SXC – Souhrn

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

SIGNÁLY – ZÁKLADNÍ POJMY

- spojitý čas $x(t)$
- diskrétní čas $x[n]$
- modifikace časové osy – posunutí (zpoždění, předběhnutí), $x(t-\tau),\ x(t+\tau),\ x[n-m],\ x[n+m]$
- otočení s posunutím – pozor na opačný význam: u $x[-n+m]$ se pro kladné m posouvá otočený signál doprava.
- kontrakce a dilatace časové osy pro spojitý čas: $x(mt),\ x(\frac{t}{m})$.

Energie a výkon

okamžitý výkon: $p(t) = |x(t)|^2, \quad p[n] = |x[n]|^2$
celková energie (konečná/nekonečná)

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \qquad E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

celkový střední výkon (konečný/nekonečný)

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \qquad P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^{N} |x[n]|^2$$

$\Rightarrow$ u periodických signálů stačí počítat výkon přes jednu periodu.

Periodické signály

opakují se po T nebo N, základní perioda T_1 nebo N_1, frekvence a kruhová frekvence (pro spojitý čas obyčejná, pro diskrétní čas normovaná):

$$f_1 = \frac{1}{T_1} \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \qquad f_1' = \frac{1}{N_1} \quad \omega_1' = \frac{2\pi}{N_1}$$

... ale apostrofy nikde neuvidíme.

Harmonické signály

mají amplitudu, frekvenci a počáteční fázi:

spojitý čas:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} + \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 t}$$

perioda $T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$

diskrétní čas:

$$x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 n} + \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 n}$$

perioda N_1 se určuje složitěji – musíme najít N_1 tak, aby signál byl opravdu periodický, někdy nenajdeme vůbec.

Důležité signály

- jednotkový skok $\sigma(t),\ \sigma[n]$
- jednotkový impuls $\delta(t),\ \delta[n]$ (se spojitým časem má podivné vlastnosti, s diskrétním je to úplně normální signál).

SIGNÁLY SE SPOJITÝM ČASEM – FREKVENČNÍ ANALÝZA

Periodické – Fourierova řada

signál je periodický $\Rightarrow$ **spektrum je čárové (koeficienty)**

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt \qquad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

c_k jsou koeficienty FŘ: vlastnosti:

- $c_k = c^{\star}_{-k}$
- c_0 je střední hodnota
- jsou svázány s frekvencemi $k\omega_1$
- dvojice koeficientů c_k a c_{-k} s příslušnými exponenciálami tvoří kosínusovku na frekvenci $k\omega_1$.
- posunutí signálu: $x(t) \rightarrow x(t-\tau)$, $c_k \rightarrow c_k e^{-jk\omega_1 \tau}$ – vliv pouze na **argumenty** koeficientů.

Příklady:

- kosínusovka: $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$ má pouze dva koeficienty: $c_1 = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1}$, $c_{-1} = \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1}$
- periodický sled obdélníkových impulsů: výpočet pomocí Šebestovy pomůcky (ŠP):

$$\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy} dy = 2b \ \mathsf{sinc}(bx)$$

výsledek: $c_k = D\frac{\vartheta}{T_1}\mathsf{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$. kreslíme nejprve **pomocnou funkci** sinc, pak pod ni umísťujeme koeficienty.

Všechna spektra se kreslí samostatně pro modul a argument, argument kladného reálného čísla je 0, argument záporného reálného čísla je π nebo $-\pi$.

Neperiodické – Fourierova transformace
signál není periodický $\Rightarrow$ spektrum je funkce

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t}d\omega$$

$X(j\omega)$ je spektrální funkce, základní vlastnosti:

- $X(j\omega) = X^\star(-j\omega)$.
- posunutí signálu: $x(t) \rightarrow x(t-\tau)$, $X(j\omega) \rightarrow X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$ – vliv pouze na **argument** spektrální funkce.

Příklady:

- posunutý Diracův impuls: $x(t) = \delta(t-\tau)$, $\quad X(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$.
- obdélníkový impuls: $X(j\omega) = D\vartheta \text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)$, funkce sinc (rozložená na modul a argument) je **výsledek**.

