Náhodné signály

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

Náhodné signály

- deterministické signály (můžeme je zapsat rovnicí) mají jednu zásadní nevýhodu – nesou velmi málo informace (např. kosínusovka: amplituda, frekvence, počáteční fáze).
- signály reálného světa se dají popsat deterministicky velmi těžce nebo vůbec (např. fyzikální model pro řečový signál je velmi složitý a stejně se jedná o zjednodušení).

$\Rightarrow$ na tyto **užitečné** signály se budeme z hlediska teorie dívat jako na **náhodné signály (procesy)** (např. řeč, cirkulace zásilek pobočkami České pošty, kurs Kč/EUR ...).

Podle charakteru časové osy dělíme na náhodné signály **se spojitým časem** (definovány pro všechna t) a **s diskrétním časem** (jen pro diskrétní n).

Signály nemůžeme popsat ve všech časech (to by byly deterministické), budeme spíše hledat charakteristické vlastnosti náhodných signálů, jako střední hodnota, funkce hustoty rozložení pravděpodobnosti, atd.

Definice náhodného procesu

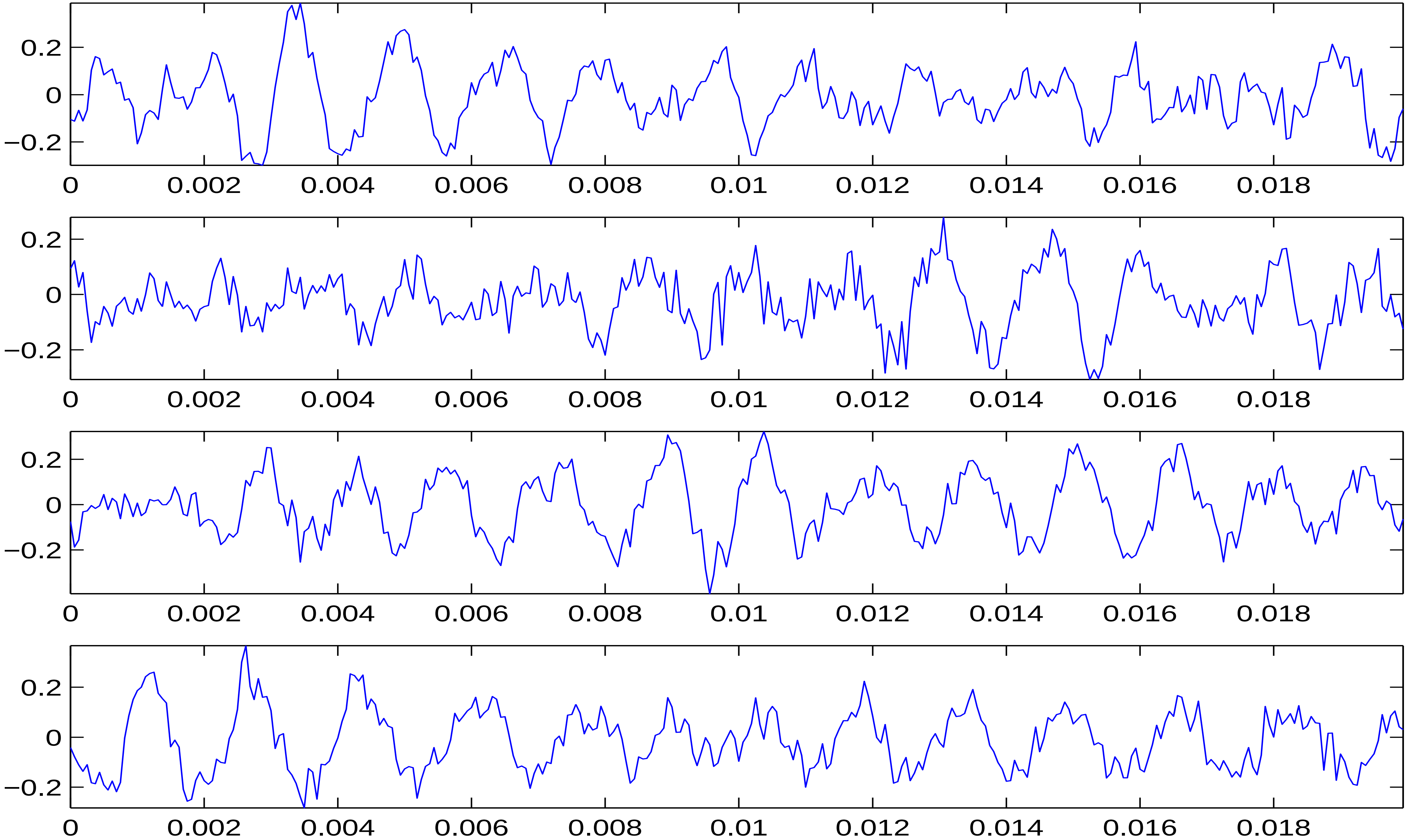
- spojitý čas: systém $\{\xi_t\}$ náhodných veličin definovaných pro všechna $t \in \Re$ se nazývá náhodný proces, označujeme $\xi(t)$.
- diskrétní čas: systém $\{\xi_n\}$ náhodných veličin definovaných pro všechna $n \in N$ se nazývá náhodný proces, označujeme $\xi[n]$.

Množina realizací náhodného procesu

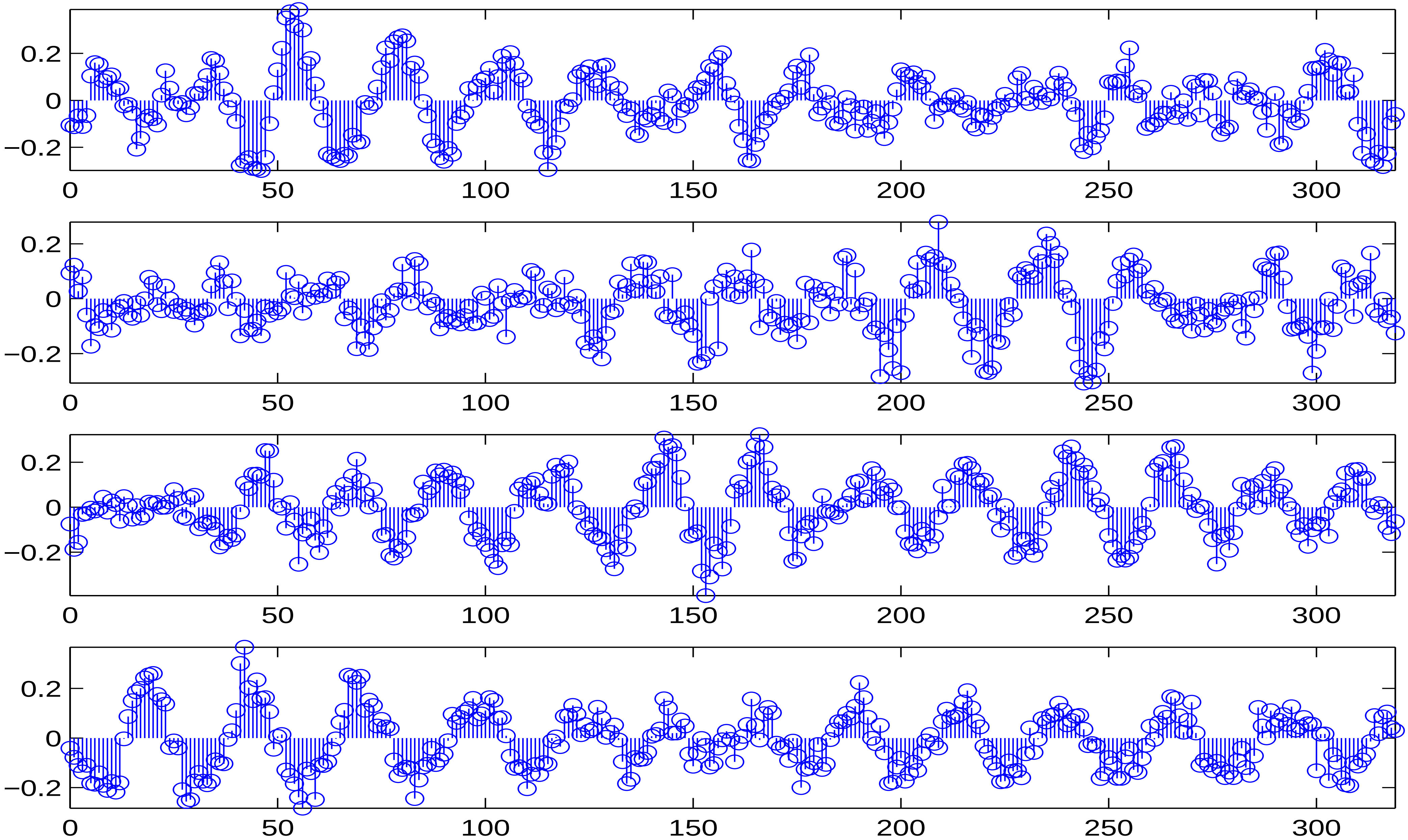
možnou reprezentací náhodného procesu je nekonečně mnoho jeho různých průběhů – **realizací**. Omezíme se na konečný počet Ω a každou realizaci označíme $\xi_\omega(t)$, případně $\xi_\omega[n]$. Pokud budeme na souboru realizací náhodného procesu odhadovat nějaké jeho parametry, bude se jednat o **souborové odhady**.

Příklad: náhodný proces je zvukový signál vody tekoucí vodovodní trubkou doma u Černockých. Bylo nahráno 1068 realizací po 20 ms. Pro výklad spojitých náhodných procesů si je budeme představovat jako spojité signály $\xi_\omega(t)$, pro výklad diskrétních náhodných procesů jako $\xi_\omega[n]$.

