Systémy s diskrétním časem

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

LTI systémy

v tomto kursu budeme pracovat pouze se systémy lineárními a časově invariantními. Úvod k nim jsme viděli již v přednášce "Systémy". Její závěr byl, že výstup systému popsaného **impulsní odezvou** $h[n]$ na libovolný vstup $x[n]$ dostaneme pomocí konvoluce:

$$y[n] = h[n] \star x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k].$$

Pro kauzální systémy, které "nevidí do budoucna" můžeme zjednodušit na:

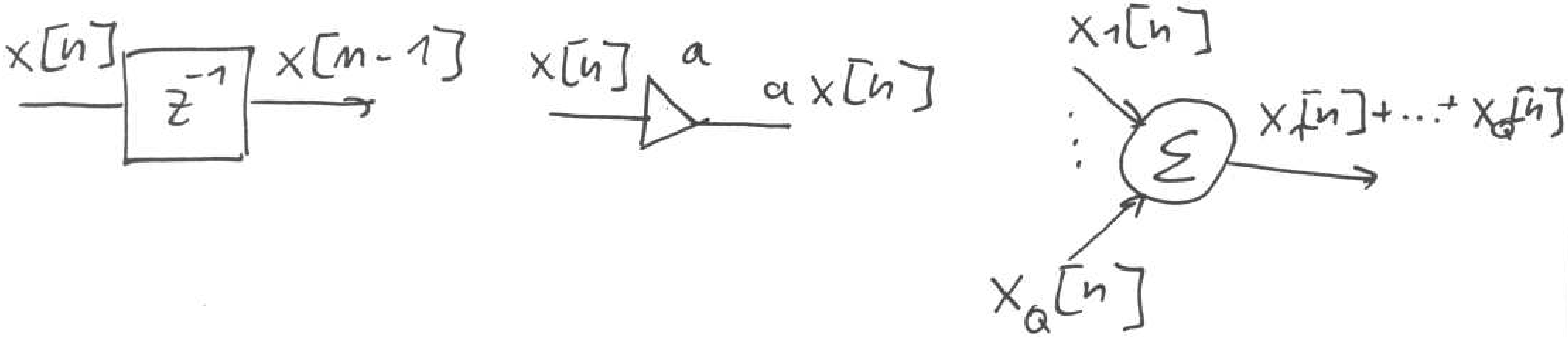
$$h[n] \star x[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

V této přednášce se budeme zabývat tím, jak se chovají diskrétní systémy ve frekvenci a jak je budeme implementovat.

Základní bloky systémů

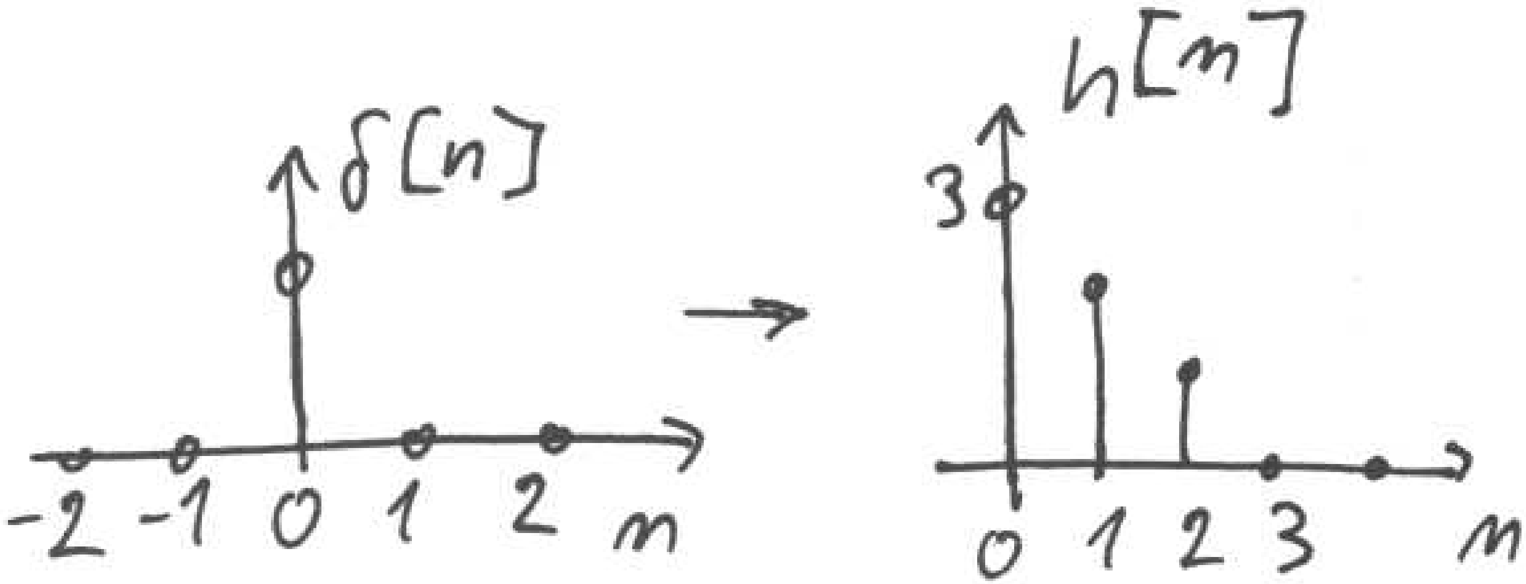
systém budeme značit krabičkou se vstupem $x[n]$ a výstupem $y[n]$, kde n je pořadové číslo vzorku (diskrétní čas).

Jejich základní bloky jsou jednoduché:

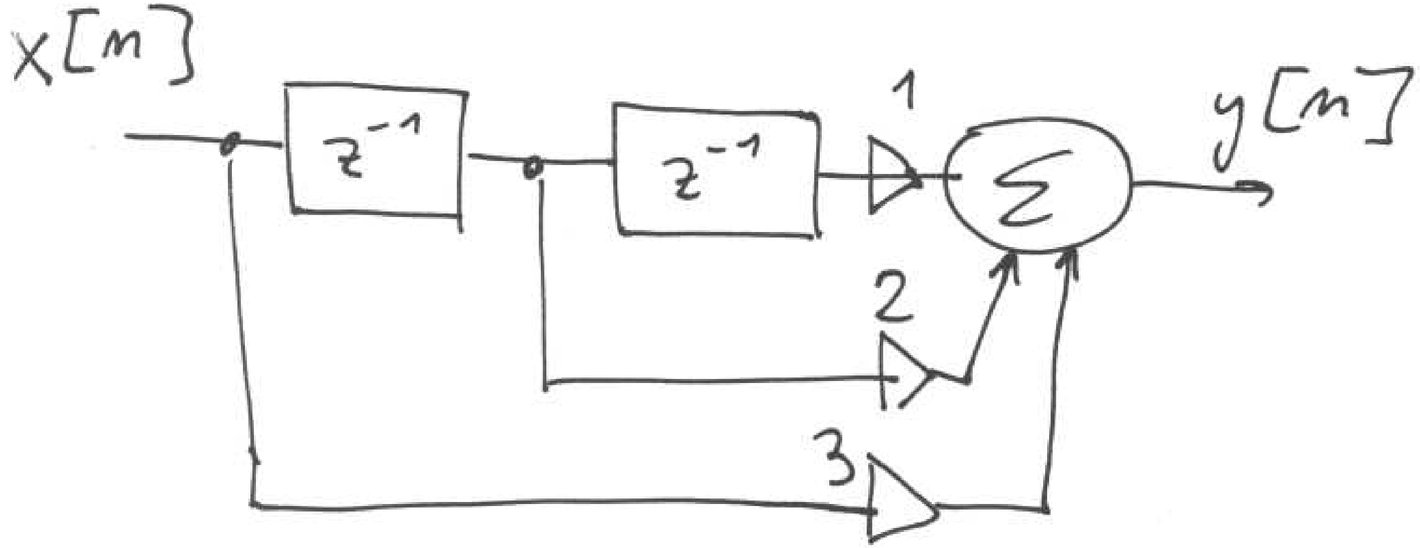


- zpožďovací článek zadrží vzorek na jednu vzorkovací periodu a teprve pak ho vydá. Pokud budete programovat, je to jedna paměťová buňka, kam vzorek při kroku n uložíte a teprve při kroku $n+1$ jej použijete. Značení z^{-1} bude vysvětleno později.
- násobička násobí vzorek koeficientem.
- sčítačka sčítá...

Systém z přednášky "systémy", který měl impulsní odezvu



můžeme postavit takto:



a snadno ověříme, že má správnou impulsní odezvu. Můžeme ověřit i jeho reakci na signál

$$x[n] = \begin{cases} 2 & \text{pro} \quad n = -1 \\ -1 & \text{pro} \quad n = 0 \\ 1 & \text{pro} \quad n = +1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Kmitočtová charakteristika systému

LTI systémy pro nás budou nejčastěji **filtry**, které budou mít za úkol nějakým způsobem upravit spektrum signálu. Podobně jako jsme to udělali u systémů se spojitým časem, pro studium frekvenčního chování systému mu na vstup předložíme komplexní exponenciálu:

$$x[n] = e^{j\omega_1 n},$$

s normovanou kruhovou frekvencí ω_1 a budeme sledovat výstup systému. Dosadíme do konvoluční sumy a upravíme:

$$y[n] = h[n] \star x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{j\omega_1(n-k)} = e^{j\omega_1 n}\sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_1 k},$$

zjistíme, že se nám na výstupu objevil stejný signál, ovšem násobený funkcí své kruhové frekvence a impulsní odezvy. Označíme tuto funkci:

$$H(e^{j\omega_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega_1 k}$$

a můžeme psát:

$$y[n] = x[n]H(e^{j\omega_1})$$

opět se jedná pouze o změnu "tloušťky" a "předtočení" komplexní exponenciály. Obdobně jako u systémů se spojitým časem můžeme označit číslo $H(e^{j\omega_1})$ **přenos** nebo **činitel přenosu** a pokud jej vyjádříme pro libovolnou (normovanou!) frekvenci, dostaneme **(komplexní) kmitočtovou charakteristiku**:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}$$

Zjišťujeme, že tato kmitočtová charakteristika je **DTFT-obrazem** impulsní odezvy!

