Diskrétní Fourierova transformace

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

Diskrétní Fourierova transformace

V DFŘ zbyl jediný problém: nekonečná délka signálu a nekonečná délka vypočteného spektra. Diskrétní Fourierova transformace transformuje posloupnost délky N na jinou posloupnost délky N – uvidíme, že se prakticky jedná o transformaci jedné periody na jednu periodu v DFŘ. K DFT se dostaneme těmito třemi kroky:

1. posloupnost $x[n]$ délky N periodizujeme: $\tilde{x}[n] = x[\mod_N(n)]$.
2. najdeme koeficienty DFŘ: $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Všimněme si, že bereme pouze jednu periodu periodizováno signálu $x[\mod_N(n)]$, proto nám stačí pracovat s původní posloupností $x[n]$. Krok 1. jsme učinili jen proto, abychom měli periodický signál a abychom mohli počítat DFŘ.
3. výslednou posloupnost omezíme okénkovou funkcí opět na délku N:

$$X[k] = R_N[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Většinou najdeme tento vzorec bez okénkové funkce a rozumí se, že budeme počítat jen vzorky $X[k]$ pro $k = [0, N-1]$:

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

$X[k]$ nazýváme DFT obraz, operaci značíme $x[n] \xrightarrow{DFT} X[k]$. Pro zpětnou DFT bychom stejným postupem (tedy periodizace spektra, inverzní DFŘ a omezení okénkem) dostali pro vzorky $n = [0, N-1]$:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn},}$$

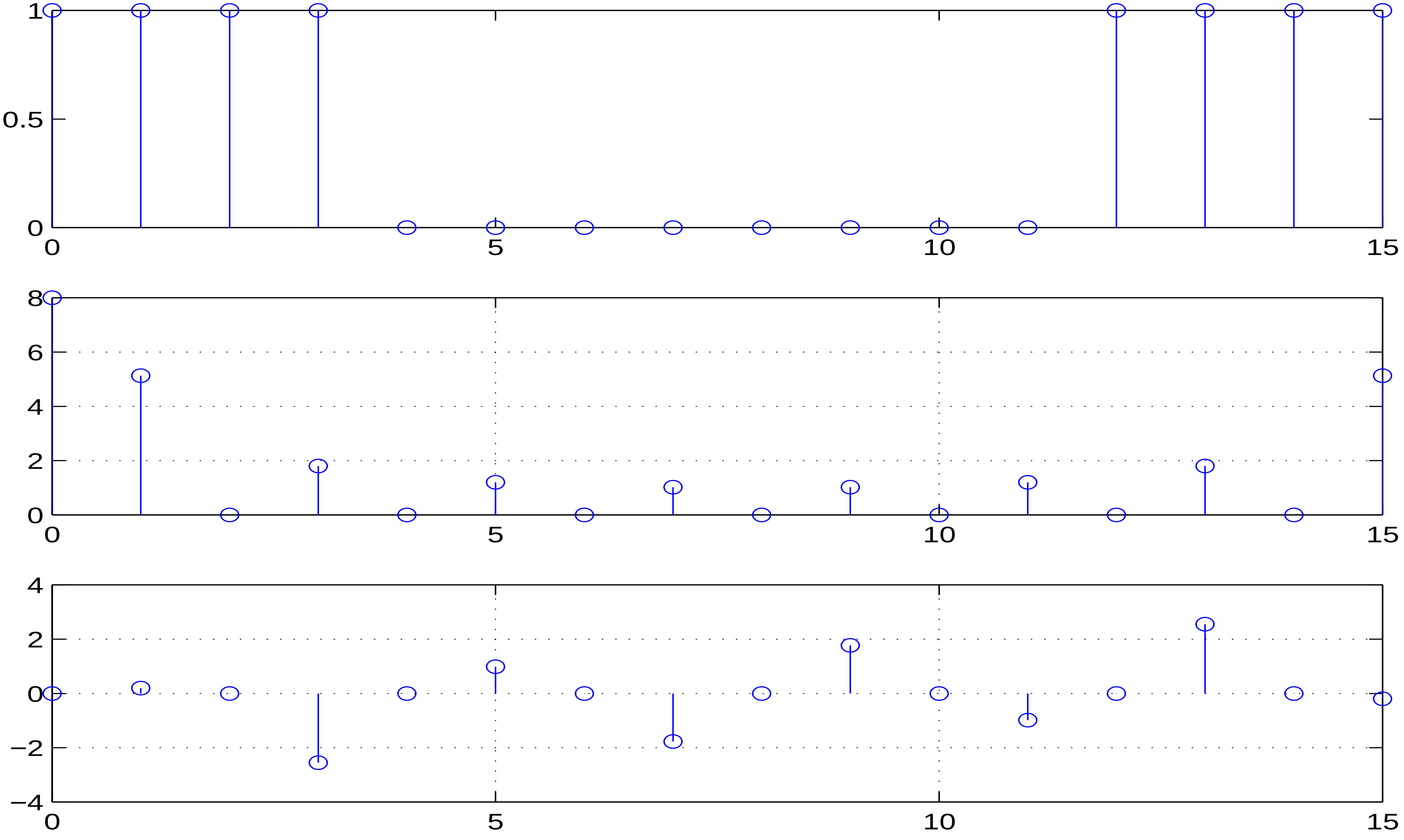
značíme $X[k] \xrightarrow{DFT^{-1}} x[n]$