$\xi_\omega(t)$ pro $\omega = 1,\ 200,\ 500,\ 1000$



$\xi_\omega[n]$ pro $\omega = 1,\ 200,\ 500,\ 1000$



Distribuční funkce

je definována pro jednu náhodnou veličinu: náhodný proces pro určitý čas t nebo n **je** takovou náhodnou veličinou. Definice:

$$F(x,t) = \mathcal{P}\{\xi(t) < x\},$$

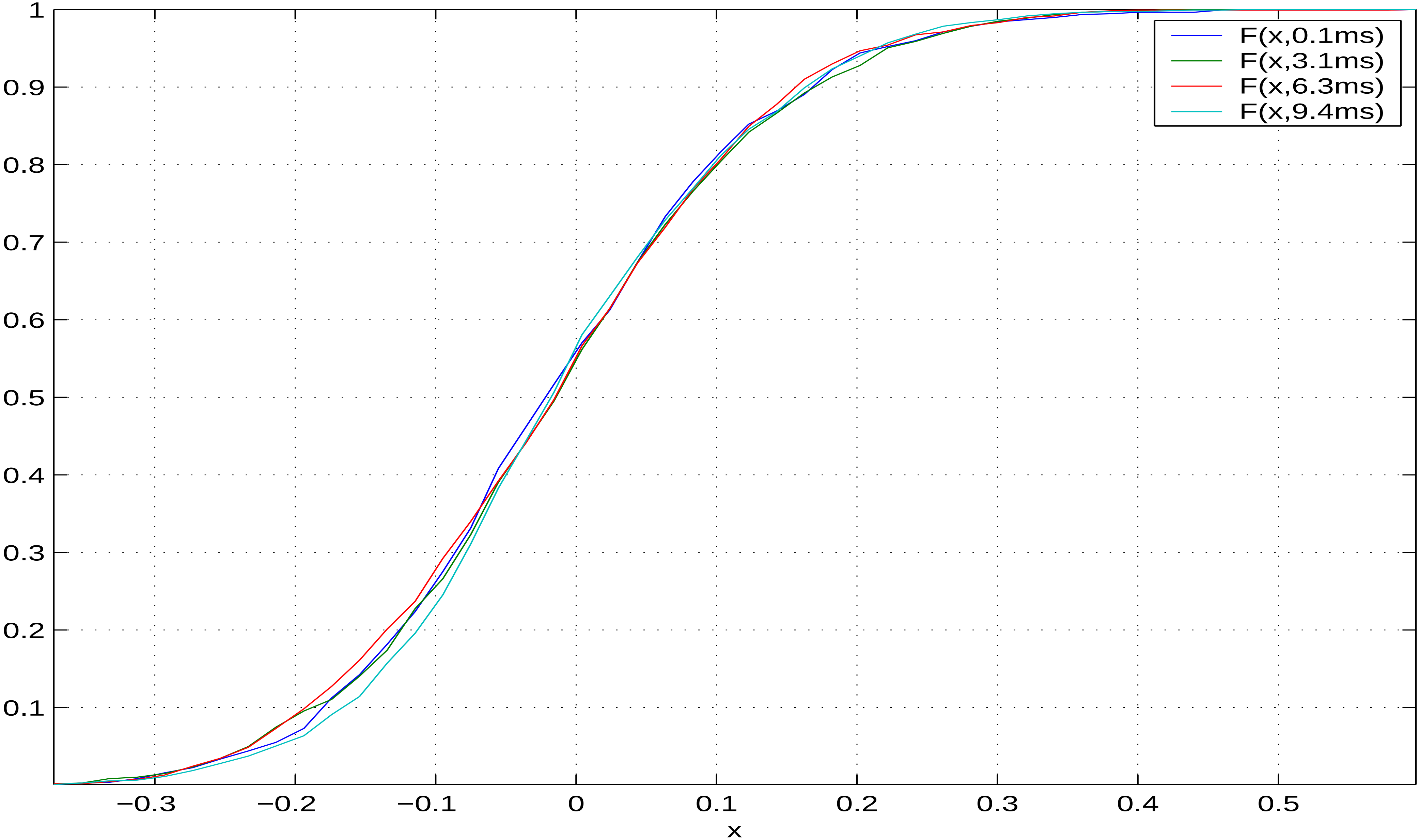
$$F(x,n) = \mathcal{P}\{\xi[n] < x\},$$

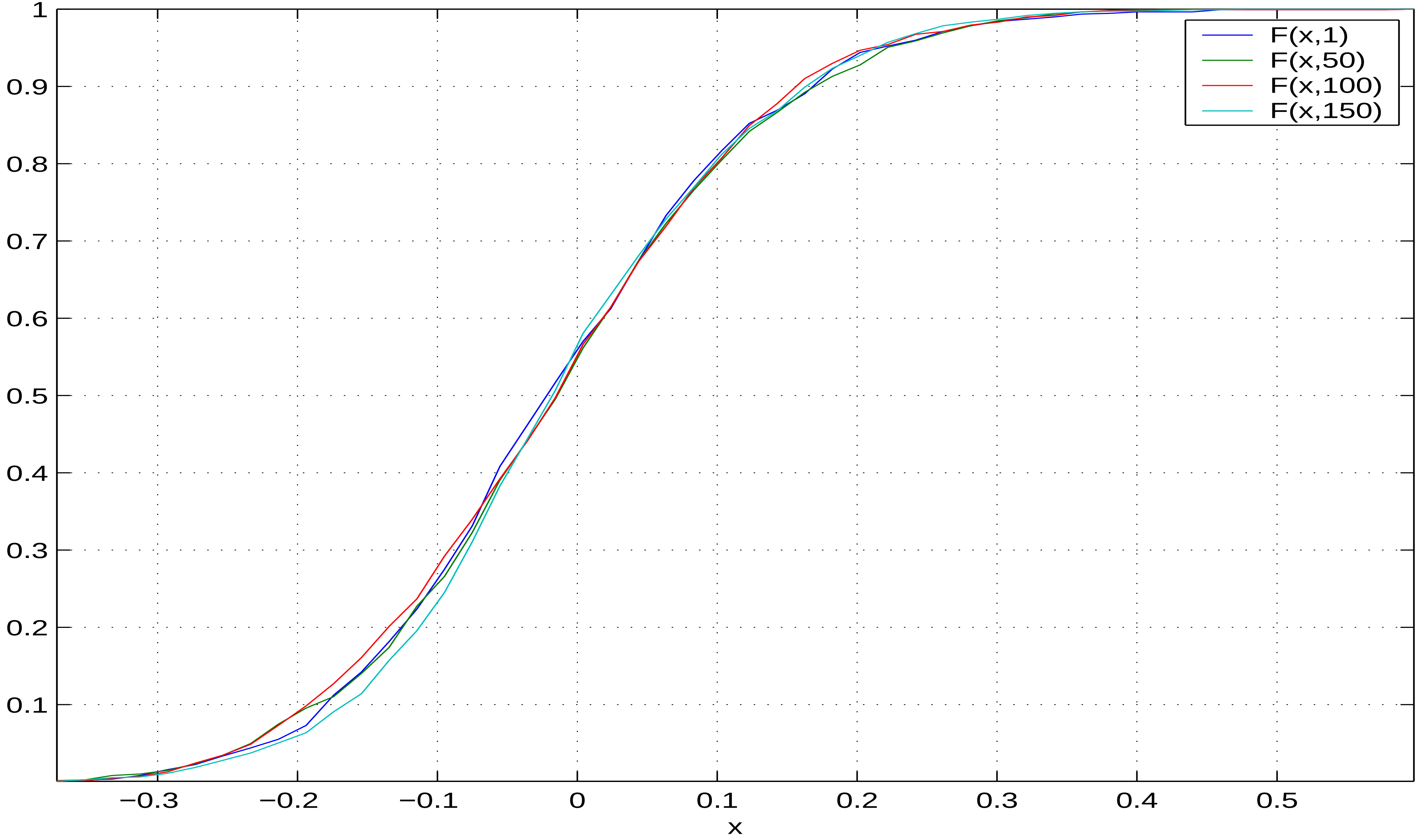
kde $\mathcal{P}\{\xi(t) < x\}$ nebo $\mathcal{P}\{\xi[n] < x\}$ je pravděpodobnost toho, že náhodná proměnná zde nabude hodnoty menší než x. Uvědomme si prosím, že x není nic náhodného, je to pomocná proměnná, kterou nasadíme na nějakou hodnotu a pro tuto hodnotu sledujeme pravděpodobnost.

Souborový odhad distribuční funkce: posadíme se do určitého času t nebo n, vezmeme Ω realizací, které máme k disposici a pro x odhadujeme:

$$\hat{F}(x,t) = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} 1 \text{ pokud } \xi_\omega(t) < x, \text{ 0 jinak}}{\Omega}$$

$$\hat{F}(x,n) = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} 1 \text{ pokud } \xi_\omega[n] < x, \text{ 0 jinak}}{\Omega}$$


F(x,0.1ms)
F(x,3.1ms)
F(x,6.3ms)
F(x,9.4ms)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x



F(x,1)
F(x,50)
F(x,100)
F(x,150)
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.3
−0.2
−0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
x

Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti

je opět definována pro jednu náhodnou veličinu (náhodný proces pro určitý čas t nebo n je takovou náhodnou veličinou). Definice:

$$p(x,t) = \frac{\delta F(x,t)}{\delta x}$$

$$p(x,n) = \frac{\delta F(x,n)}{\delta x}$$

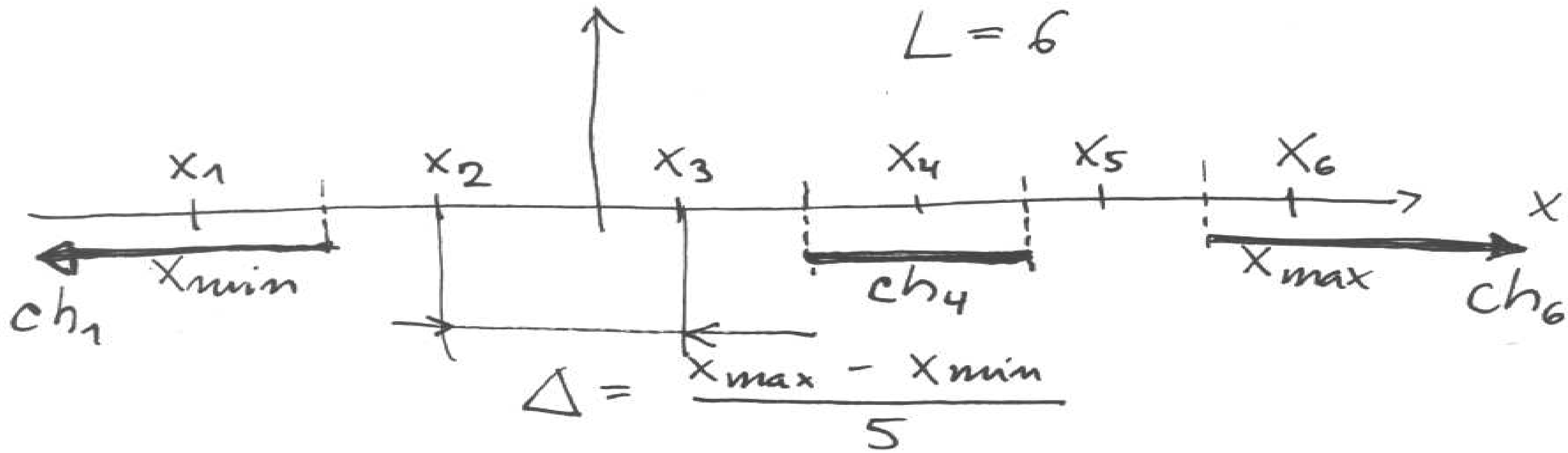
Souborový odhad funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti: Funkci můžeme získat numerickým derivováním z odhadnuté $\hat{F}(x,t)$ nebo $\hat{F}(x,n)$ nebo ji odhadnout pomocí **histogramu**:

- posadíme se do určitého t nebo n
- Musíme si zvolit L hodnot x od x_{min} do x_{max}, nejlépe s pravidelným krokem $\Delta = \frac{x_{max}-x_{min}}{L-1}$:

$$x_1 = x_{min}, \quad x_2 = x_{min} + \Delta, \quad x_3 = x_{min} + 2\Delta \quad \ldots$$

$$\ldots \quad x_{L-1} = x_{min} + (L-2)\Delta, \quad x_L = x_{min} + (L-1)\Delta = x_{max}$$

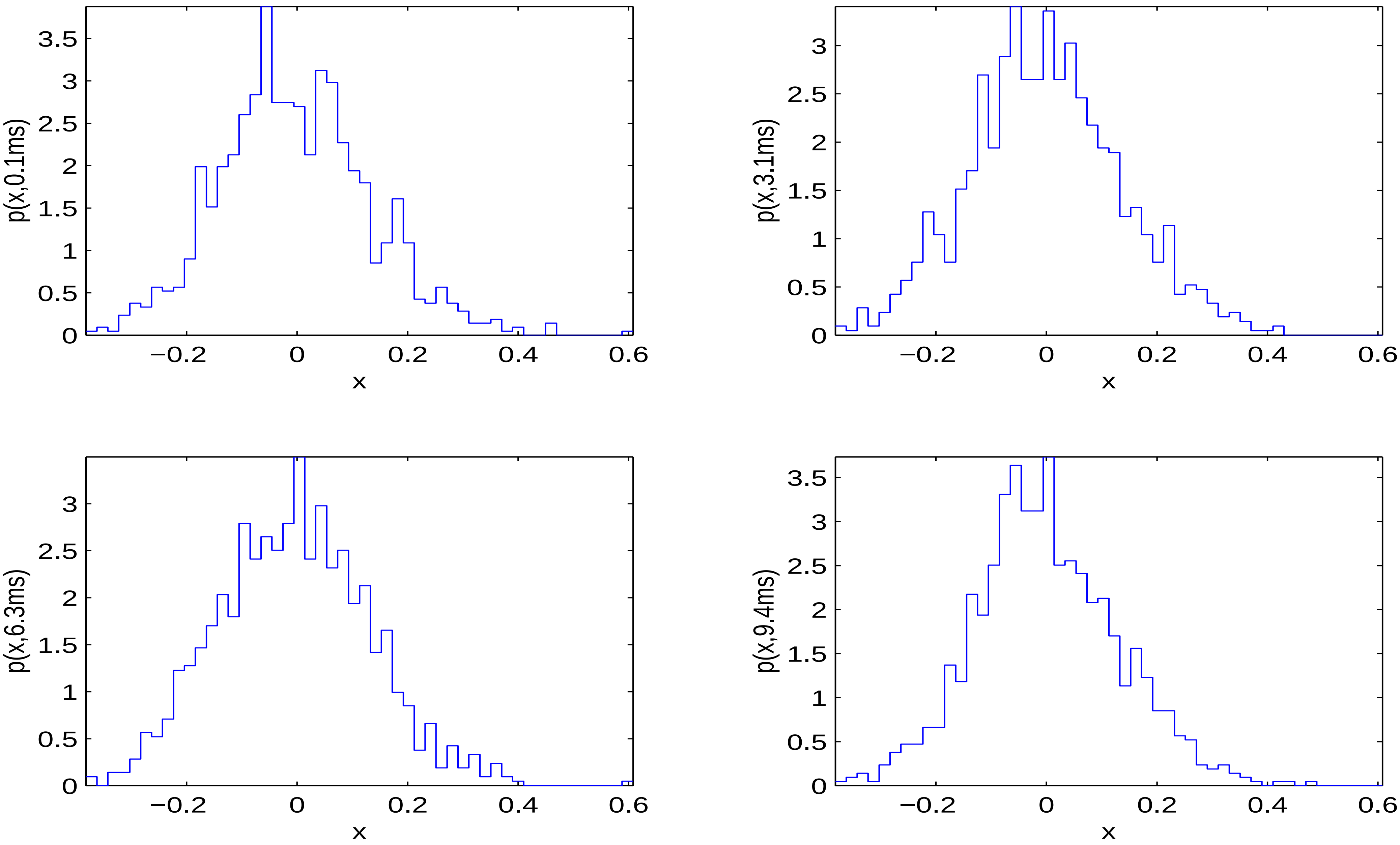
dostaneme tak L "chlívků" o šířce Δ, pro x_i je daný chlívek ch_i od $x_i - \frac{\Delta}{2}$ do $x_i + \frac{\Delta}{2}$. Levý okraj spodního chlívku (1) natáhneme až do $-\infty$, pravý okraj horního (L) do $+\infty$.

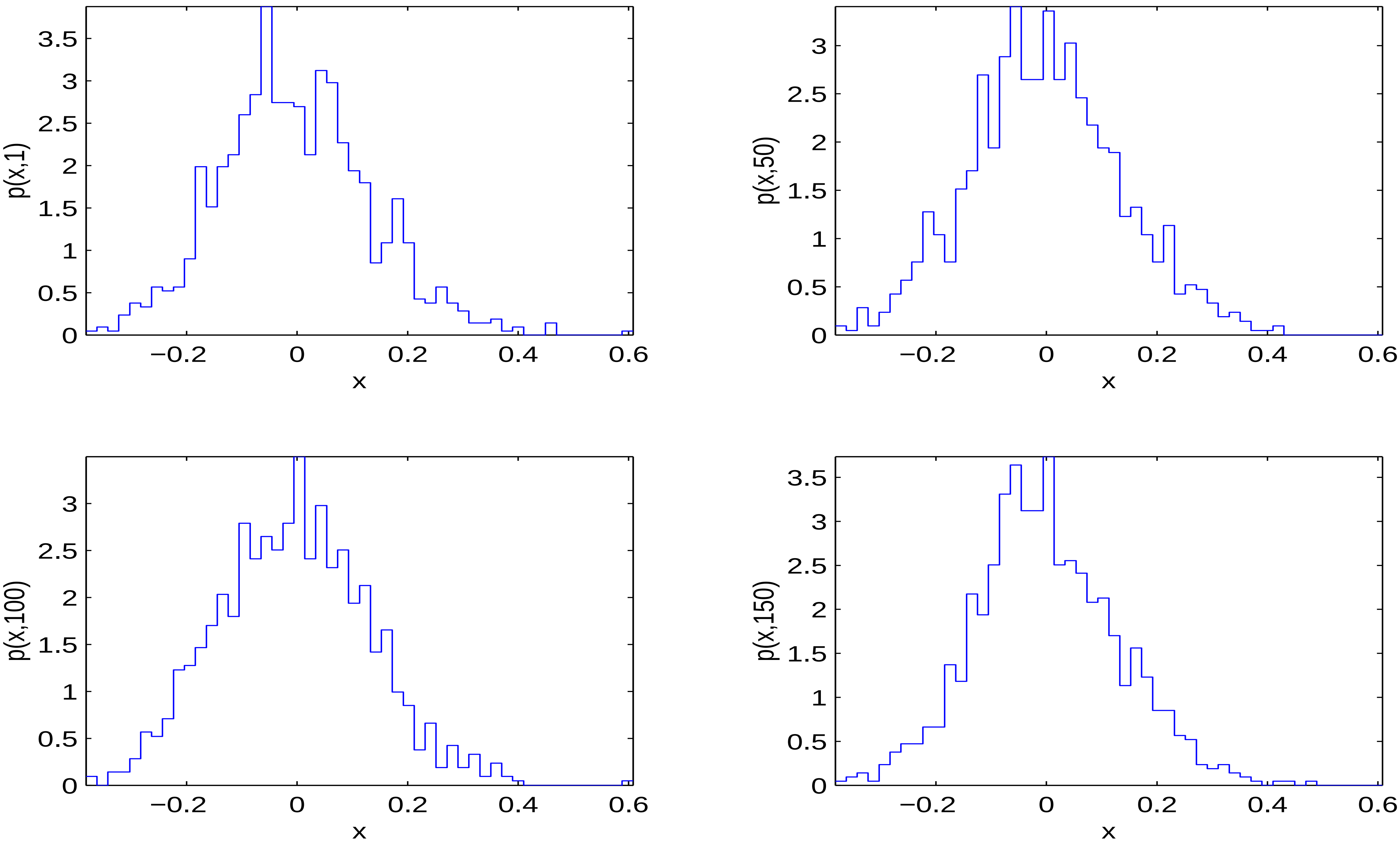


- odhad pro x_i počítáme jako

$$\hat{p}(x_i, t) = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} 1 \text{ pokud } \xi_\omega(t) \in ch_i, \quad 0 \text{ jinak}}{\Omega\Delta}$$

$$\hat{p}(x_i, n) = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} 1 \text{ pokud } \xi_\omega[n] \in ch_i, \quad 0 \text{ jinak}}{\Omega\Delta}$$


p(x,0.1ms)
p(x,3.1ms)
p(x,6.3ms)
p(x,9.4ms)
x


p(x,1)
p(x,50)
p(x,100)
p(x,150)
x
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