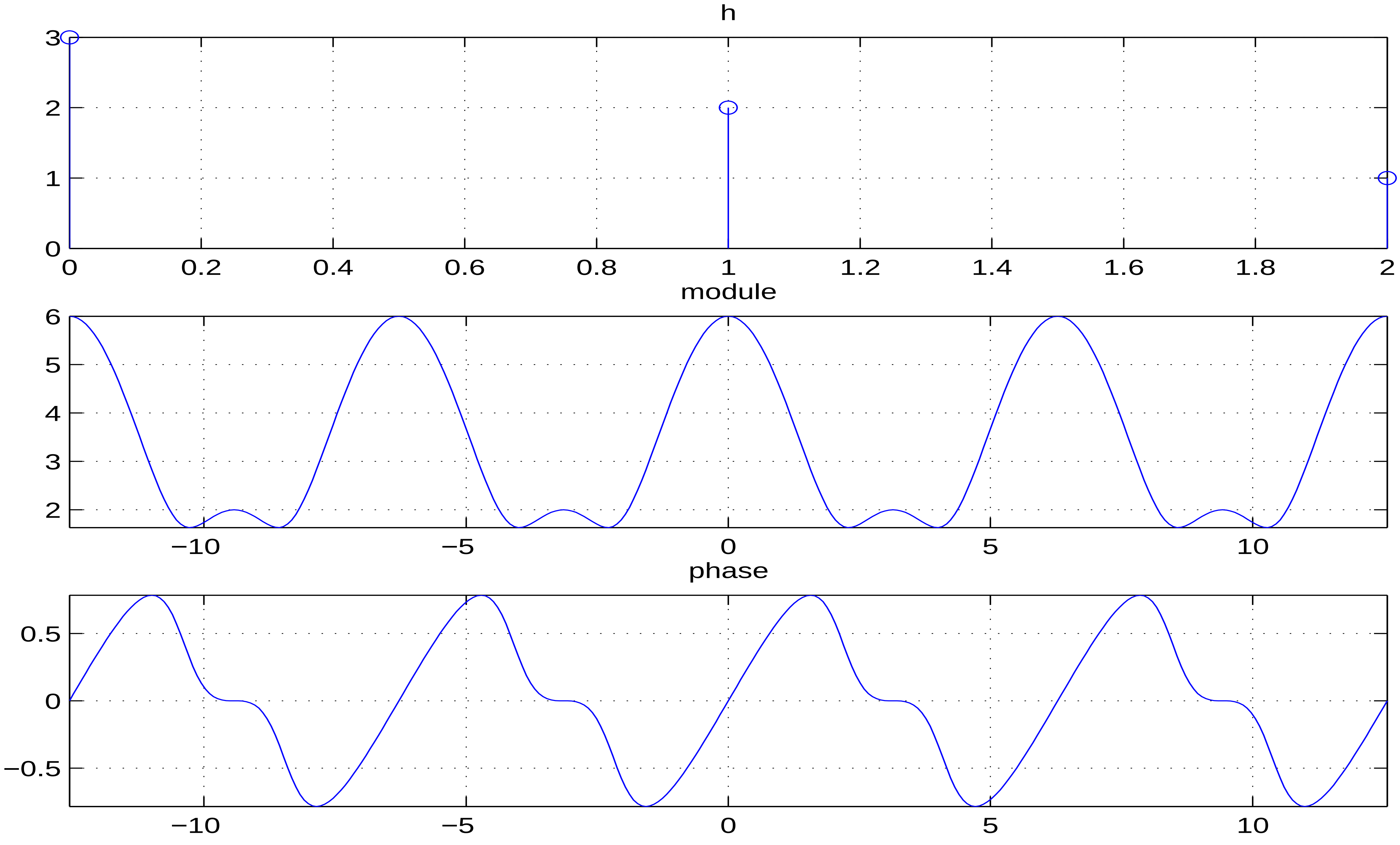
$$h[n] \stackrel{DTFT}{\longrightarrow} H(e^{j\omega})$$

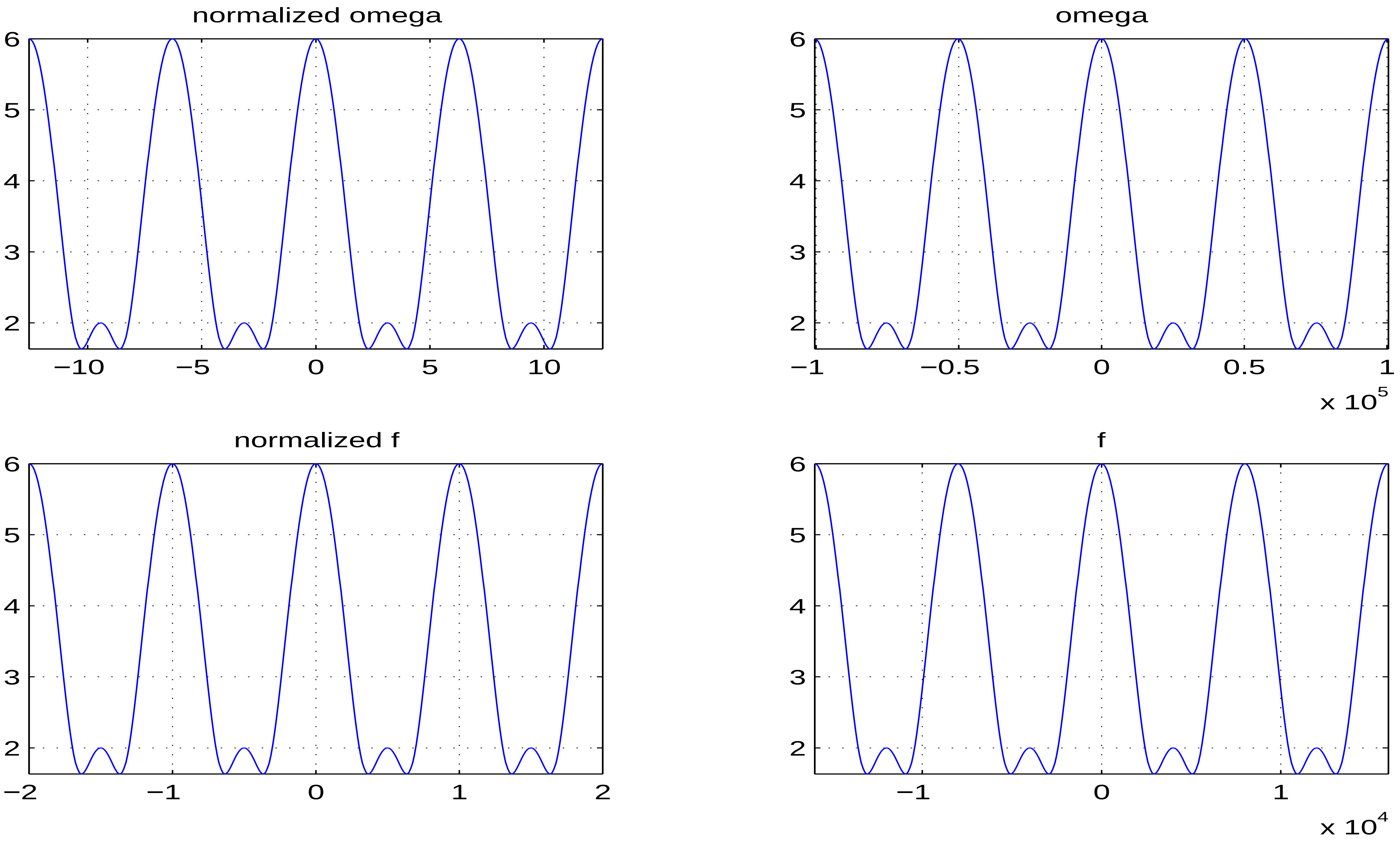
Musí mít zákonitě její vlastnosti:

- periodicita spektra (i impulsní odezva je diskrétní signál!) – správně bychom měli $H(e^{j\omega})$ značit s tildou $\tilde{H}(e^{j\omega})$:
  - v normovaných kruhových frekvencích: 2π rad
  - v obyčejných kruhových frekvencích: $2\pi F_s$ rad/s
  - v normovaných frekvencích: 1
  - v obyčejných frekvencích: F_s Hz
- symetrie:

$$H(e^{j\omega}) = H^{\star}(e^{-j\omega})$$

Příklad: kmitočtová charakteristika pro impulsní odezvu 3 2 1. Pro ukázku skutečných frekvencí je použita $F_s = 8000$ Hz.


h
3
2
1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
module
6
5
4
3
2
−10
−5
0
5
10
phase
0.5
0
−0.5
−10
−5
0
5
10


normalized omega
omega
normalized f
f
6
5
4
3
2
−10
−5
0
5
10
−1
−0.5
0
0.5
1
x 10^5
−2
−1
0
1
2
−1
0
1
x 10^4

Odezva systému na harmonický signál

$$x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 n} + \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 n}$$

Jednotlivé komponenty jsou násobeny hodnotami komplexní kmitočtové charakteristiky $H(e^{j\omega_1})$ a $H(e^{-j\omega_1})$, ty jsou ale komplexně sdružené, takže:

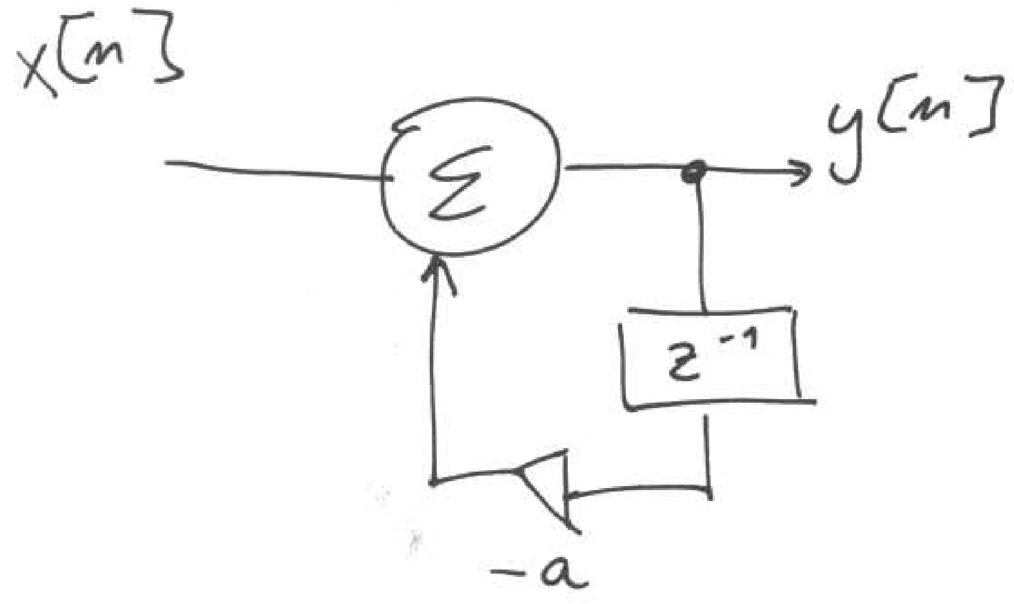
$$y[n] = H(e^{j\omega_1}) \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 n} + H^\star(e^{j\omega_1}) \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 n} =$$

$$= C_1 |H(e^{j\omega_1})| \cos(\omega_1 n + \phi_1 + \arg H(e^{j\omega_1}))$$

Nerekurzivní a rekurzivní systémy

V předcházejícím případu jsme viděli filtr, který pracuje pouze s aktuálním a zpožděnými vzorky vstupu. Jeho impulsní odezva je **konečná** (když projede jednotkový impuls všemi zpožděními, "je pryč" a na výstupu filtru je 0) - **finite impulse response – FIR**. Takovým filtrům říkáme **nerekurzivní**.