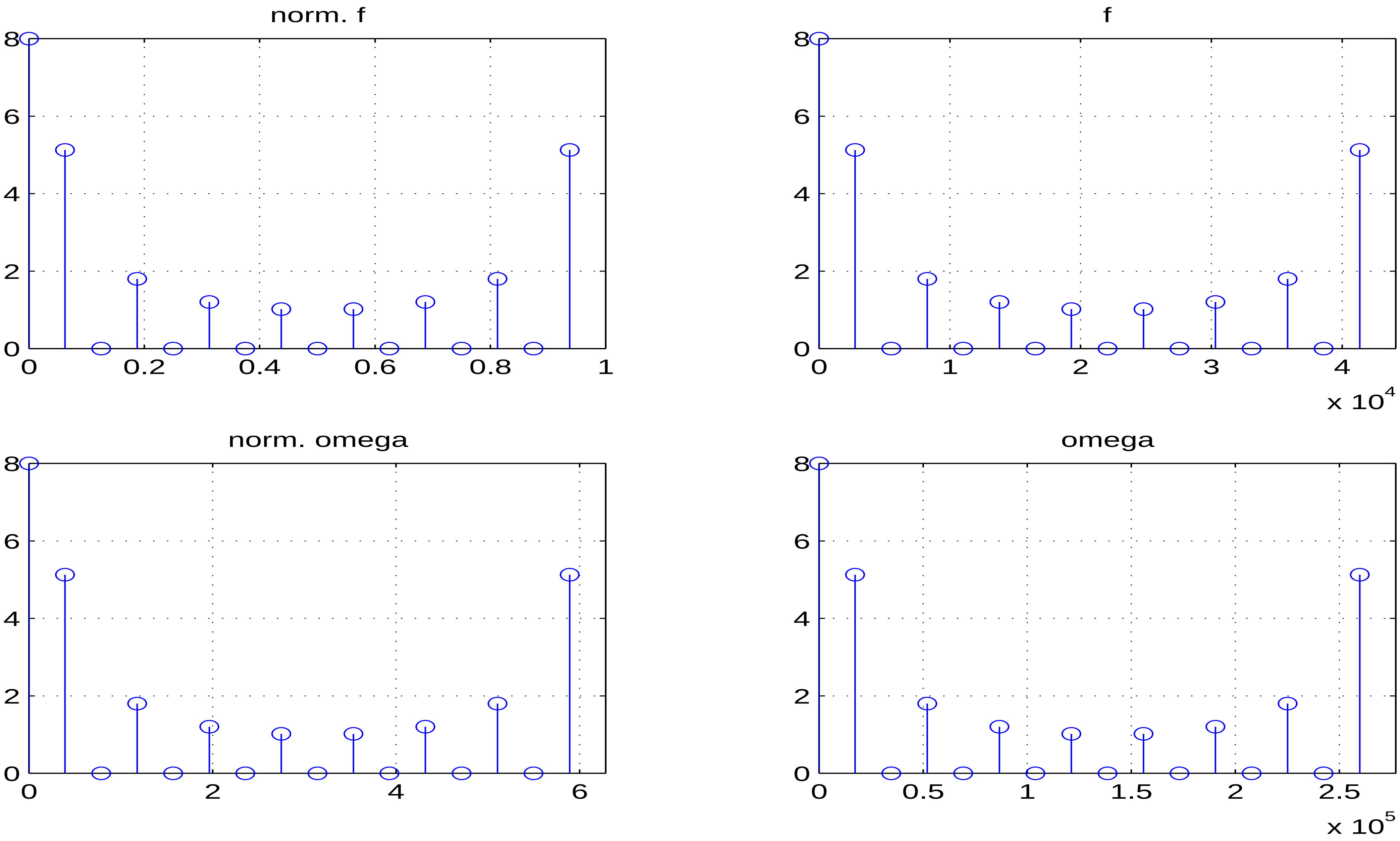
Frekvenční osa u DFT

N vzorků DFT je pravidelně rozmístěno od 0 až "skoro" do vzorkovací frekvence. Slovíčko "skoro" znamená:

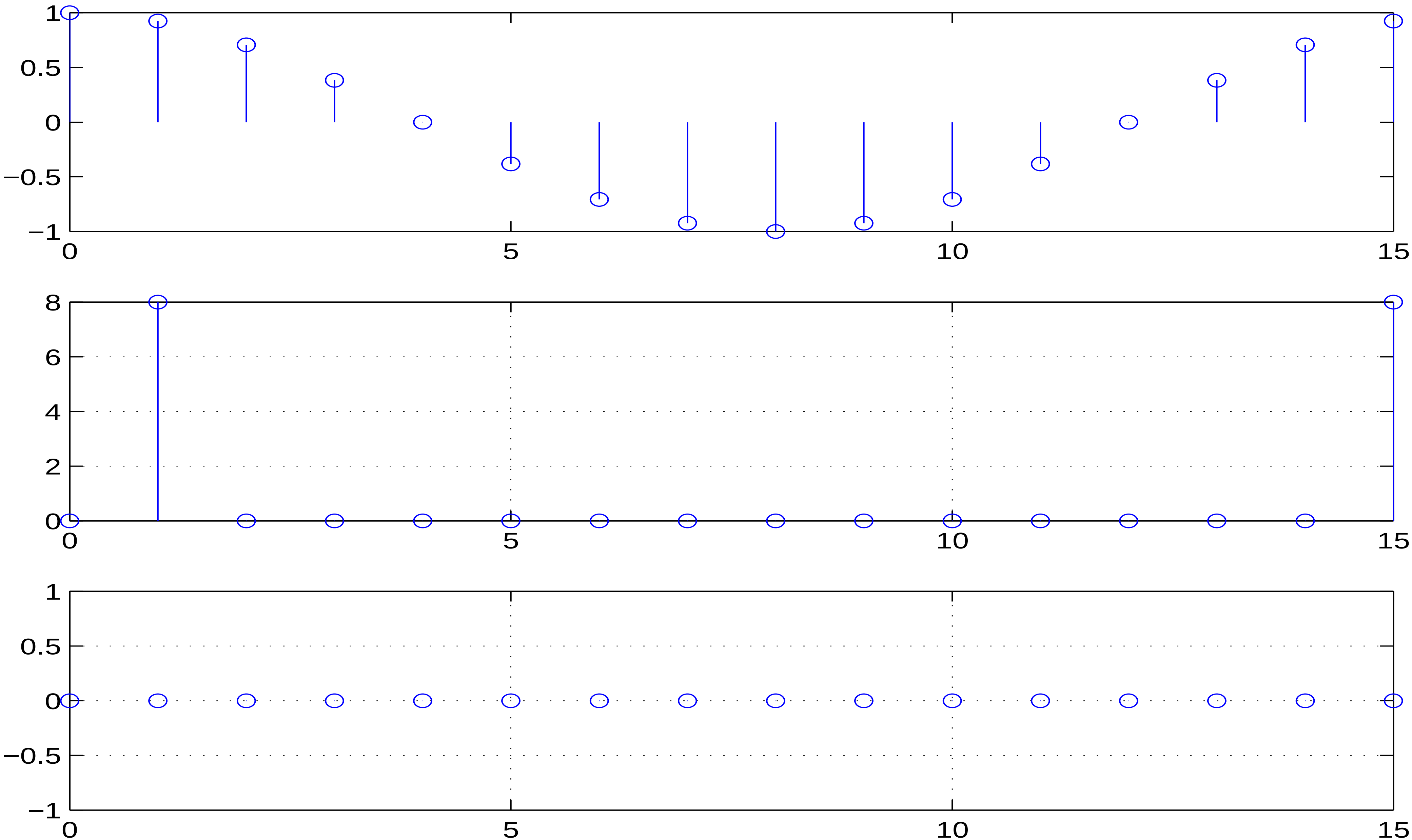
- vzorkovací frekvence by odpovídala hodnotě N.
- my máme ale N vzorků rozmístěných od 0 do $N-1$.
- proto budou pro vzorky $X[k]$:
  - normované frekvence $\frac{k}{N}$ do $\frac{N-1}{N}$.
  - normované kruhové frekvence $2\pi\frac{k}{N}$ do $2\pi\frac{N-1}{N}$
  - obyčejné frekvence $\frac{k}{N}F_s$ do $\frac{N-1}{N}F_s$
  - obyčejné kruhové frekvence $\frac{k}{N}2\pi F_s$ do $\frac{N-1}{N}2\pi F_s$