$F(x,t)$, $p(x,t)$ a pravděpodobnosti

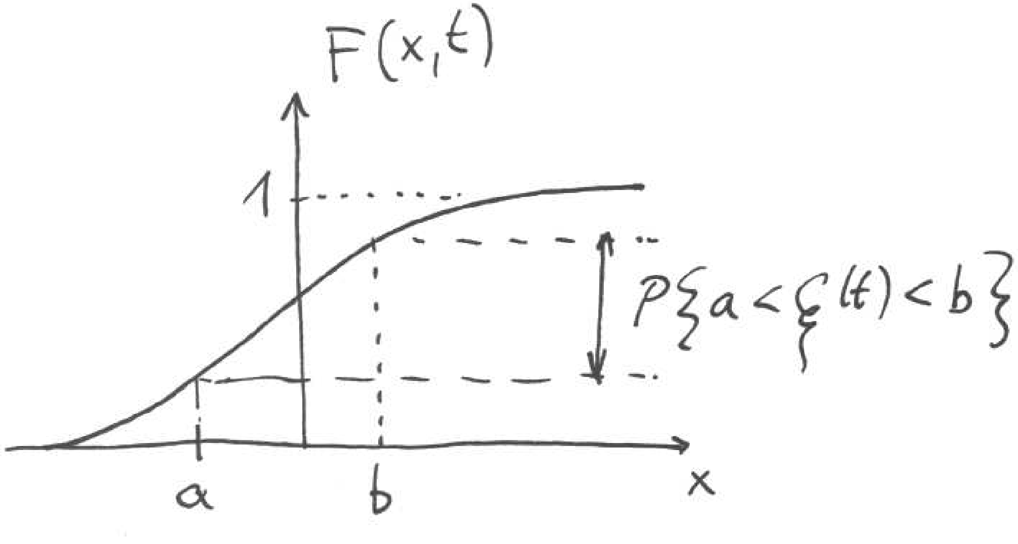
pokud máme za úkol vypočítat pravděpodobnost toho, že se hodnota procesu v čase t nebo n vyskytne v intervalu $[a,b]$, máme tyto možnosti (budeme ukazovat jen na spojitém čase, vzorečky pro diskrétní jsou naprosto stejné):

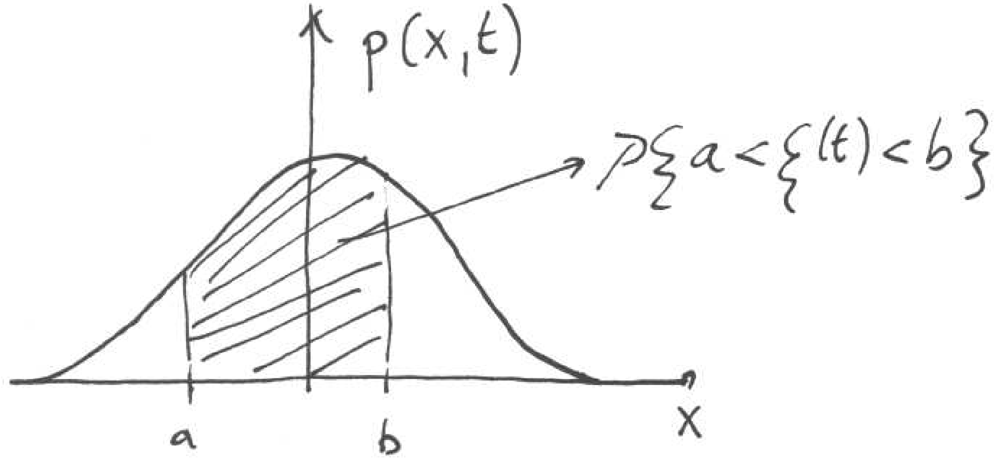
- vypočítat tuto pravděpodobnost z distribuční funkce, pokud si uvědomíme její definici: $F(x,t) = \mathcal{P}\{\xi(t) < x\}$, pak

$$\mathcal{P}\{a < \xi(t) < b\} = F(b,t) - F(a,t)$$

- vypočítat ji z funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti. Už jsme si zvykli, že pokud je někde hustota, bude se integrovat:

$$\mathcal{P}\{a < \xi(t) < b\} = \int_a^b p(x,t)dx$$





Z těchto vzorečků vyplývají důležité vlastnosti distribuční funkce a funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti:

- hodnoty náhodného procesu budou těžko menší než $-\infty$, proto $F(-\infty,t)=\mathcal{P}\{\xi(t)<-\infty\}=0$.
- hodnoty náhodného procesu zřejmě všechny menší než ∞, proto $F(+\infty,t)=\mathcal{P}\{\xi(t)<+\infty\}=1$.
- funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je dána jako derivace distribuční funkce, naopak platí integrál:

$$F(x,t)=\int_{-\infty}^{x} p(g,t)dg$$

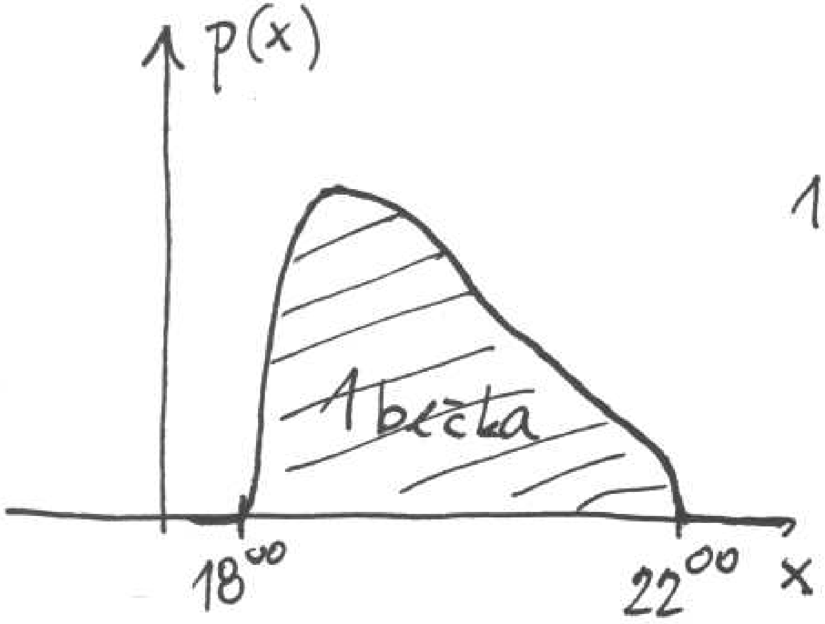
jelikož $F(+\infty, t) = 1$, musí být

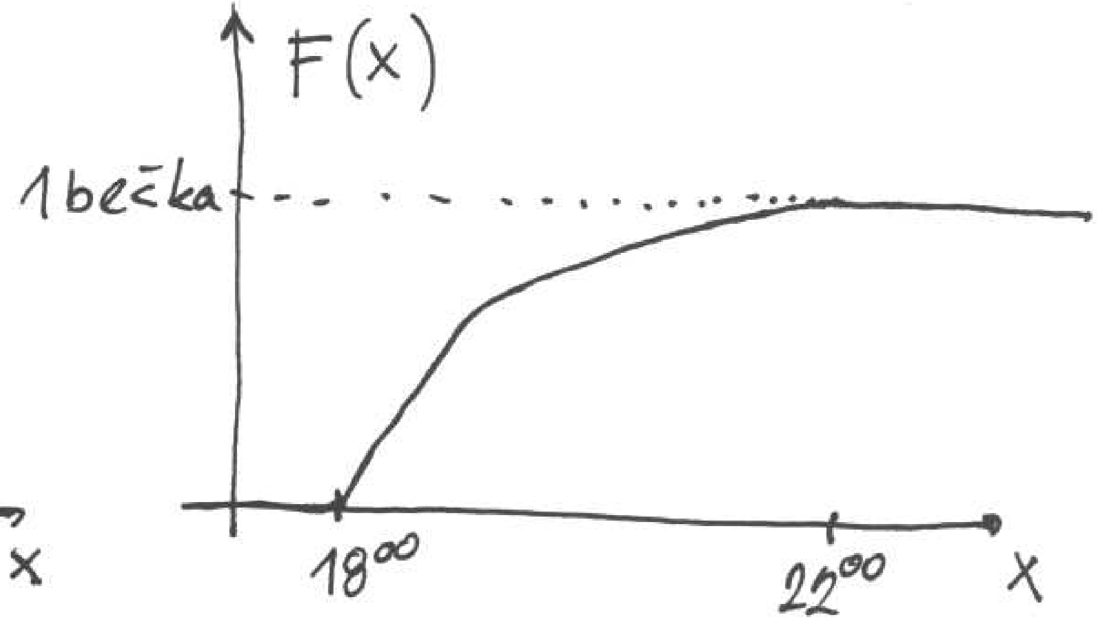
$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,t)dx = 1$$

- hodnota funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti pro určité x **není pravděpodobnost !!!** (častý chyták statistiků).