V **rekurzivních** filtrech využíváme zpožděné vzorky výstupu a přivádíme je zpět (zpětná vazba), např:



Tento filtr má impulsní odezvu:

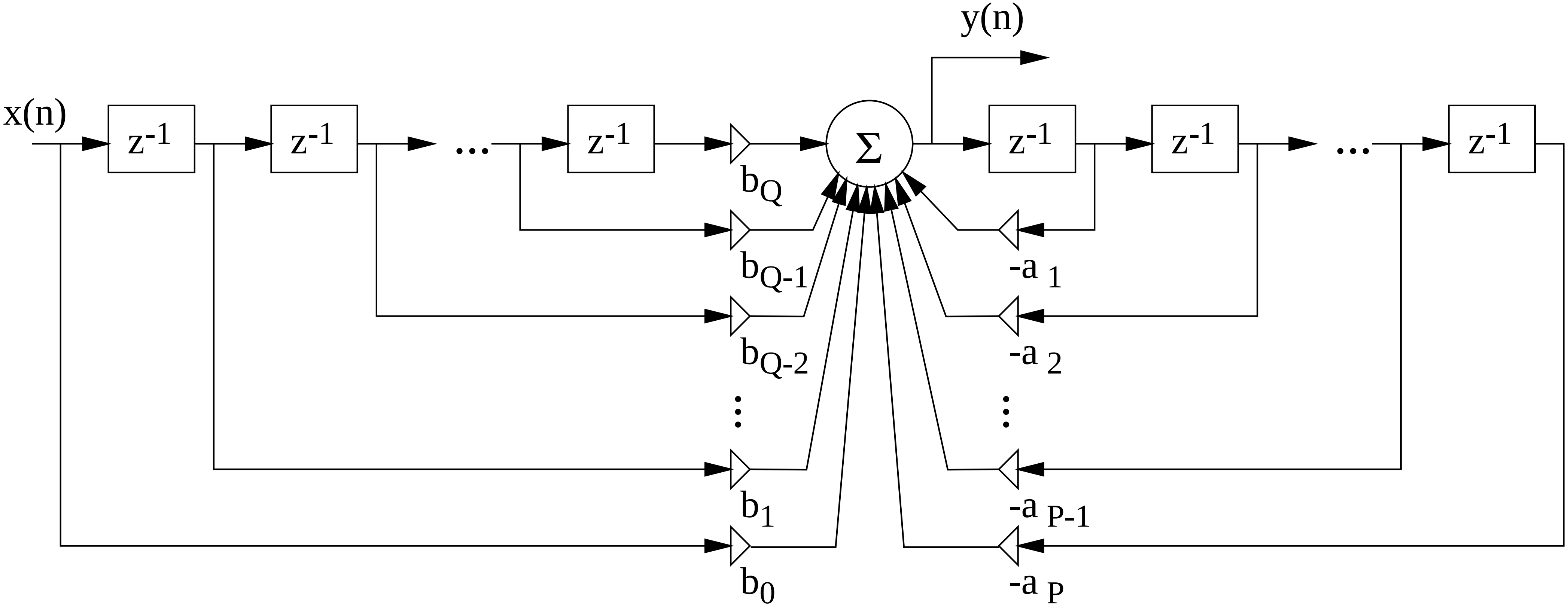
$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; n < 0 \\ 1 \quad -a \quad (-a)^2 \quad (-a)^3 \ldots & \text{pro} \;\; n = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

neboli:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{pro} \;\; n < 0 \\ (-a)^n & \text{pro} \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

Impulsní odezva je **nekonečná - infinite impulse response – IIR**. Tento filtr byl čistě rekurzivní (se vstupem se nic nedělo).

Obecně rekurzivní filtr



Výstup filtru lze zapsat **diferenční rovnicí**:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k], \tag{1}$$

kde $x[n-k]$ jsou aktuální a zpožděné verze vstupu a $y[n-k]$ jsou zpožděné verze výstupu.

typy filtrů ještě jednou:

- **FIR** – nerekurzivní: jen $b_0 \dots b_Q$ nenulové. Impulsní odezva je dána přímo koeficienty filtru:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{pro } n < 0 \text{ a pro } n > Q \\ b_n & \text{pro } 0 \leq n \leq Q \end{cases}$$

- **IIR** – čistě rekurzivní: jen $b_0, a_1 \dots a_P$ nenulové.
- **IIR** – obecně rekurzivní: a_i i b_i nenulové.

Pomocí diferenční rovnice se dá filtr přímo implementovat – viz `filtr.c`.

Z diferenční rovnice se ovšem těžko dá přímo poznat chování filtru ve frekvenční oblasti (především pro rekurzivní filtry) a těžko také vyšetříme jeho *stabilitu*. Pomůžeme si tzv z-transformací

z-TRANSFORMACE

nám, podobně jako u spojitých systémů Laplaceova transformace, pomůže popsat diskrétní signály a systémy pomocí funkcí komplexní proměnné z. z-transformace je definována:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n},$$

kde z je komplexní proměnná. z-transformaci nějakého signálu si můžeme představit (hm hm) jako "komplexní funkci plazící se nad komplexní rovinou". Budeme značit:

$$x[n] \xrightarrow{\mathcal{Z}} X(z)$$

zpětnou transformaci

$$X(z) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} x[n]$$

(vztah pro zpětnou ZT nebudeme potřebovat).

Naštěstí nebudeme ve skutečnosti žádné z-transformace počítat, budeme využívat jen následující 3 vlastnosti:

1. **Linearita**:

$$x_1[n] \longrightarrow X_1(z)$$

$$x_2[n] \longrightarrow X_2(z)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \longrightarrow aX_1(z) + bX_2(z)$$

2. **Zpoždění signálu**:

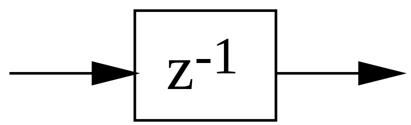
$$x[n] \longrightarrow X(z)$$

$$x[n-k] \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n-k} = z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = z^{-k}X(z)$$

Nejzajímavější bude zpoždění o jeden vzorek:

$$x[n-1] \longrightarrow z^{-1}X(z)$$

Proto značíme zpoždění o 1 vzorek



3. **Vztah s DTFT**: Fourierova transformace s diskrétním časem počítá spektrum signálu s diskrétním časem:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

Všimněme si, že vztah je velmi podobný vztahu pro ZT, pokud za z dosadíme $e^{j\omega}$:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(z)|_{z=e^{j\omega}},$$

kde ω je normovaná kruhová frekvence. Můžeme říci, že DTFT signálu "přečte" z-transformaci signálu po jednotkové kružnici $e^{j\omega}$. Jeden oběh jednotkové kružnice odpovídá periodě 2π, další důkaz toho, že DTFT bude periodická...

Přenosová funkce obecně rekurzivního systému

Pro systém

budeme **přenosovou funkci** definovat jako

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Pro systém se vstupní částí (koeficienty b_i) a výstupní částí (koeficienty a_i) odvodíme přenosovou funkci tak, že budeme z-transformovat diferenční rovnici. ZT je lineární, takže použijeme koeficienty stejným způsobem, uvědomíme si jen, že místo zpožděného signálu $x[n-k]$ musíme psát $z^{-k}X(z)$, podobně pro $y[n]$.

$$y[n] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k] \longrightarrow Y(z) = \sum_{k=0}^{Q} b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{P} a_k Y(z) z^{-k}$$

Pokud převedeme $\sum_{k=1}^{P} a_k Y(z) z^{-k}$ na levou stranu, dostaneme:

$$Y(z) + \sum_{k=1}^{P} a_k Y(z) z^{-k} = \sum_{k=0}^{Q} b_k X(z) z^{-k}$$

a můžeme vypočítat přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)},$$

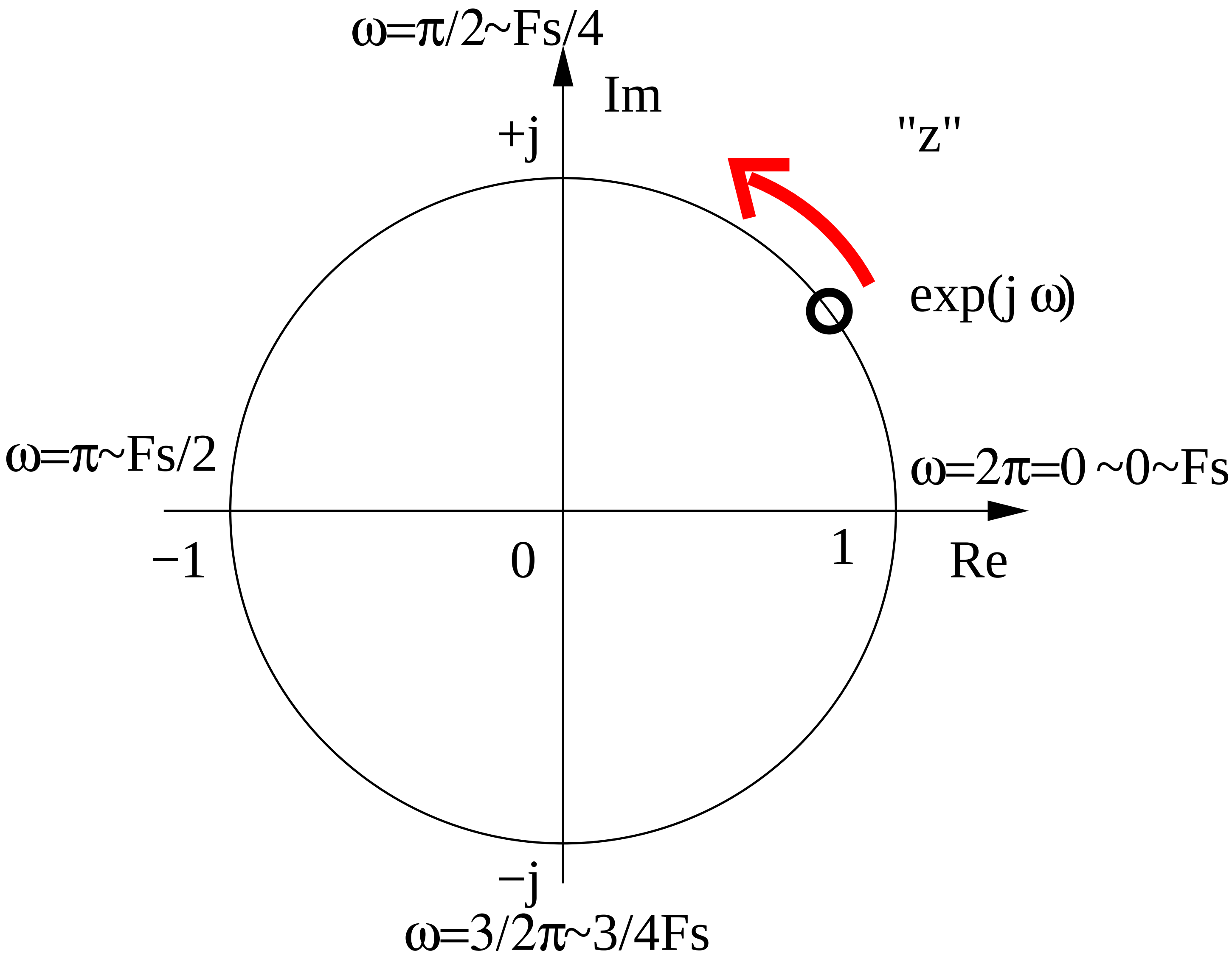
kde $B(z)$ a $A(z)$ jsou dva polynomy. Koeficient polynomu jmenovatele a_0 musí být "povinně" roven 1, ve filtru se fyzicky nevyskytuje, je to vlastně matematické vyjádření toho, že filtr má výstupní vzorek. Už také zřejmě chápeme, proč se ve schématu filtru (a v diferenční rovnici) vyskytovaly koeficienty a_k se znaménky '-': aby nám vyšly oba polynomy podobně.

