0.1\pi n}$, $e_2[n] = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j0.1\pi n}$. Napište cosinusovku, která vznikne jejich součtem: $x[n] = e_1[n] + e_2[n]$, se správnými hodnotami všech parametrů.

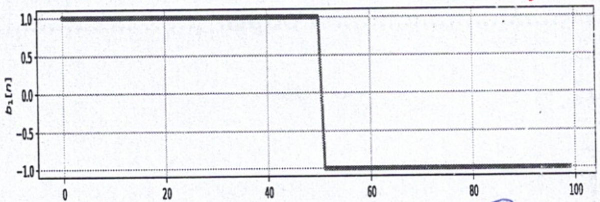
$x[n] = 4\cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

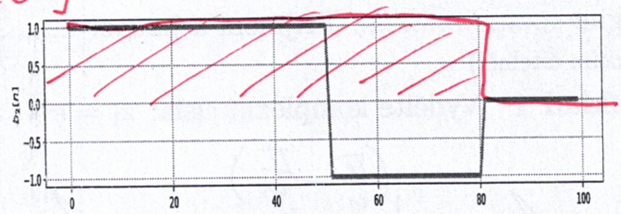
Příklad 5 Popište šroub velikosti M5 pomocí spojité komplexní exponenciály. Jeho průměr je 5 mm (poloměr je tedy 2.5 mm), stoupání závitu je 0.8 mm.

viz A

Příklad 6 Na obrázku jsou zadány dvě báze: $b_1[n]$ a $b_2[n]$, obě o délce $N = 100$ vzorků. Zjistěte, zda jsou ortogonální.

$b_1[n] \cdot b_2[n]$





viz A nejsou

Příklad 7 Určete frekvenční rozlišení diskrétní Fourierovy transformace DFT (vzdálenost mezi $X[k]$ a $X[k+1]$). Počet vzorků je $N = 100$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 10$ kHz. Výsledek napište pro všechny používané typy frekvencí:

běžná frekvence: ....

kruhová frekvence: ....

normovaná frekvence: ....

normovaná kruhová frekvence: ....

Příklad 8 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má pro $n = 0 \ldots 7$ hodnoty $x[n] = 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$. Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

viz A

$x[n]$ 1 0 1 0 -

$e^{j\cdot}$ 1 $-j$ -1 j

$X[2] =$ 0

Příklad 9 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet všech koeficientů DFT. Signál je uložen v poli `x`, o délce `N` vzorků, koeficienty uložte do pole `X`, o délce také `N` vzorků. Pokud budete psát v C, předpokládejte, že umí komplexní čísla. Funkce `dft`, `fft`, atd. jsou zakázány.

viz A

Příklad 10 Dokažte periodicitu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT), tedy platnost $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega+m2\pi)})$, kde m je libovolné celé číslo. Pomůcka: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$.

viz A

Půlsemestrální zkouška ISS, 3.11.2023, zadání H

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

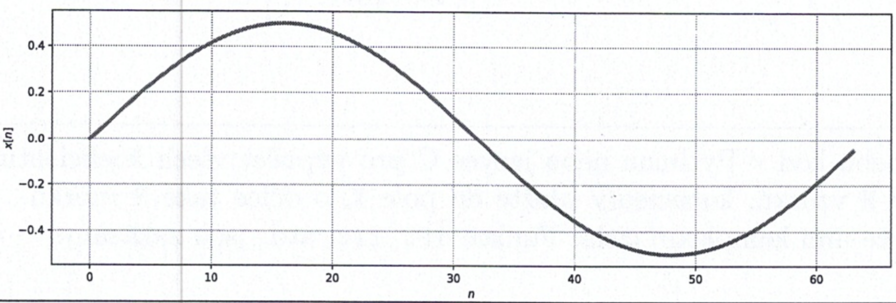
Příklad 1 Vydělte komplexní čísla: $z_1 = e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = 5\,e^{-j\frac{\pi}{8}}$.