Ilustrace $F(x,t)$, $p(x,t)$ – bečka piva. . .

na kolejích se od $x = 18.00$ do 22.00 pije bečka piva. Definujeme funkci $p(x)$ jako okamžitou spotřebu piva (picí funkce) a $F(x)$ jako funkci vypitého piva (x je v tomto příkladu výjimečně čas):





Chování je podobné funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti a distribuční funkci, pouze za 1 dosaďte "1 bečka":

- $F(x)$ je nulová v čase $-\infty$ (je nulová dokonce až do 18.00), protože pivo nebylo.

- $F(x)$ je 1 bečka v čase $+\infty$ (dokonce už ve 22.00), protože pivo je vypité a víc ho nebude.
- množství vypitého piva v čase x: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(g)dg$.
- celkové množství vypitého piva: $F(+\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$ bečka.
- množství vypitého pivo od času x_1 do času x_2 je možné spočítat jako rozdíl dvou bodů $F(x)$ nebo integrací $p(x)$.
- hodnotě $p(x)$ (např. $p(19.00)$)nemůžeme říkat množství piva – za nekonečně krátký časový interval ho do nikoho nevtekla ani kapka.

Momenty

na rozdíl od funkcí jsou momenty **čísla**, která charakterizují náhodný proces v daném čase t nebo n:

střední hodnota nebo též "Expectation" (očekávání), první moment:

$$a(t) = E\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x,t) dx$$

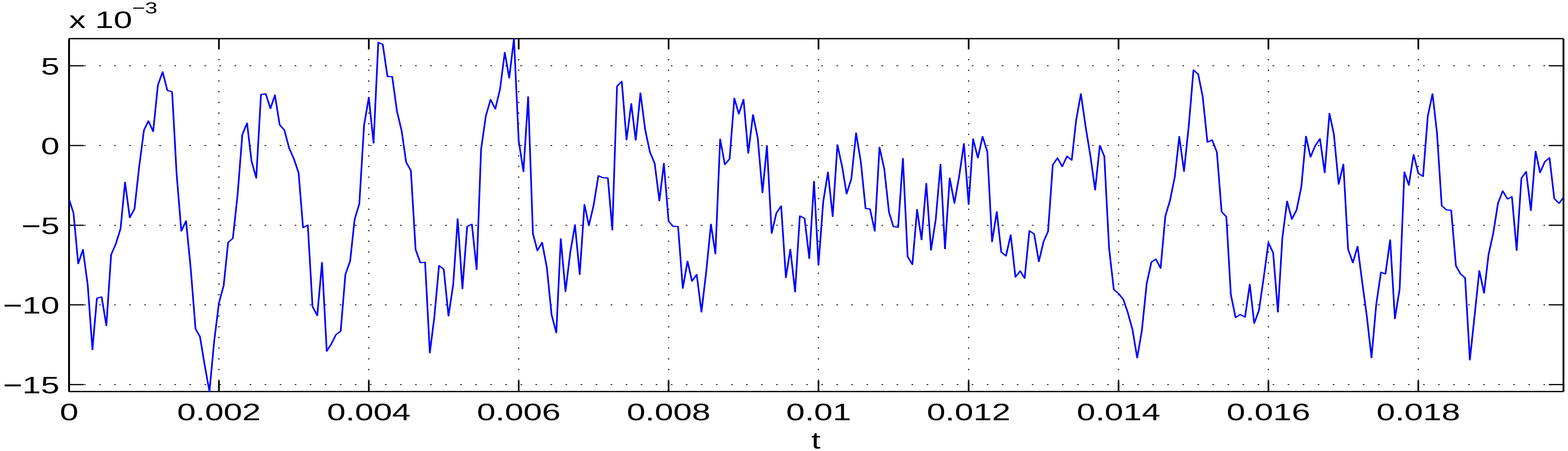
$$a[n] = E\{\xi[n]\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x,n) dx$$

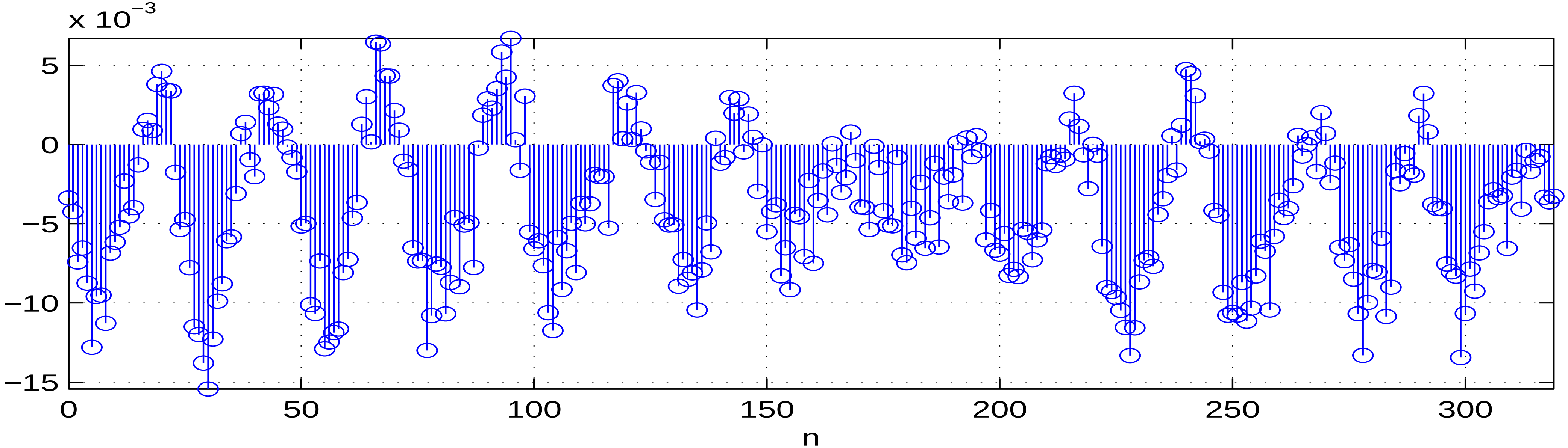
souborový odhad střední hodnoty je pro každý čas t nebo n dán jako průměr vzorků přes všechny realizace:

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=1}^{\Omega} \xi_\omega(t)$$

$$\hat{a}[n] = \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=1}^{\Omega} \xi_\omega[n]$$

Pro naše signály:





rozptyl (disperze), směrodatná odchylka

$$D(t) = E\{[\xi(t) - a(t)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - a(t)]^2 p(x,t) dx$$

$$D[n] = E\{[\xi[n] - a[n]]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - a[n]]^2 p(x,n) dx$$

směrodatná odchylka (std - standard deviation) je odmocninou rozptylu:

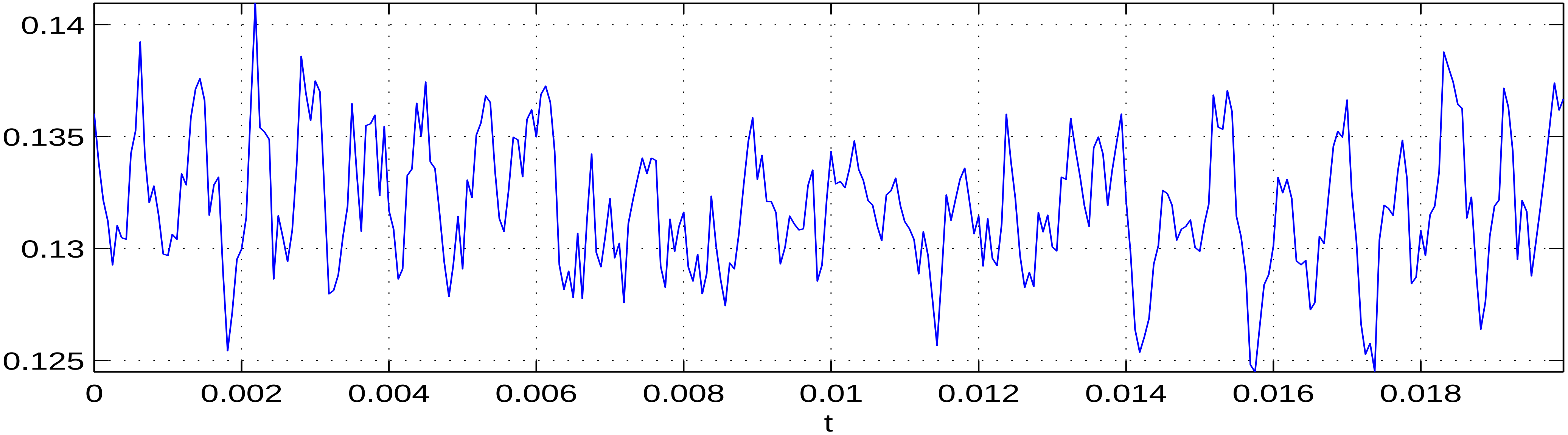
$$\sigma(t) = \sqrt{D(t)} \qquad \sigma[n] = \sqrt{D[n]}$$