Kmitočtová charakteristika filtru

se spočítá skutečně jednoduše – nahradíme z funkcí $e^{j\omega}$ a necháme ω měnit v intervalu, který nás zajímá – nejčastěji od 0 do π (odpovídá polovině vzorkovací frekvence):

$$H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{Q} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{P} a_k e^{-j\omega k}}$$

...rovnice vypadá nepěkně, ale Matlab s komplexními čísly pomůže: funkci `freqz(b,a,N)` stačí zadat vektor `b` s koeficienty polynomu v čitateli, vektor `a` s koeficienty polynomu ve jmenovateli, a počet bodů (od 0 do poloviny vzorkovací frekvence).


ω=π/2~Fs/4
Im
+j
"z"
exp(j ω)
ω=π~Fs/2
ω=2π=0 ~0~Fs
−1
0
1
Re
−j
ω=3/2π~3/4Fs

Nuly a póly přenosové funkce a co s nimi...

Přenosovou funkci $H(z)$ můžeme zapsat také pomocí součinů:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_Q z^{-Q}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_P z^{-P}} = \frac{z^{-Q}(b_0 z^Q + b_1 z^{Q-1} + \ldots + b_Q)}{z^{-P}(z^P + a_1 z^{P-1} + \ldots + a_P)} =$$

$$= b_0 \frac{z^{-Q}}{z^{-P}} \frac{\prod_{k=1}^{Q}(z - n_k)}{\prod_{k=1}^{P}(z - p_k)} = b_0 z^{P-Q} \frac{\prod_{k=1}^{Q}(z - n_k)}{\prod_{k=1}^{P}(z - p_k)},$$

- n_k jsou body v rovině z, pro které $B(z) = 0$. Pro tyto hodnoty bude funkce $H(z)$ nulová, nazývají se **nulové body** nebo **nuly**.
- p_k jsou body v rovině z, pro které $A(z) = 0$. Pro tyto hodnoty bude funkce $H(z)$ nekonečná (dělení nulou), nazývají se **póly**.

Pokud $a_k, b_k \in \Re$, pak póly p_k a nuly n_k mohou být buď reálné, nebo ve dvojicích komplexně sdružené. Pokud je řád čitatele a jmenovatele rozdílný, bude člen z^{P-Q} "odpovědný" za

- $(P-Q)$-násobnou nulu v počátku, pokud je řád jmenovatele P vyšší než řád čitatele Q.
- $(Q-P)$-násobný pól v počátku, pokud je řád jmenovatele P nižší než řád čitatele Q.

Stabilita

Systém je stabilní, pokud všechny póly leží *uvnitř jednotkové kružnice:*

$$|p_k| < 1$$

Průběh frekvenční charakteristiky z nul a pólů

Podobně jako pro spojité systémy se dá z poloh nul a pólů graficky určit průběh frekvenční charakteristiky $H(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 z^{-(Q-P)} \frac{\prod_{k=1}^{Q}(z-n_k)}{\prod_{k=1}^{P}(z-p_k)},\Big|_{z=e^{j\omega}} = b_0 e^{j\omega(P-Q)} \frac{\prod_{k=1}^{Q}(e^{j\omega}-n_k)}{\prod_{k=1}^{P}(e^{j\omega}-p_k)},$$

Pro dané $e^{j\omega}$ je každá závorka komplexním číslem, které si můžeme představit jako vektor od nuly nebo pólu do bodu $e^{j\omega}$. Abychom dostali hodnotu kmitočtové charakteristiky pro frekvenci ω,

- moduly všech čísel z čitatele násobíme. Argumenty přičítáme.
- moduly všech čísel ze jmenovatele dělíme. Argumenty odečítáme.

Člen $e^{j\omega(P-Q)}$ se projeví jen při rozdílných řádech čitatele a jmenovatele, v tomto případě přidáváme jednu nebo několik nul nebo pólů do počátku – neovlivní modul, ale ovlivní argument kmitočtové charakteristiky.

PŘÍKLADY

Příklad 1. Nerekurzivní filtr má diferenční rovnici:

$$y[n] = x[n] + 0.5x[n-1]$$

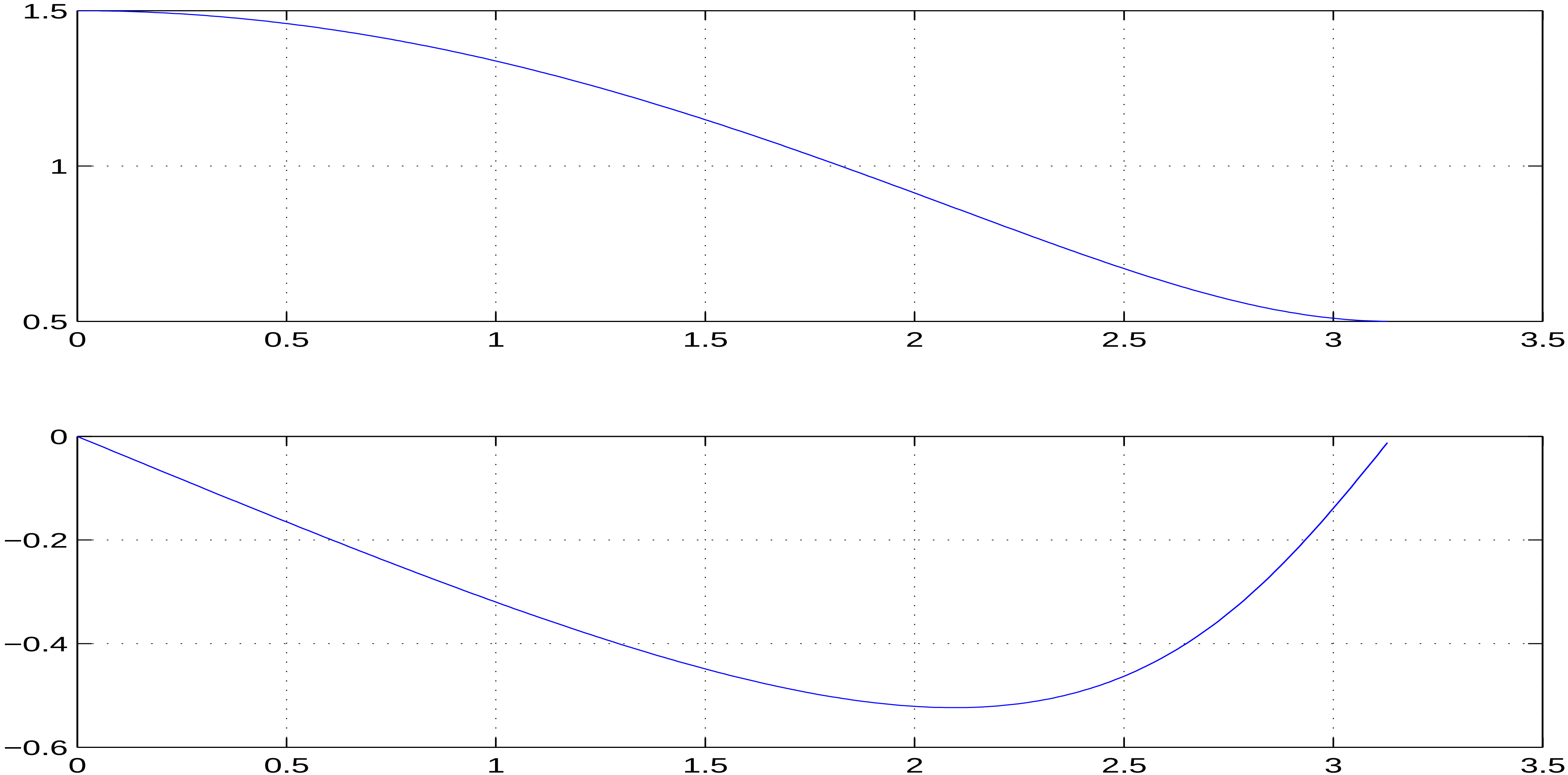
1. Určete jeho impulsní odezvu
2. Určete jeho přenosovou funkci (koeficienty a, b).
3. Vypočtěte kmitočtovou charakteristiku.
4. je filtr stabilní ?
5. zkuste určit ručně kmitočtovou charakteristiku pomocí nul a pólů.

Řešení

1. $h[n] = 1,\ 0.5$ pro $n = 0, 1$, nula jinde.
2. $Y(z) = X(z) + 0.5X(z)z^{-1} \qquad Y(z) = X(z)[1 + 0.5z^{-1}]$
   $H(z) = 1 + 0.5z^{-1} = \frac{1+0.5z^{-1}}{1}$, takže $b_0 = 1$, $b_1 = 0.5$, $a_0 = 1$.

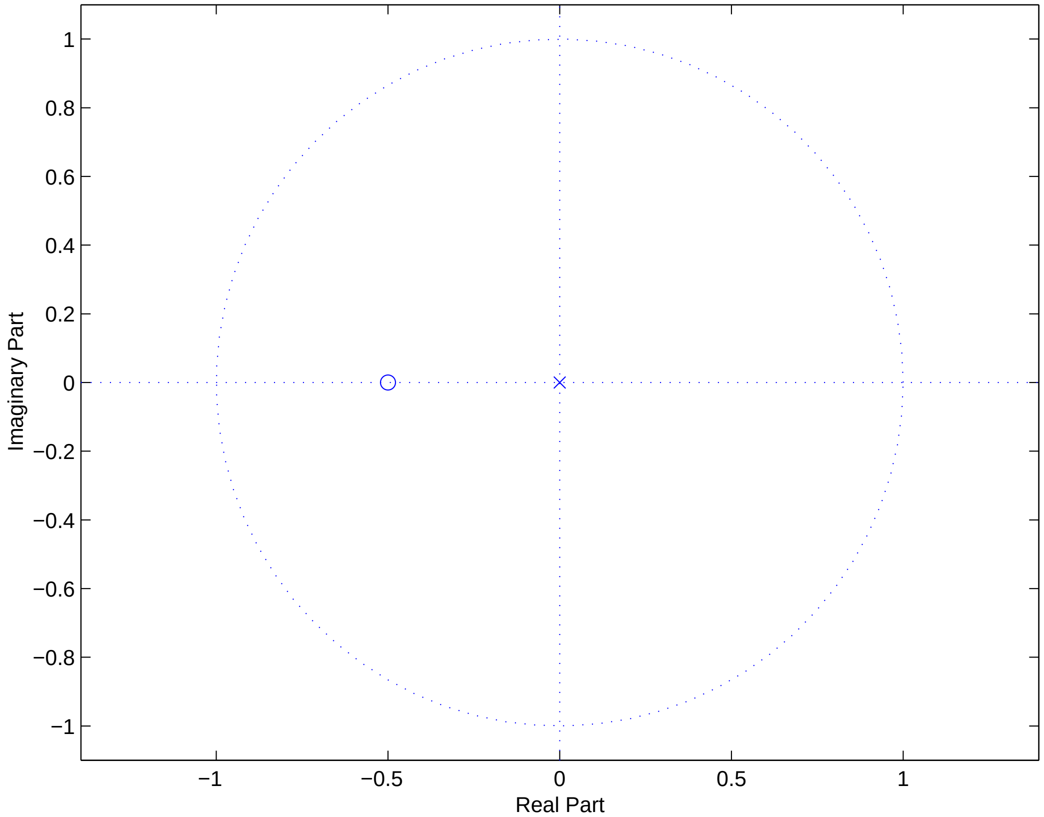
3. Nahradili bychom $z = e^{j\omega}$, ale raději zavoláme

```
H=freqz([1 0.5],[1],256); om=(0:255)/256 * pi;
subplot(211); plot(om,abs(H)); grid
subplot(212); plot(om,angle(H)); grid
```