$\frac{z_1}{z_2} =$ $\frac{1}{5} \cdot e^{j\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{5} e^{j\frac{3\pi}{8}}$

Příklad 2 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet určitého integrálu $\int_{t_1}^{t_2} x(t)dt$ signálu se spojitým časem $x(t)$. Signál je uložen v poli `x`, časový krok (vzorkovací perioda) je `Delta`, indexy do pole `x` odpovídající časům t_1 a t_2 už jsou nalezeny a jsou v proměnných `i1` a `i2`.

viz A

Příklad 3 Signál na obrázku je diskrétní cosinusovka $x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1)$ s amplitudou C_1, normovanou kruhovou frekvencí ω_1 a fází ϕ_1. Určete hodnoty těchto parametrů.



$C_1 = 0{,}5$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{64}$

$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$

Příklad 4 Jsou dány dvě komplexní exponenciály s diskrétním časem:
$e_1[n] = 3e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j0.1\pi n}, \quad e_2[n] = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j0.1\pi n}$. Napište cosinusovku, která vznikne jejich součtem: $x[n] = e_1[n] + e_2[n]$, se správnými hodnotami všech parametrů.

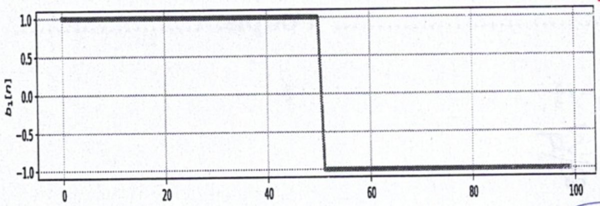
$x[n] = 6 \cos\left(0{,}1\pi n + \frac{\pi}{4}\right)$

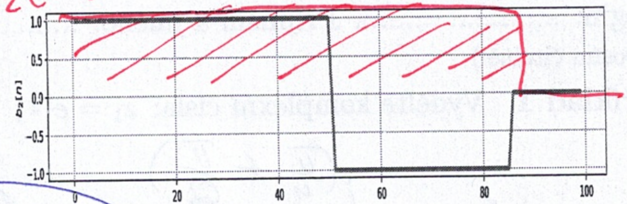
Příklad 5 Popište šroub velikosti M5 pomocí spojité komplexní exponenciály. Jeho průměr je 5 mm (poloměr je tedy 2.5 mm), stoupání závitu je 0.8 mm.

viz A

Příklad 6 Na obrázku jsou zadány dvě báze: $b_1[n]$ a $b_2[n]$, obě o délce $N = 100$ vzorků. Zjistěte, zda jsou ortogonální.

$b_1[n]\, b_2[n]$





viz A nejsou

Příklad 7 Určete frekvenční rozlišení diskrétní Fourierovy transformace DFT (vzdálenost mezi $X[k]$ a $X[k+1]$). Počet vzorků je $N = 100$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 10$ kHz. Výsledek napište pro všechny používané typy frekvencí:

běžná frekvence: ....

kruhová frekvence: ....

normovaná frekvence: ....

normovaná kruhová frekvence: ....

Příklad 8 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má pro $n = 0 \dots 7$ hodnoty $x[n] = 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$ Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

$x[n]$	1	0	1	0
$e^{j\dots}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-j$	...

viz B

$X[1] =$ $1 - j$

Příklad 9 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro výpočet všech koeficientů DFT. Signál je uložen v poli `x`, o délce `N` vzorků, koeficienty uložte do pole `X`, o délce také `N` vzorků. Pokud budete psát v C, předpokládejte, že umí komplexní čísla. Funkce `dft`, `fft`, atd. jsou zakázány.

viz A

Příklad 10 Dokažte periodicitu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT), tedy platnost $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega + m2\pi)})$, kde m je libovolné celé číslo. Pomůcka: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\omega n}$.

viz A