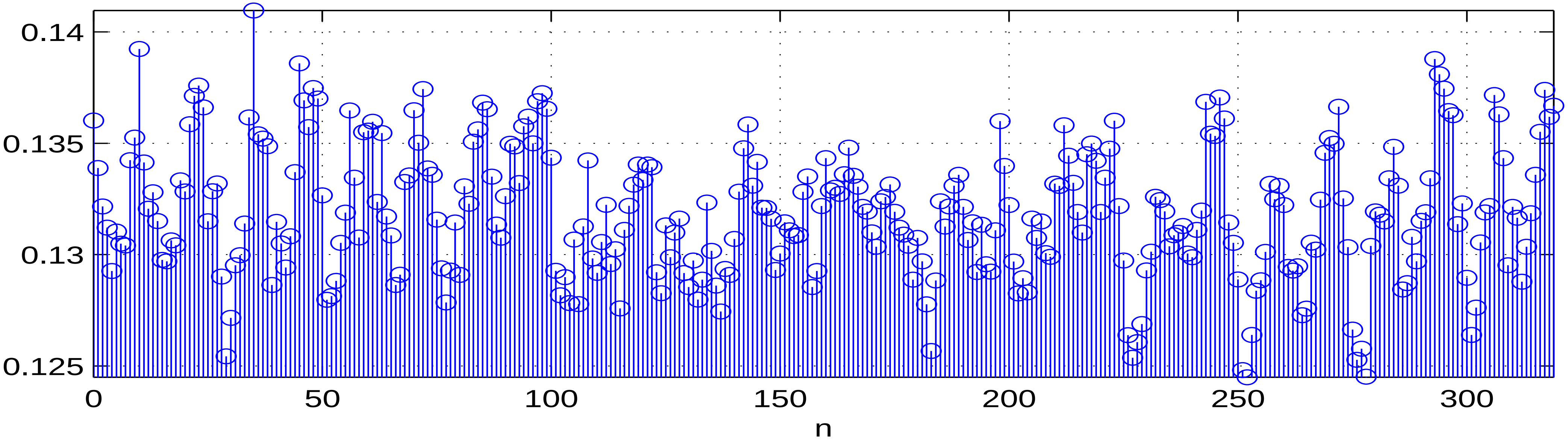
souborový odhad rozptylu a směrodatné odchylky je pro každý čas t nebo n dán:

$$\hat{D}(t) = \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=1}^{\Omega} [\xi_\omega(t) - \hat{a}(t)]^2, \quad \hat{\sigma}(t) = \sqrt{\hat{D}(t)}$$

$$\hat{D}[n] = \frac{1}{\Omega} \sum_{\omega=1}^{\Omega} [\xi_\omega[n] - \hat{a}[n]]^2, \quad \hat{\sigma}[n] = \sqrt{\hat{D}[n]}$$

Pro naše signály:





Korelační funkce

Udává podobnost mezi hodnotami náhodného procesu v časech t_1 (nebo n_1) a t_2 (nebo n_2):

$$R(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

$$R(n_1, n_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2,$$

kde $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$, resp. $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ je dvourozměrná funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti mezi časy t_1 a t_2, resp. n_1 a n_2. Teoreticky ji vypočítáme z dvourozměrné distribuční funkce:

$$F(x_1, x_2, t_1, t_2) = \mathcal{P}\{\xi(t_1) < x_1 \ \text{ a } \ \xi(t_2) < x_2\},$$

$$F(x_1, x_2, n_1, n_2) = \mathcal{P}\{\xi[n_1] < x_1 \ \text{ a } \ \xi[n_2] < x_2\}$$

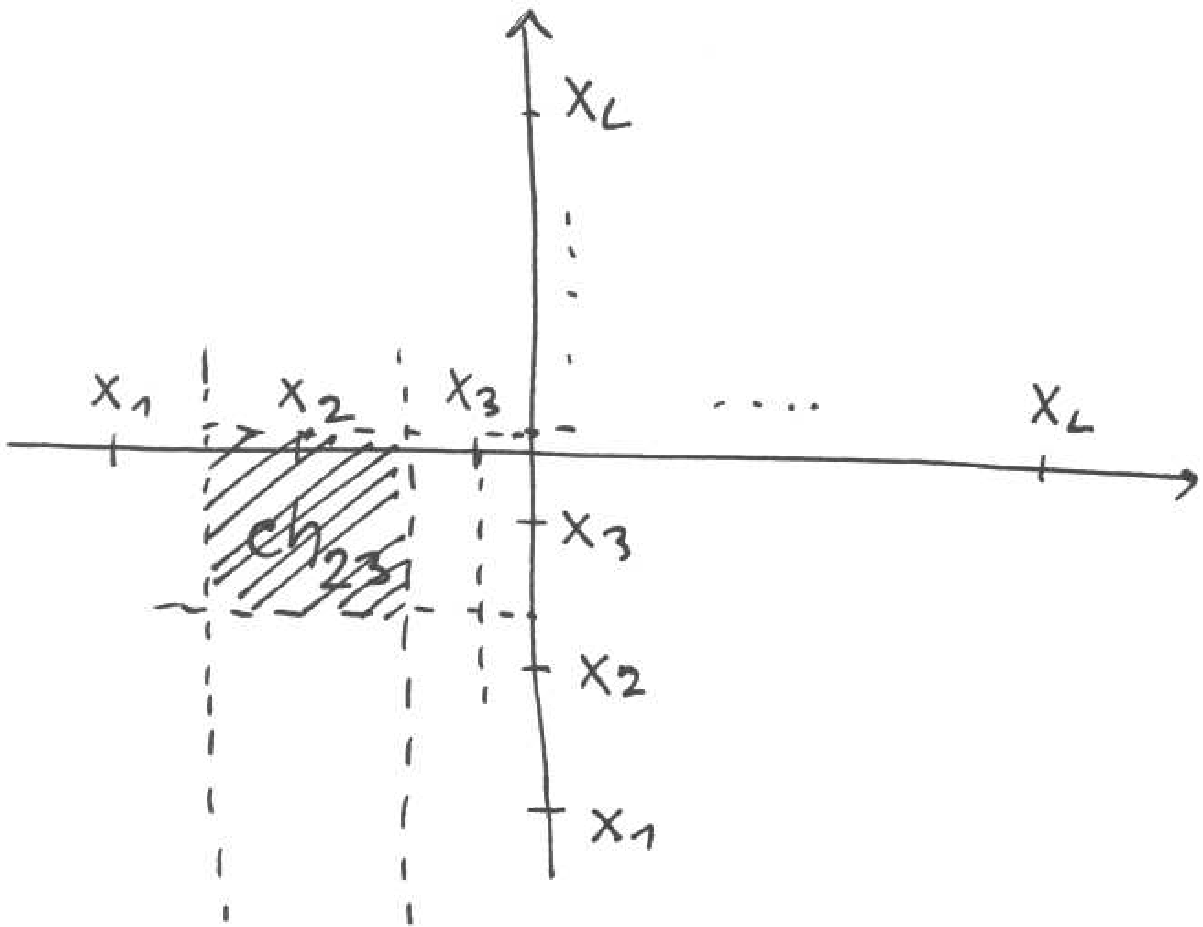
pomocí derivace podle x_1 a x_2:

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\delta^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\delta x_1 \delta x_2}$$

$$p(x_1, x_2, n_1, n_2) = \frac{\delta^2 F(x_1, x_2, n_1, n_2)}{\delta x_1 \delta x_2}$$

Nás bude ale spíše zajímat souborový odhad, který zařídíme pomocí dvourozměrného histogramu:

- podobně jako u standardního histogramu vytvoříme "chlívky", tentokrát ale budou dvourozměrné (čtverečky): ch_{ij} je pro první rozměr od $x_i - \frac{\Delta}{2}$ do $x_i + \frac{\Delta}{2}$ a pro druhý rozměr od $x_j - \frac{\Delta}{2}$ do $x_j + \frac{\Delta}{2}$.



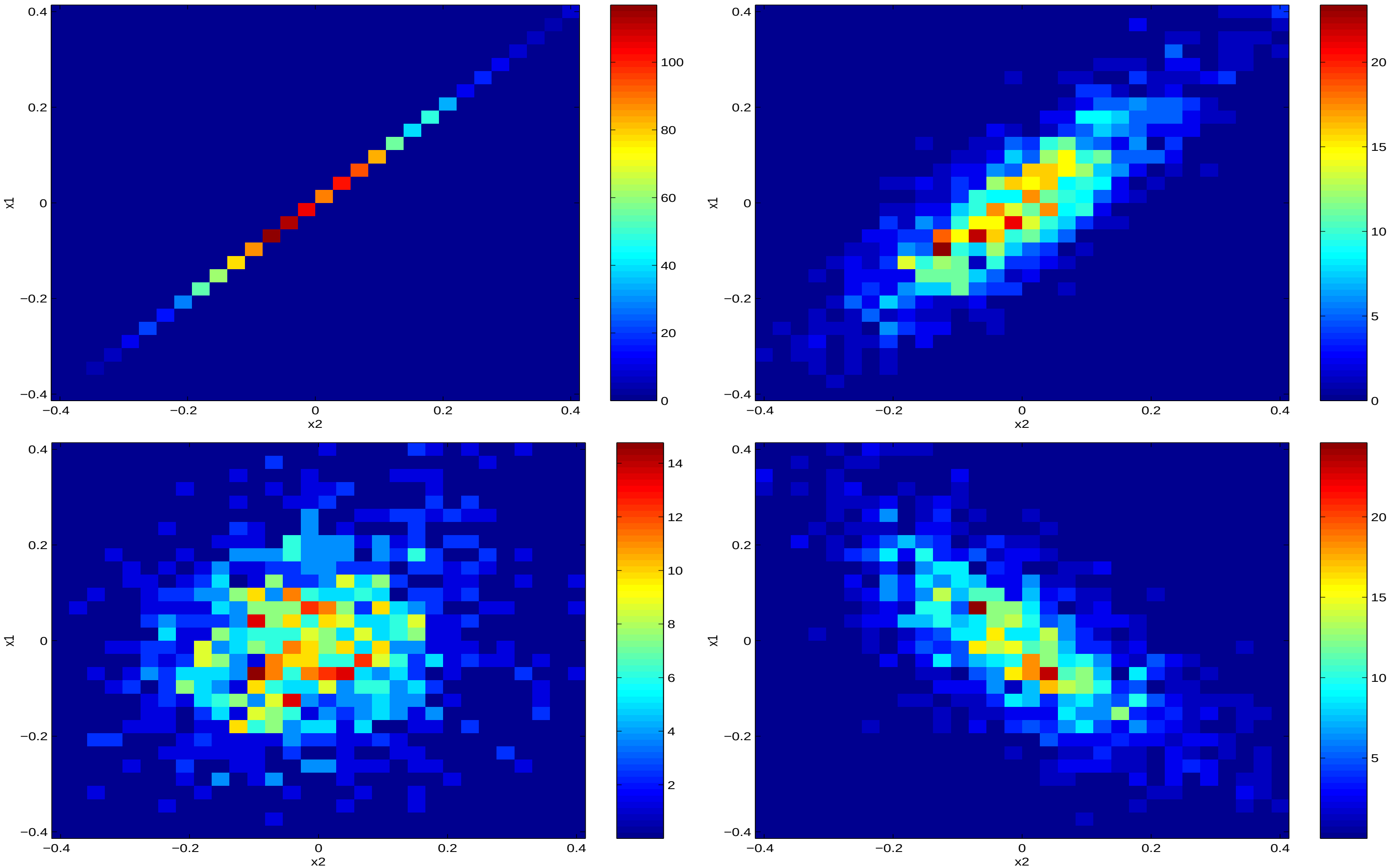
x_L
x_1
x_2
x_3
....
x_L
ch_{23}
x_3
x_2
x_1