$\Rightarrow$filtr má charakter dolní propusti

4. nulové body a póly: $H(z) = \frac{1+0.5z^{-1}}{1} = \frac{z(1+0.5z^{-1})}{z} = \frac{z+0.5}{z}$ Čitatel bude nula pro $z = -0.5$, proto bude mít filtr jednu nulu $n_1 = -0.5$. Jmenovatel bude nula pro $z = 0$, proto bude mít filtr jeden pól: $p_1 = 0$



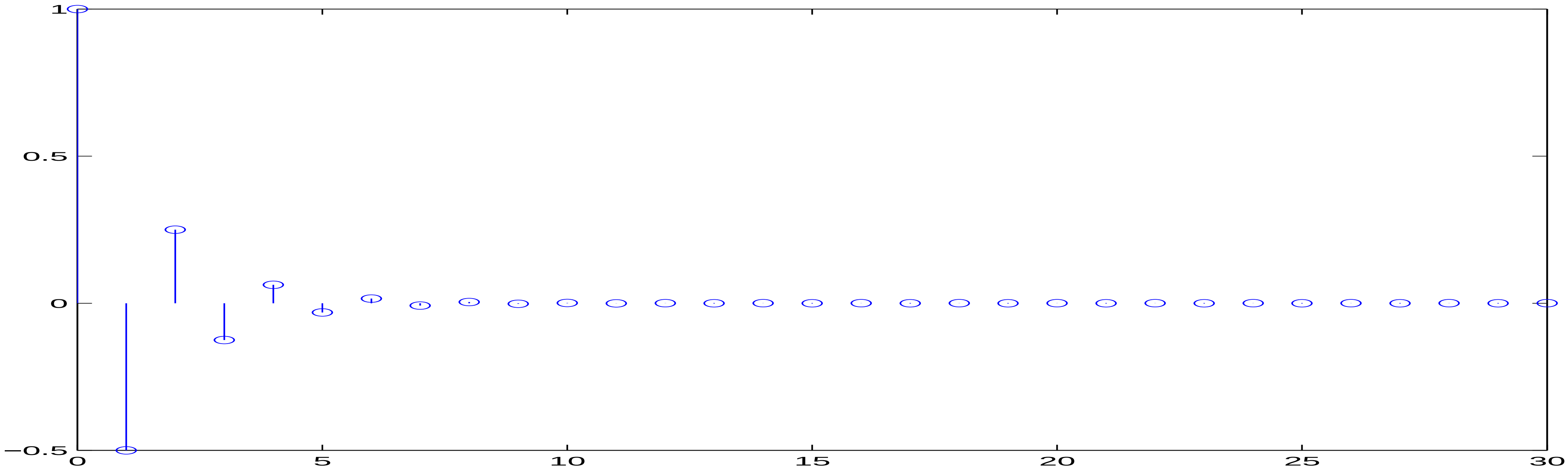
$\Rightarrow$filtr bude stabilní.

5. určení frekvenční charakteristiky pomocí nul a pólů:
$H(z) = \frac{z-(-0.5)}{z-0}$ $\quad H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}-(-0.5)}{e^{j\omega}-0}$

Příklad 2. Rekurzivní filtr má diferenční rovnici:

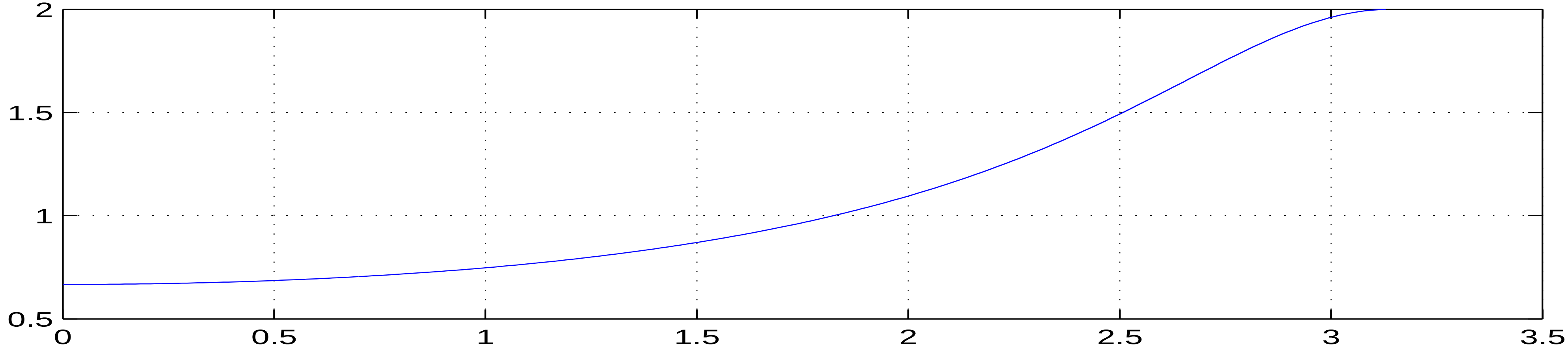
$$y[n] = x[n] - 0.5y[n-1]$$

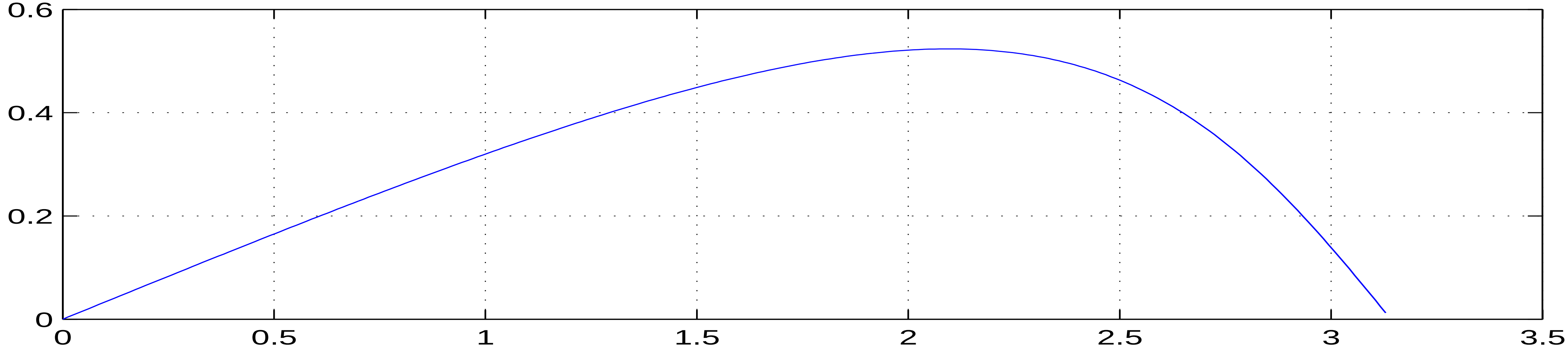
1. impulsní odezva bude nekonečná:



2. $Y(z) = X(z) - 0.5Y(z)z^{-1} \qquad Y(z)[1 + 0.5z^{-1}] = X(z) \qquad H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}$, takže $b_0 = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0.5$.

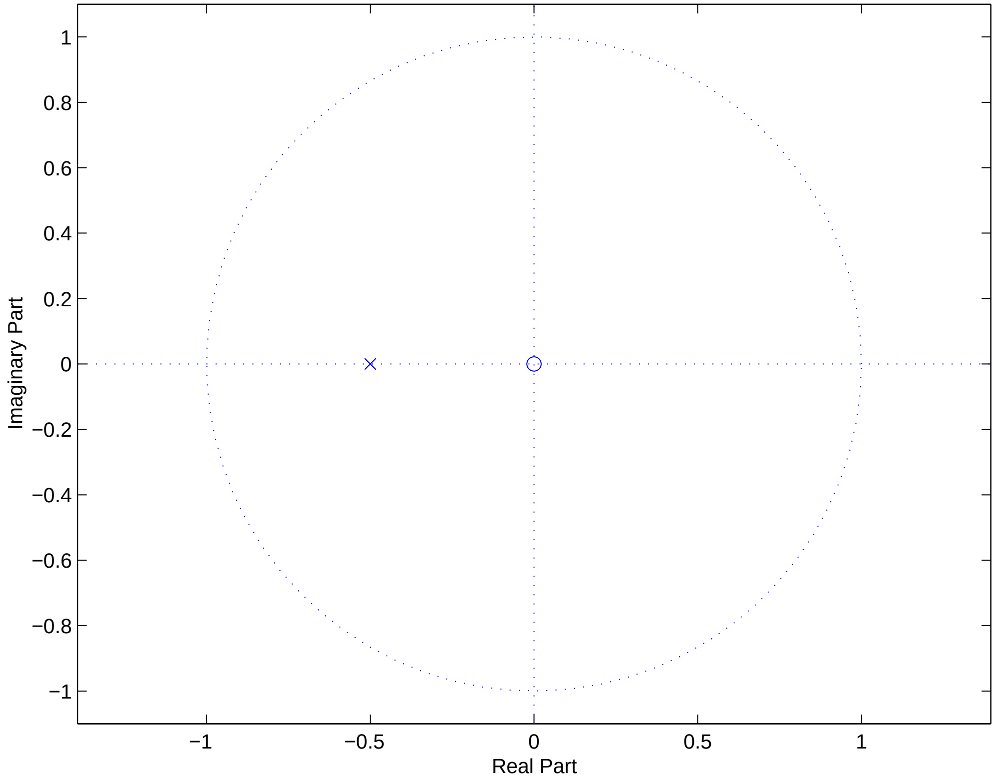
3. `H=freqz([1],[1 0.5],256); om=(0:255)/256 * pi;`
   ```
   subplot(211); plot(om,abs(H)); grid
   subplot(212); plot(om,angle(H)); grid
   ```