VZORKOVÁNÍ

- v časové oblasti se signál násobí vzorkovacím (samplovacím) signálem: vzorkovací perioda T_s, vzorkovací frekvence $F_s = \frac{1}{T_s}$, kruhová vzorkovací frekvence $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$: $x_s(t) = x(t)s(t)$
- pro výklad teorie násobíme s periodickým sledem Diraců, výsledná spektrální funkce vychází:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_1).$$

  pokud se kopie překrývají $\Rightarrow$ aliasing.
- pro signály,které mají omezené spektrum frekvencí ω_{max}, vzorkovací teorém (aby nedocházelo k aliasingu): $\Omega_s > 2\omega_{max}$ nebo $F_s > 2f_{max}$
- pak se dál signál $x(t)$ ideálně rekonstruovat.
- normovaný čas: $n = \dfrac{nT}{T}$ (jen počitadlo vzorků), normovaná frekvence obyčejná $f' = \dfrac{f}{F_s}$, kruhová $\omega' = \dfrac{\omega}{F_s}$, vždy se normuje **vzorkovací frekvencí**.

DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

základní operace

- posloupnost délky N – získáme násobením oknem

$$R_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

- periodizace: $\tilde{x}[n] = x[\mod_N n]$
- periodické posunutí: $x[n] \longrightarrow x[\mod_N (n-m)]$
- kruhové posunutí: $x[n] \longrightarrow R_N[n] x[\mod_N (n-m)]$

konvoluce

- lineární: $x[n] \star y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$ (pro posloupnost délky N má délku $2N-1$), výpočet pomocí papírků.
- periodická: $x[n] \tilde{\star} y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[\bmod_N(n-k)]$ (má vzorky všude).
- kruhová $x[n] \textcircled{\scriptsize N} y[n] = R_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[\bmod_N(n-k)]$, má délku zase N, výpočet pomocí kroužků.

Spektrální analýza diskrétních signálů

DTFT Fourierova transformace s diskrétním časem

Signál je vzorkovaný (diskrétní), spektrum bude periodické

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\omega})e^{+j\omega n}d\omega$$

Vlastnosti

- je periodická protože signál je diskrétní.
- je to funkce definovaná pro všechna ω, protože signál je jakýkoliv.
- je jen jedna, ale můžeme ji zobrazit s různými frekvenčními osami.

Diskrétní Fourierova řada diskrétního signálu s periodou N
Signál je vzorkovaný (diskrétní), spektrum bude periodické. Signál je periodický, proto bude spektrum diskrétní (jen koeficienty)

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad \tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Vlastnosti koeficientů DFŘ:

- koeficienty jsou svázány s normovanými kruhovými krekvencemi: $k\omega_1$, kde $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$.
- koeficienty mají standardní vlastnost: $\tilde{X}[k] = \tilde{X}^\star[-k]$, ale navíc jsou ještě **periodické**: $\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k + gN]$

Příklad: DFŘ harmonického signálu s periodou N: $x[n] = C_1 \cos(\frac{2\pi}{N}n + \phi_1)$:

$$|\tilde{X}[1]| = |\tilde{X}[N-1]| = \frac{NC_1}{2} \qquad \arg \tilde{X}[1] = -\arg \tilde{X}[N-1] = \phi$$

Diskrétní Fourierova transformace převádí N vzorků signálu na N vzorků spektra. Teoreticky periodizace, DFŘ, omezení, prakticky:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \text{jen pro } n, k = 0 \dots N-1$$

Souvislost koeficientů $X[k]$ s frekvencí:

- normované frekvence $\frac{k}{N}$ do $\frac{N-1}{N}$.
- normované kruhové frekvence $2\pi\frac{k}{N}$ do $2\pi\frac{N-1}{N}$
- obyčejné frekvence $\frac{k}{N}F_s$ do $\frac{N-1}{N}F_s$
- obyčejné kruhové frekvence $\frac{k}{N}2\pi F_s$ do $\frac{N-1}{N}2\pi F_s$

Vlastnosti:

- $X[k] = X^{\star}[N-k]$
- kruhové posunutí: $x[n] \longrightarrow R_N x[\bmod_N (n-m)]$, $X[k] \longrightarrow X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$
- výpočet pomocí FFT.
- dobrá pro počítání FŘ a FT se spojitým časem, avšak s omezeními !