- hodnota 2D histogramu pro chlívek ch_{ij} určený hodnotami x_i a x_j bude:

$$\hat{p}(x_i, x_j, t_1, t_2) = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} 1 \;\; \text{pokud} \;\; \xi_\omega(t_1), \xi_\omega(t_2) \in ch_{ij}, \;\; 0 \text{ jinak}}{\Omega \Delta^2}$$

$$\hat{p}(x_i, x_j, n_1, n_2) = \frac{\sum_{\omega=1}^{\Omega} 1 \;\; \text{pokud} \;\; \xi_\omega[n_1], \xi_\omega[n_2] \in ch_{ij}, \;\; 0 \text{ jinak}}{\Omega \Delta^2}$$

Pro naše signály (uvádíme jen diskrétní časy, stejně jste už přišli na to, že ty se spojitým časem jsou úplně stejné. . .): $n_1 = 0$, $n_2 = 0, 1, 5, 11$.

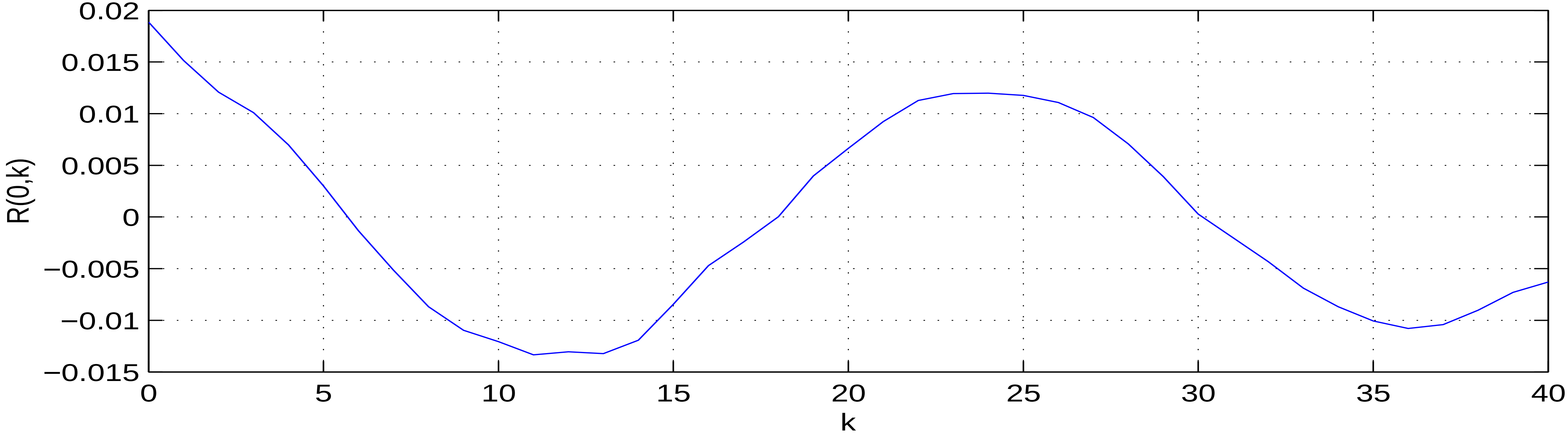


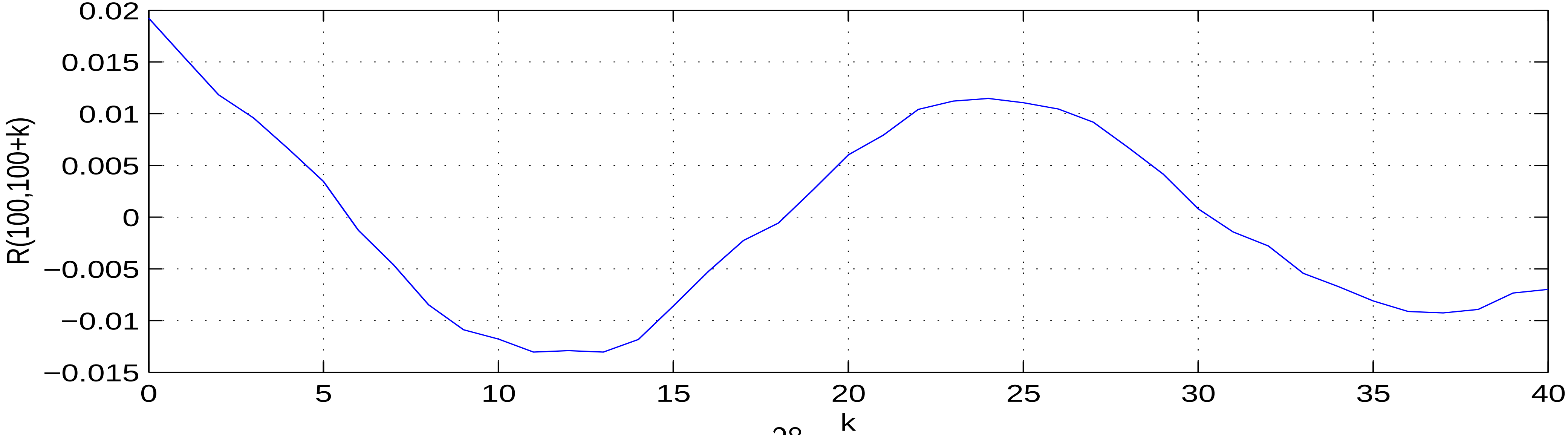
Pro $n_1 = 0$, $n_2 = 0, 1, 5, 11$ nám po numerické integraci vyšly následující autokorelační koeficienty

- $R(0,0) = 0.0188$: ve stejném bodě je sám sobě proces vždy nejvíce podobný...
- $R(0,1) = 0.0151$: posuneme-li se do vedlejšího vzorku, je stále ještě dost podobný času $n_1 = 0$.
- $R(0,5) = 0.0030$: časy $n_1 = 0$ a $n_2 = 5$ si nejsou vůbec podobné.
- $R(0,11) = -0.0133$: v časech $n_1 = 0$ a $n_2 = 11$ si je proces podobný, ale s opačným znaménkem ! Je pravděpodobné, že když bude hodnota $\xi[n_1]$ kladná, bude $\xi[n_2]$ záporná, a naopak.

Korelační funkce

pro $n_1 = 0$, $n_2 = n_1 + k$ pro $k = 0 \ldots 40$, srovnání s $n_1 = 100$, $n_2 = n_1 + k$ pro $k = 0 \ldots 40$:





STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

lidově řečeno, chování stacionárního náhodného procesu se nemění v čase. Statistické veličiny nejsou závislé na aktuálním t nebo n. Korelační funkce není závislá na přesné poloze t_1, t_2 nebo n_1, n_2, ale pouze na jejich rozdílu: $\tau = t_2 - t_1$, $k = n_2 - n_1$. Pro stacionární systémy se spojitým časem:

$$F(x,t) \rightarrow F(x) \quad p(x,t) \rightarrow p(x)$$

$$a(t) \rightarrow a \quad D(t) \rightarrow D \quad \sigma(t) \rightarrow \sigma$$

$$p(x_1,x_2,t_1,t_2) \rightarrow p(x_1,x_2,\tau) \quad R(t_1,t_2) \rightarrow R(\tau)$$

Podobně pro diskrétní čas:

$$F(x,n) \rightarrow F(x) \quad p(x,n) \rightarrow p(x)$$

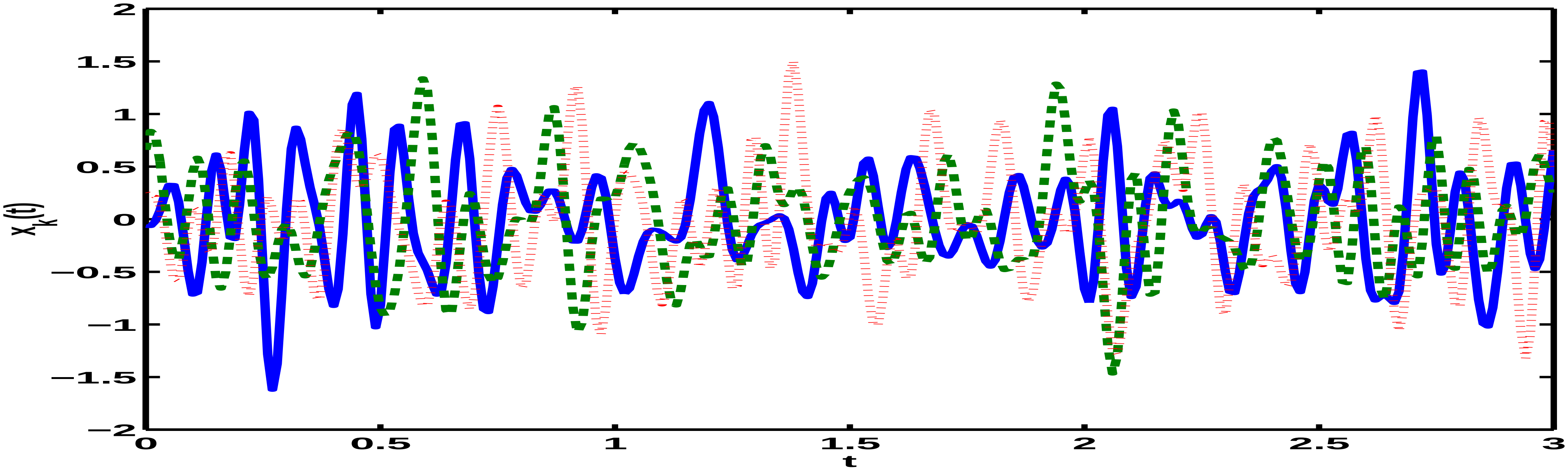
$$a[n] \rightarrow a \quad D[n] \rightarrow D \quad \sigma[n] \rightarrow \sigma$$