$\Rightarrow$filtr má charakter horní propusti

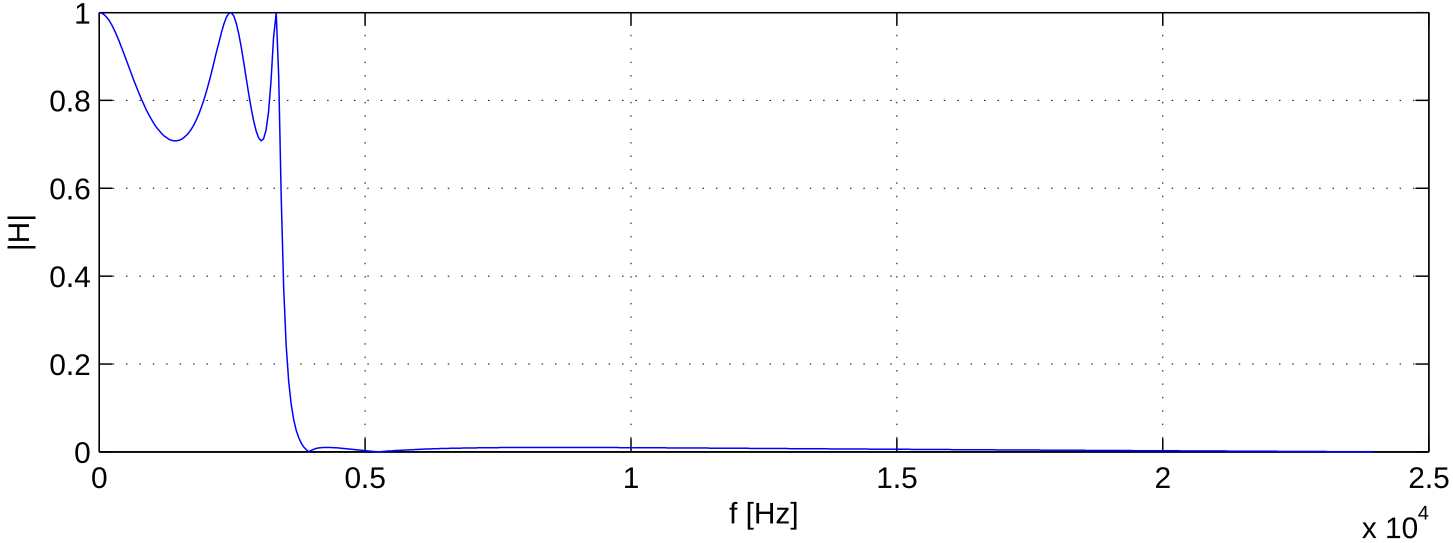
4. nulové body a póly: $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}} = \frac{z}{z(1+0.5z^{-1})} = \frac{z}{z+0.5}$ Čitatel bude nula pro $z = 0$, proto bude mít filtr jednu nulu $n_1 = 0$. Jmenovatel bude nula pro $z = -0.5$, proto bude mít filtr jeden pól: $p_1 = -0.5$

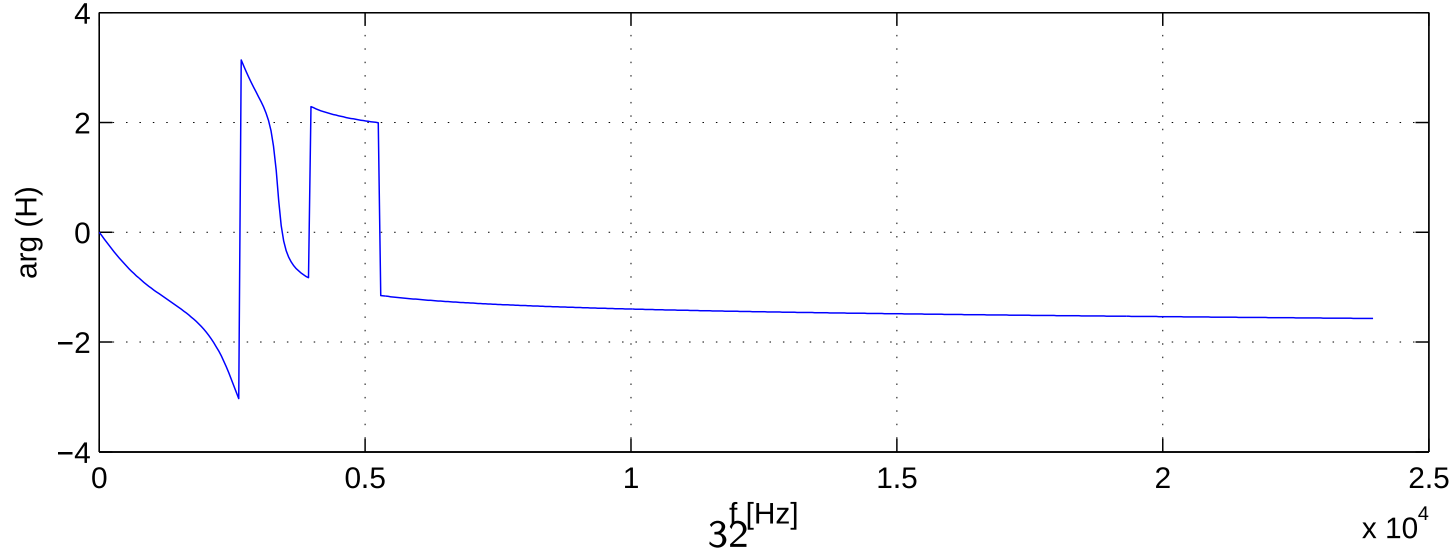


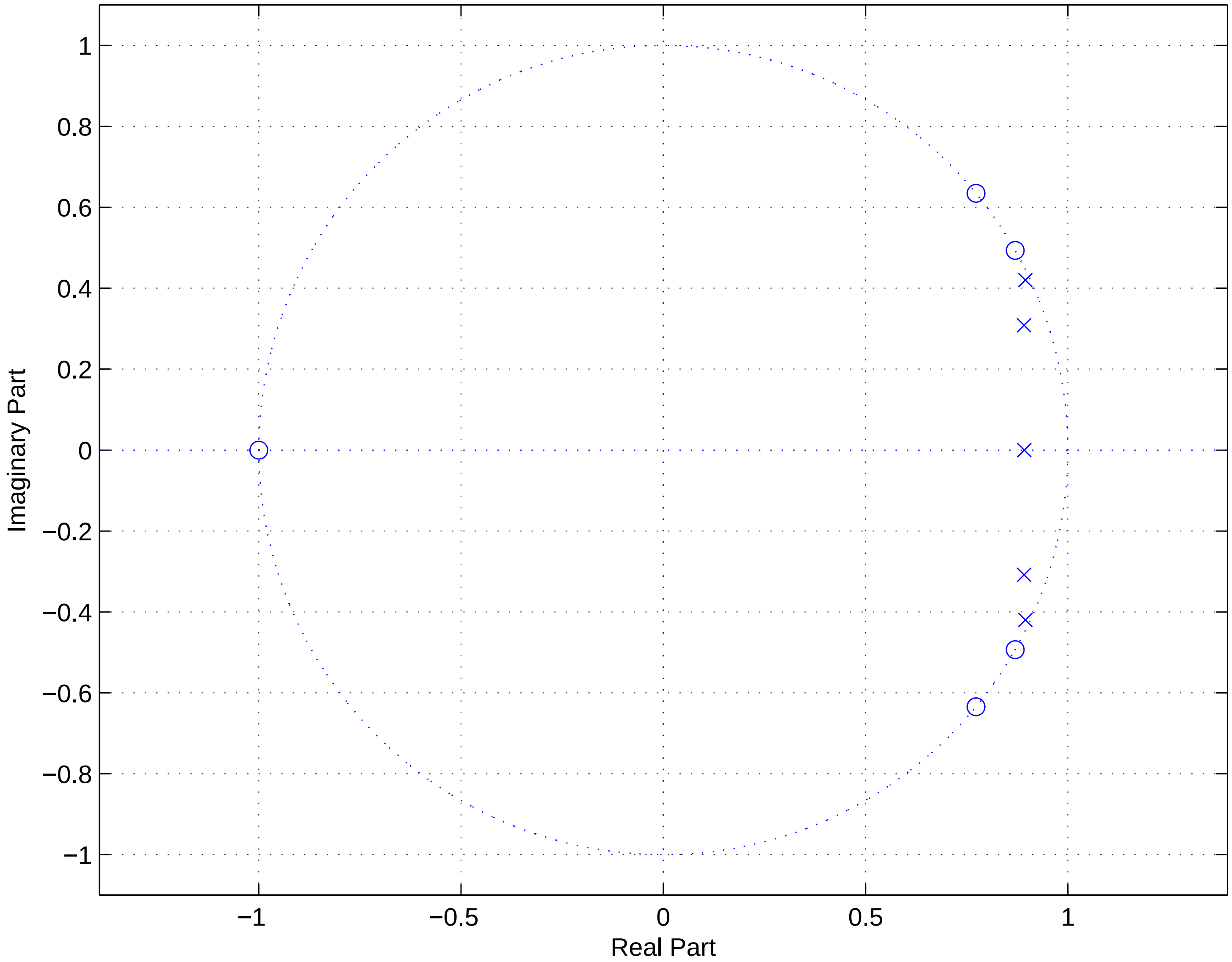
⇒filtr bude stabilní.

5. určení frekvenční charakteristiky pomocí nul a pólů:
   $H(z) = \frac{z-0}{z-(-0.5)} \qquad H(e^{j\omega}) = \frac{e^{j\omega}-0}{e^{j\omega}-(-0.5)}$