SYSTÉMY

- obecnosti: kauzalita, časová invariantnost, linearita, stabilita.
- popis pomocí impulsní odezvy: pro spojitý čas vybudíme Diracovým impulsem $\delta(t)$ (jen teorie, prakticky nejde), dostaneme $h(t)$. Pro diskrétní čas vybudíme jednotkovým impulsem $\delta[n]$ (bez problémů jde), dostaneme $h[n]$.
- odezva na libovolný vstup: konvoluce s impulsní odezvou:

$$y[n] = x[n] \star h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \qquad y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

  (sumy mohou být také naopak).
- impuslní odezva kauzálních systémů:

$$h[n] = 0 \text{ pro } n < 0 \qquad h(t) = 0 \text{ pro } t < 0$$

- výpočet konvoluce papírkovou metodou: **diskrétní:** napíšeme čísla, násobíme a sčítáme čísla. **spojité:** nakreslíme funkce, násobíme funkce a integrujeme – počítáme plochu.

Systémy se spojitým časem

- **komplexní kmitočtová charakteristika** je FT impulsní odezvy:

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt.$$

  a má stejné vlastnosti jako každá jiná FT spojitého neperiodického signálu: není periodická ani to nejsou koeficienty, $H(j\omega) = H^\star(-j\omega)$.

- Průchod kosinusovky:
  $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad y(t) = |H(j\omega_1)| C_1 \cos\left[\omega_1 t + \phi_1 + \arg H(j\omega_1)\right].$
  $\Rightarrow$ kosinusovka bude jinak velká a s jinou fází!

- Průchod periodického signálu: $H(jk\omega_1)$ vynásobí koeficienty c_k

- Průchod obecného signálu: **obrazem konvoluce ve spektru je násobení**

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \quad Y(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t).$$

Popis systému pomocí **diferenciální rovnice:**

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Laplaceova transformace:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st)} dt,$$

především nás bude zajímat LT derivace: $\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s).$

Přenosová funkce:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k},$$

- kmitočtová charakteristika: $H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$
- nuly a póly přenosové funkce (kořeny polynomů v čitateli a jmenovateli):

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{k=1}^{M}(s - n_k)}{\prod_{k=1}^{N}(s - p_k)}.$$

  Dá se pomocí nich odhadnout průběh kmitočtové charakteristiky.
- stabilita: všechny póly leží v levé polorovině komplexní roviny, $\Re\{p_k\} < 0$.

Systémy s diskrétním časem

- základní bloky: zpoždění, násobení koeficientem, součet.
- **komplexní kmitočtová charakteristika** je DTFT impulsní odezvy:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

a má stejné vlastnosti jako každá jiná DTFT diskrétního signálu: je periodická a $H(e^{j\omega}) = H^{\star}(e^{-j\omega})$

Průchod kosinusovky: $x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1)$,
$y[n] = C_1 |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \phi_1 + \arg H(e^{j\omega_1}))$

Popis systému diferenční rovnicí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k],$$

- **FIR** – nerekurzivní: jen $b_0 \ldots b_Q$ nenulové. Impulsní odezva je dána přímo koeficienty filtru:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; n < 0 \;\; \text{a pro} \;\; n > Q \\ b_n & \text{pro} \;\; 0 \le n \le Q \end{cases}$$

- **IIR** – čistě rekurzivní: jen $b_0, a_1 \dots a_P$ nenulové.
- **IIR** – obecně rekurzivní: a_i i b_i nenulové.

z – **transformace**

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

především nás bude zajímat ZT zpoždění: $x[n-k] \longrightarrow z^{-k} X(z)$

Přenosová funkce

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

- kmitočtová charakteristika: $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}}$

- nuly a póly:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = b_0 z^{P-Q} \frac{\prod_{k=1}^{Q}(z - n_k)}{\prod_{k=1}^{P}(z - p_k)},$$

dá se pomocí nich odhadnout průběh kmitočtové charakteristiky.

- Stabilita: systém je stabilní, pokud všechny póly leží *uvnitř jednotkové kružnice:* $|p_k| < 1$

NÁHODNÉ SIGNÁLY

- spojitý čas: systém $\{\xi_t\}$ náhodných veličin definovaných pro všechna $t \in \Re$ se nazývá náhodný proces, $\xi(t)$.
- diskrétní čas: systém $\{\xi_n\}$ náhodných veličin definovaných pro všechna $n \in N$ se nazývá náhodný proces, $\xi[n]$.

Množina realizací (počet Ω): označíme $\xi_\omega(t)$, případně $\xi_\omega[n]$. Odhady na množině realizací: **souborové odhady**.

Funkce popisující náhodné procesy

- Distribuční funkce

$$F(x,t) = \mathcal{P}\{\xi(t) < x\}, \quad F(x,t) = \mathcal{P}\{\xi[n] < x\},$$

  souborový odhad tak, že pro určité x počítáme, kolik hodnot ze všech realizací padlo pod x, podělíme Ω.

- Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti

$$p(x,t) = \frac{\delta F(x,t)}{\delta x}, \quad p(x,n) = \frac{\delta F(x,n)}{\delta x}$$

souborový odhad pomocí histogramu – nezapomeneme dělit Ω a Δ, aby bylo zaručeno, že $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)dx = 1$.

- pravděpodobnost

$$\mathcal{P}\{a < \xi(t) < b\} = F(b,t) - F(a,t) = \int_a^b p(x,t)dx$$

momenty

- střední hodnota:

$$a(t) = E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,t)dx \quad a[n] = E\{\xi[n]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x,n)dx$$

  souborový odhad je obyčejný průměr přes všechny realizace.

- rozptyl, směrodatná odchylka:

$$D(t) = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - a(t)]^2 p(x,t)dx$$

$$D[n] = E\{[\xi[n] - a[n]]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - a[n]]^2 p(x,n)dx$$

$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)} \qquad \sigma[n] = \sqrt{D[n]}$$

souborový odhad:

$$\hat{D}(t) = \frac{1}{\Omega}\sum_{\omega=1}^{\Omega}[\xi_\omega(t) - \hat{a}(t)]^2, \quad \hat{\sigma}(t) = \sqrt{\hat{D}(t)}, \quad \hat{D}[n], \sigma[n] = \dots$$

- (auto)korelační funkce (spojitý):

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

(auto)korelační koeficienty (diskrétní):

$$R(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2,$$

2-rozměrnou funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti možno souborově odhadnout pomocí 2D histogramu (nezapomeneme dělit Ω a Δ^2).

Stacionarita

funkce stejné pro všechny t, n, momenty stejné, autokorelační funkce (spoj.) závisí pouze na $\tau = t_2 - t_1$, autokorelační koeficienty (disk.) závisí pouze na $k = n_2 - n_1$.

Ergodicita

můžeme odhadovat pouze z jedné realizace $x(t)$ o délce T (spoj.) nebo $x[n]$ o N vzorcích (disk.).

Časové odhady

- $F(x)$, $p(x)$ – histogramy s hodnotami z jedné realizace.
- střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka:

$$\hat{a} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad \hat{D} = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - \hat{a}]^2 dt \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{D}}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \qquad \hat{D} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} [x[n] - \hat{a}]^2 \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{D}}$$

- autokorelační funkce $\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$
- autokorelační koeficienty:

$\hat{R}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]$, vychýlený, ale spolehlivý odhad

$\hat{R}(k) = \frac{1}{N-|k|}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]$, nevychýlený, ale na krajích nespolehlivý odhad.

Spektrální hustota výkonu – PSD

- spojitý čas:

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \quad R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)e^{+j\omega\tau}d\omega$$

- diskrétní čas:

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R[k]e^{-j\omega k} \quad R[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})e^{+j\omega k}d\omega$$

- obě G s sebou nesou vlastnosti FT a DTFT (např. periodicita u $G(e^{j\omega})$, atd.)
- odhad PSD pomocí DFT: pro $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$:

$$\hat{G}(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{N}|X[k]|^2.$$

  někdy velmi nespolehlivý, průměrování odhadů přes několik segmentů (Welchova metoda).

Průchod náhodných signálů lineárními systémy

$$G_y(j\omega) = |H(j\omega)|^2 G_x(j\omega)$$

$$G_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 G_x(e^{j\omega})$$

KVANTOVÁNÍ

zaokrouhlování pouze na určité kvantovací hladiny. $L = 2^b$ hladin od x_{min} do x_{max}, kvantovací krok

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L - 1} \approx \frac{x_{max} - x_{min}}{L}.$$

pro každé $x[n]$ vybíráme nejbližší hlainu: $x[n] \rightarrow x_q[n]$. Chyba kvantování: $e[n] = x[n] - x_q[n]$.

Vliv chyby kvantování na kvalitu signálu: poměr signál šum:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} \quad \text{[dB]}.$$

Pro kosínusovku s amplitudou A a správným nastavením x_{min} a x_{max}:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{3}{2}(2^b)^2 = 10 \log_{10} \frac{3}{2} + 10 \log_{10} 2^{2b} = 1.76 + 20b \log_{10} 2 = 1.76 + 6\,b \;\; \text{dB}.$$