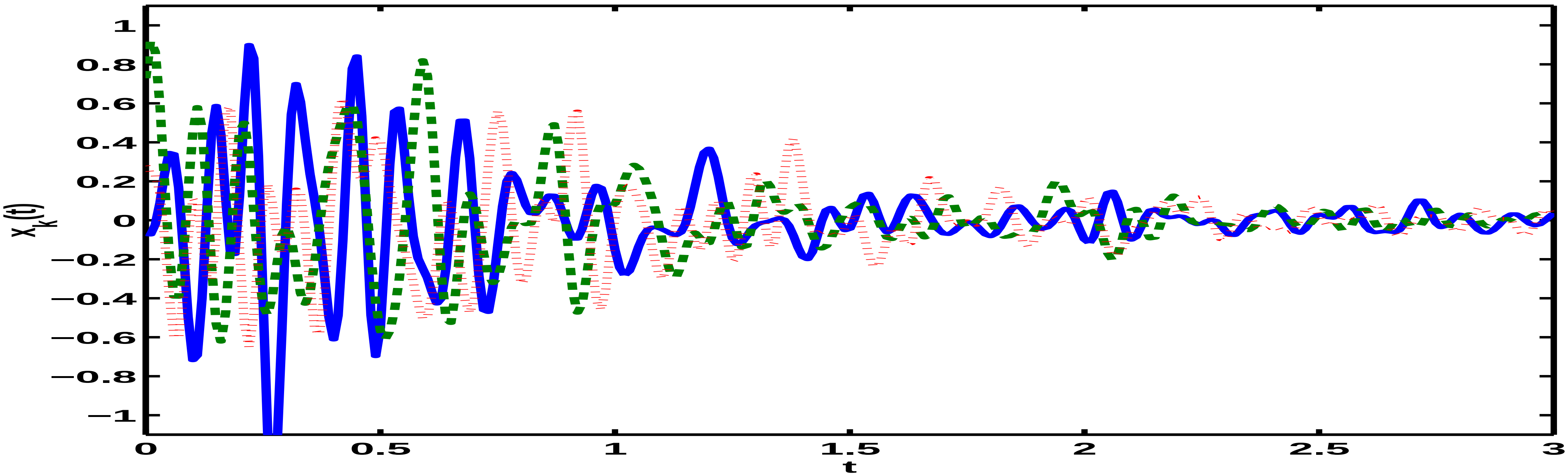
$$p(x_1,x_2,n_1,n_2) \rightarrow p(x_1,x_2,k) \quad R(n_1,n_2) \rightarrow R(k)$$

V příkladu s tekoucí vodou jsme zřejmě měli stacionární signál, protože:

- střední hodnota byla pro všechny časy podobná (pokud bychom měli k disposici více realizací, byla by ještě "stejnější").
- směrodatná odchylka také (dtto).
- korelační funkce pro $n_1 = 0, n_2 = n_1 + k$ a pro $n_1 = 100, n_2 = n_1 + k$ vypadala podobně.

Stacionární vs. nestacionární signál:

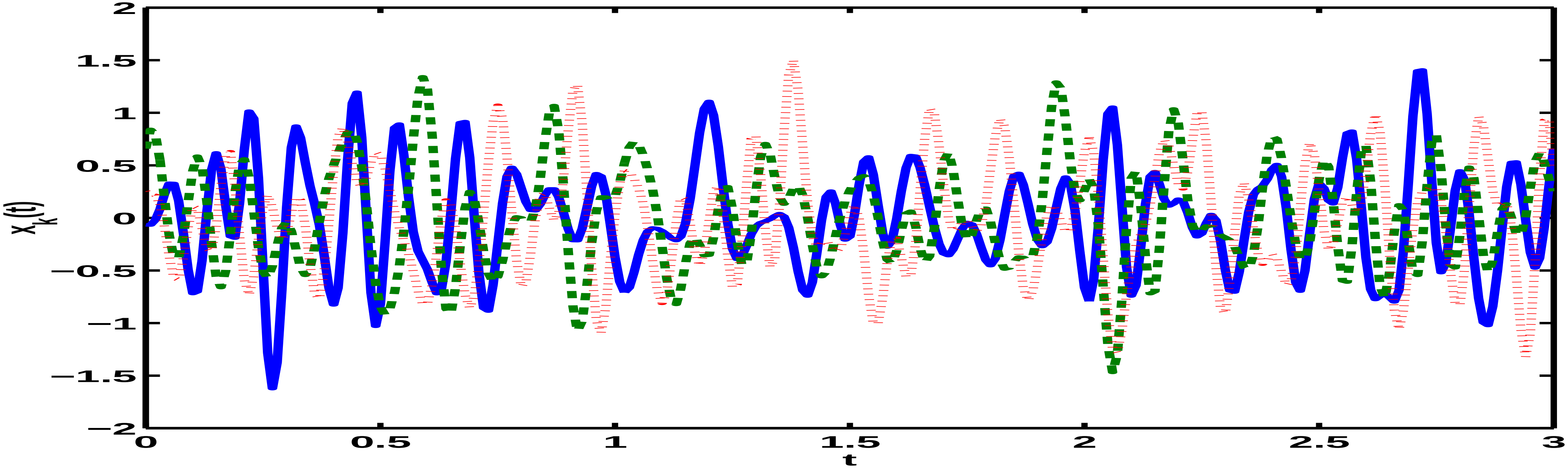


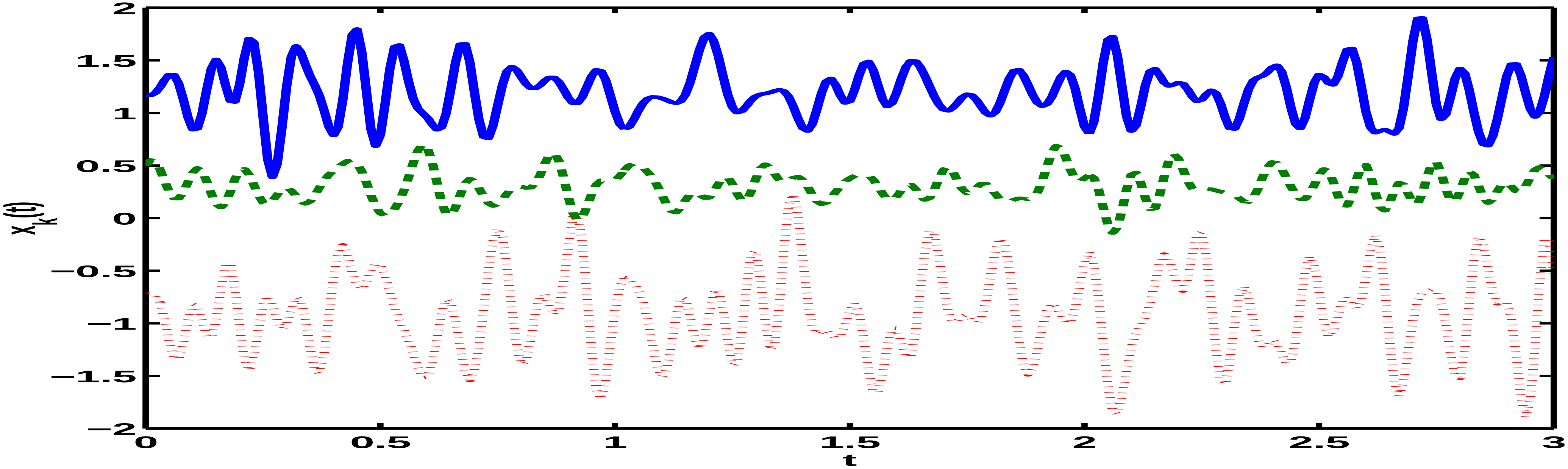


ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

nutnost mít k disposici mnoho realizací k jakémukoliv odhadu je trochu svazující. U ergodických náhodných procesů můžeme parametry odhadnout z jediné realizace.

Příklad stacionárního a ergodického a stacionárního, ale neergodického procesu:





Všechny **souborové odhady** můžeme nahradit **časovými odhady**, máme k disposici interval o délce T (pro spojité procesy) případně o počtu vzorků N (pro diskrétní). Jedinou realizaci, kterou máme k disposici, nazveme klasicky $x(t)$, resp. $x[n]$:

- pomocí histogramů můžeme stejným způsobem jako u souborových odhadů odhadnout distribuční funkci a funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti.
- střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka:

$$\hat{a} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad \hat{D} = \frac{1}{T}\int_0^T [x(t)-\hat{a}]^2 dt \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{D}}$$

$$\hat{a} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] \qquad \hat{D} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} [x[n]-\hat{a}]^2 \qquad \hat{\sigma} = \sqrt{\hat{D}}$$

- korelační funkce

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t+\tau)dt$$

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k]$$