Dolní propusť - low pass

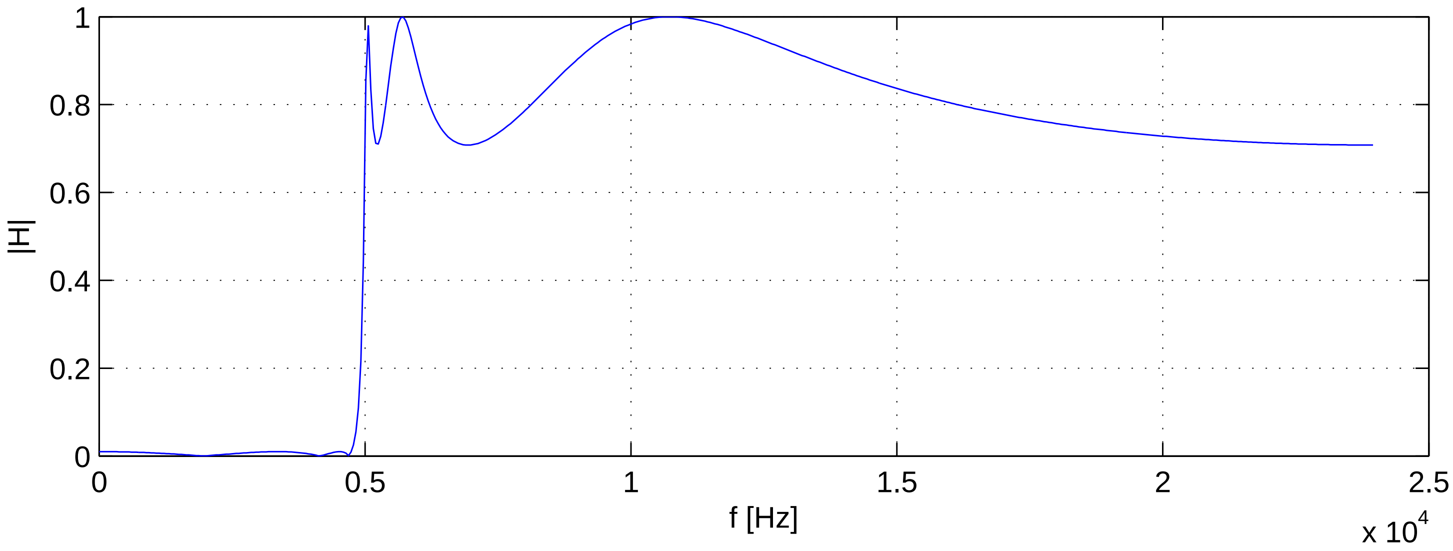


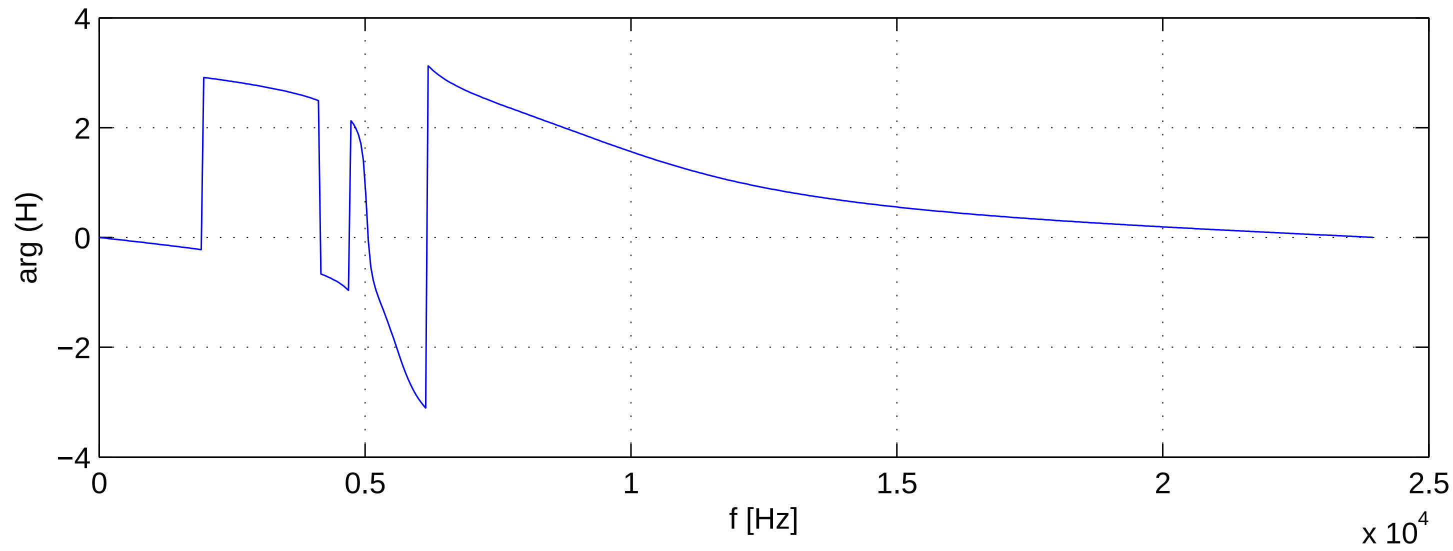


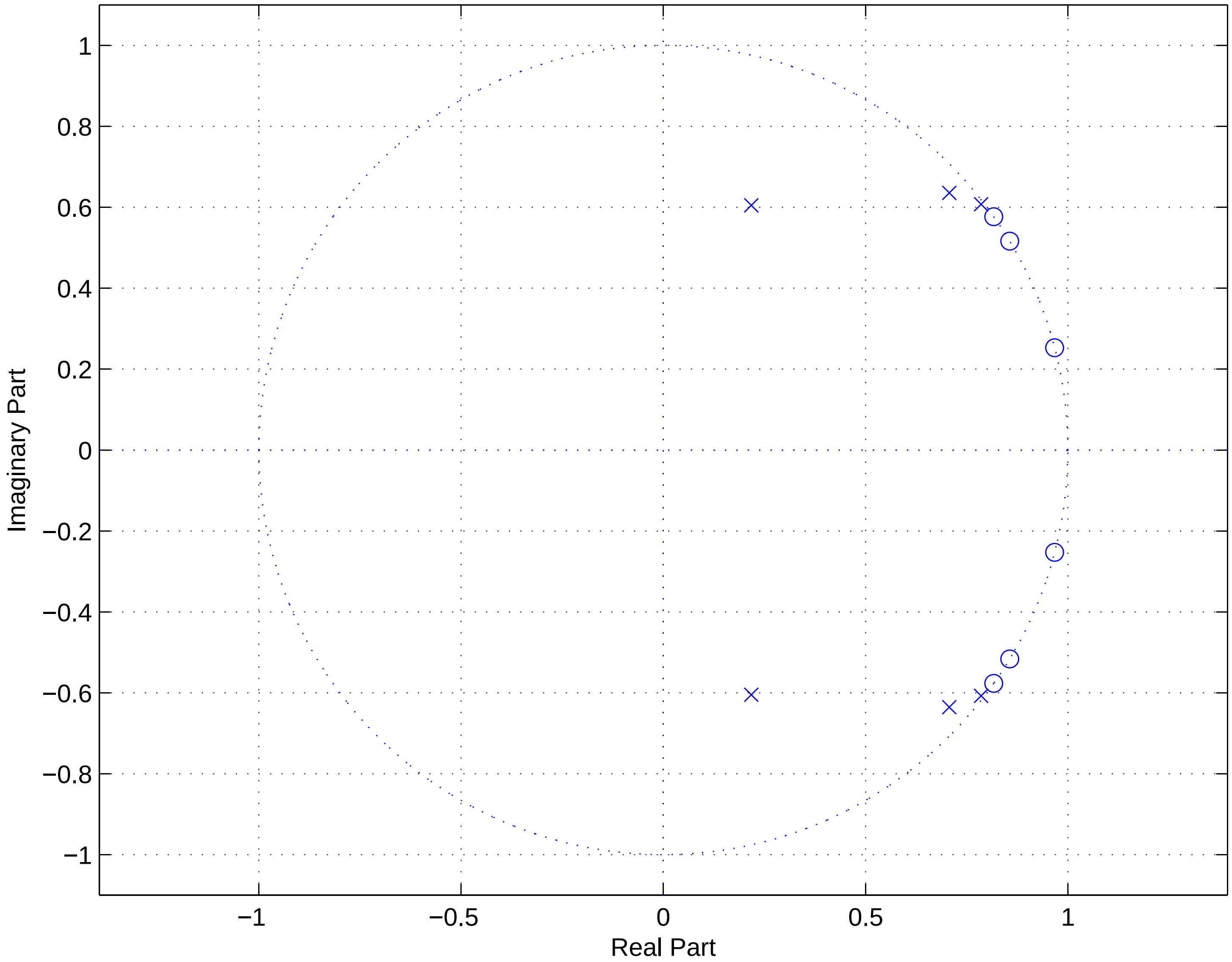


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
Imaginary Part
−1
−0.5
0
0.5
1
Real Part

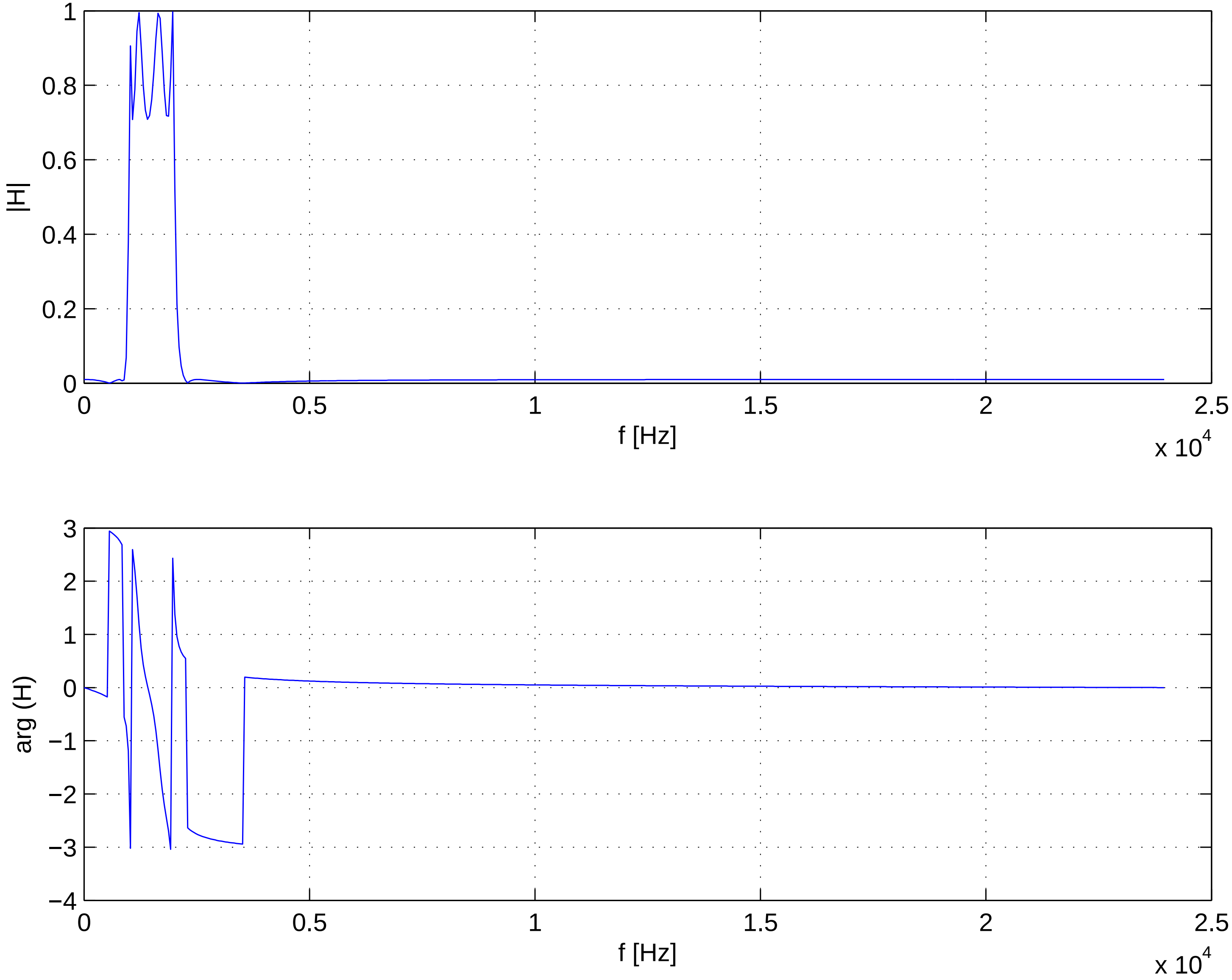
Horní propusť - high pass

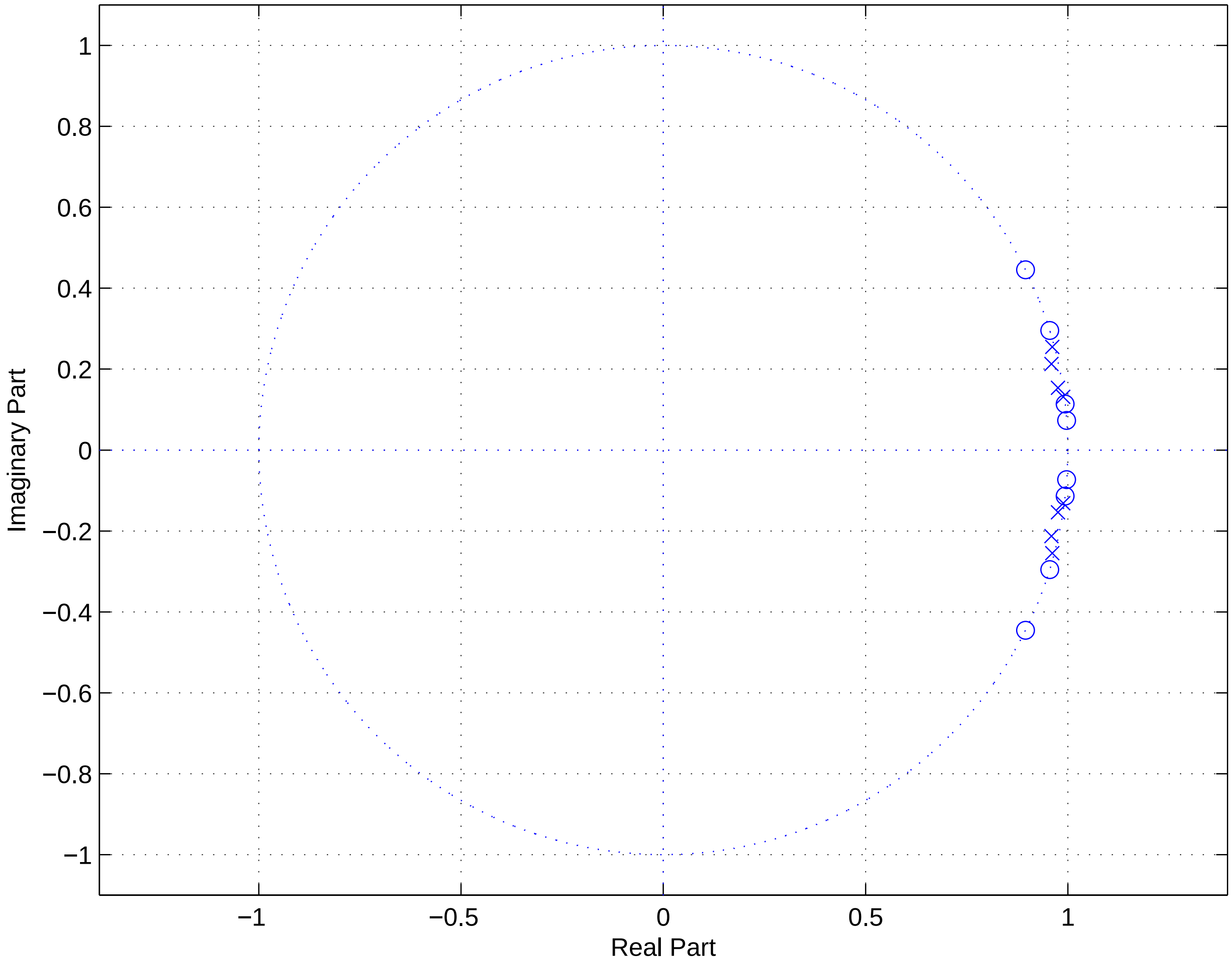




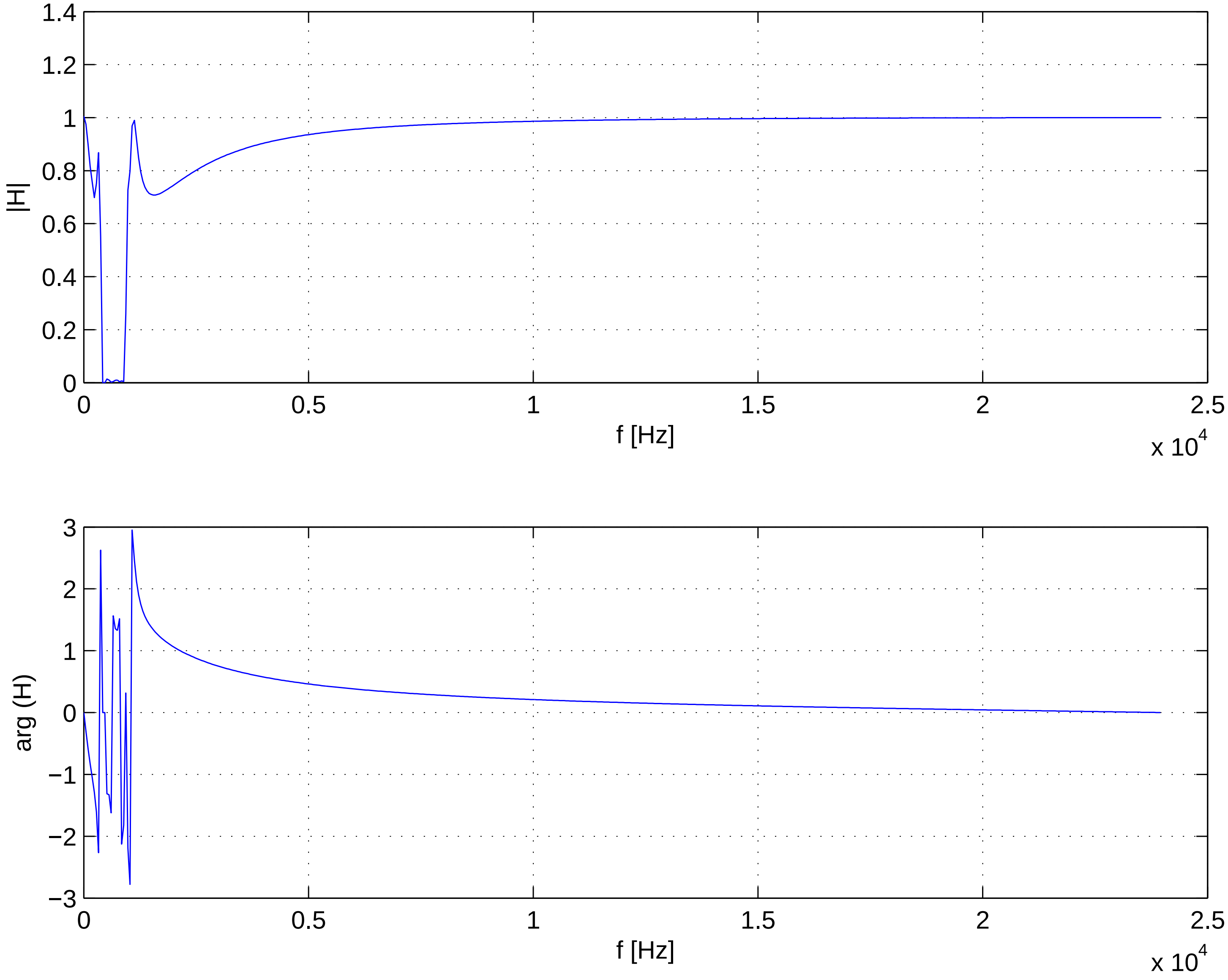

Imaginary Part
Real Part
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

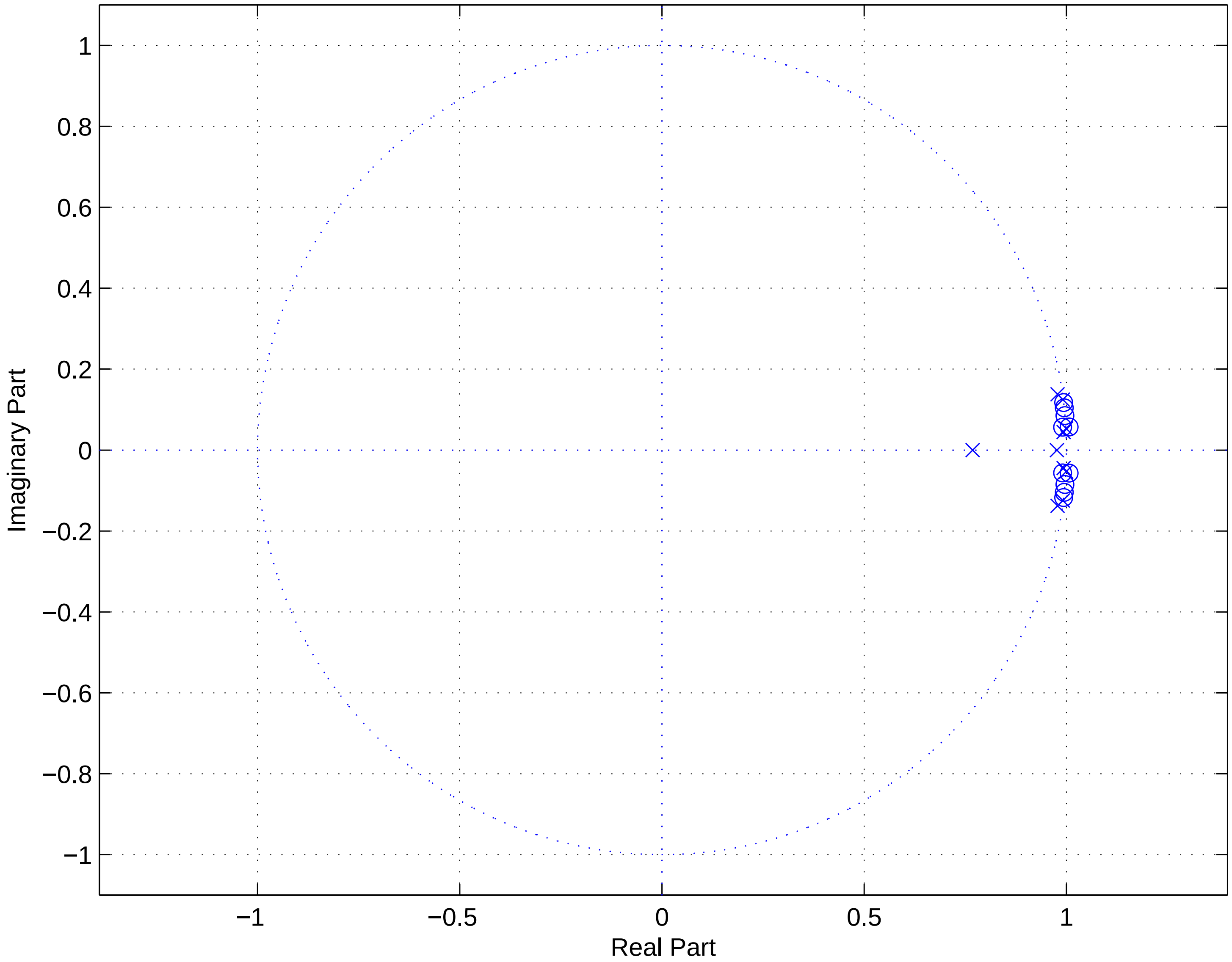
Pásmová propusť - band pass




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
Imaginary Part
−1
−0.5
0
0.5
1
Real Part

Pásmová zádrž - band stop




1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
Imaginary Part
−1
−0.5
0
0.5
1
Real Part