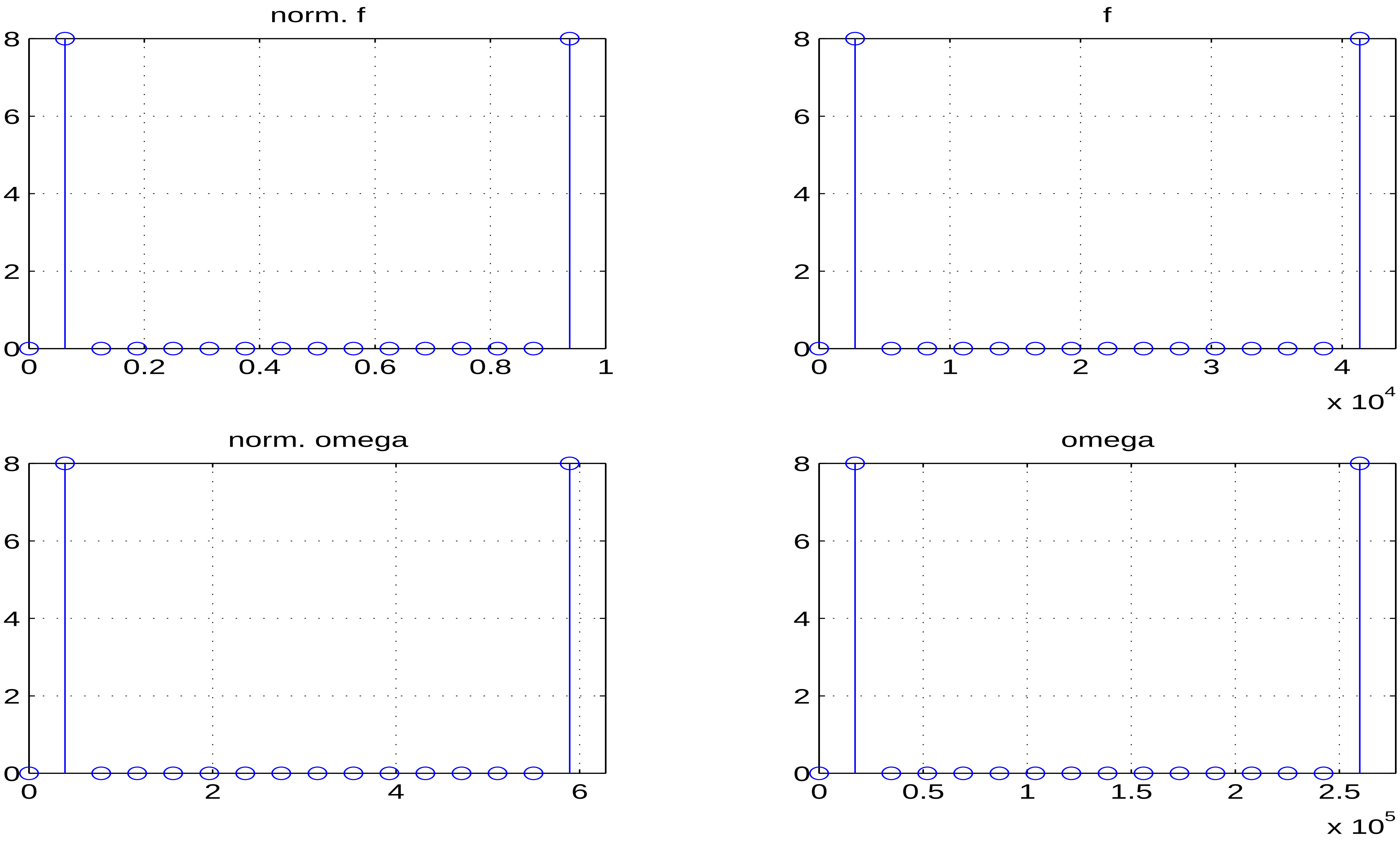
Příklad 1: $N = 16$, posunutý obdélník o délce 8, $F_s =$44100 Hz.




norm. f
0 2 4 6 8
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
f
0 2 4 6 8
0 1 2 3 4
x 10^4
norm. omega
0 2 4 6 8
0 2 4 6
omega
0 2 4 6 8
0 0.5 1 1.5 2 2.5
x 10^5

Příklad 2: 1 perioda harmonického signálu, $N = 16$, F_s =44100 Hz, $\omega_1 = \frac{2\pi}{16}$ rad




norm. f
f
x 10^4
norm. omega
omega
x 10^5

VLASTNOSTI DFT

Obraz reálné posloupnosti

podobně, jako jsme viděli u Fourierovy řady, je:

$$X[k] = X^\star[N-k]$$

- $X[0]$ by mělo být komplexně sdružené s $X[N]$, ale $X[N]$ už neexistuje. Vzpomeneme si, že podle definice DFT pro $k=0$ je $X[0]$ vlastně součtem jednotlivých vzorků, je to tedy až na dělení $\frac{1}{N}$ střední hodnota (stejnosměrná složka)
- Pokud je N sudé číslo, musí být:

$$X\left[\frac{N}{2}\right] = X^\star\left[N-\frac{N}{2}\right] = X^\star\left[\frac{N}{2}\right].$$

Číslo musí být komplexně sdruženo samo se sebou, musí tedy být reálné.

Ilustrace: předcházející dva příklady.

Linearita

$$x_1[n] \xrightarrow{DFT} X_1[k]$$

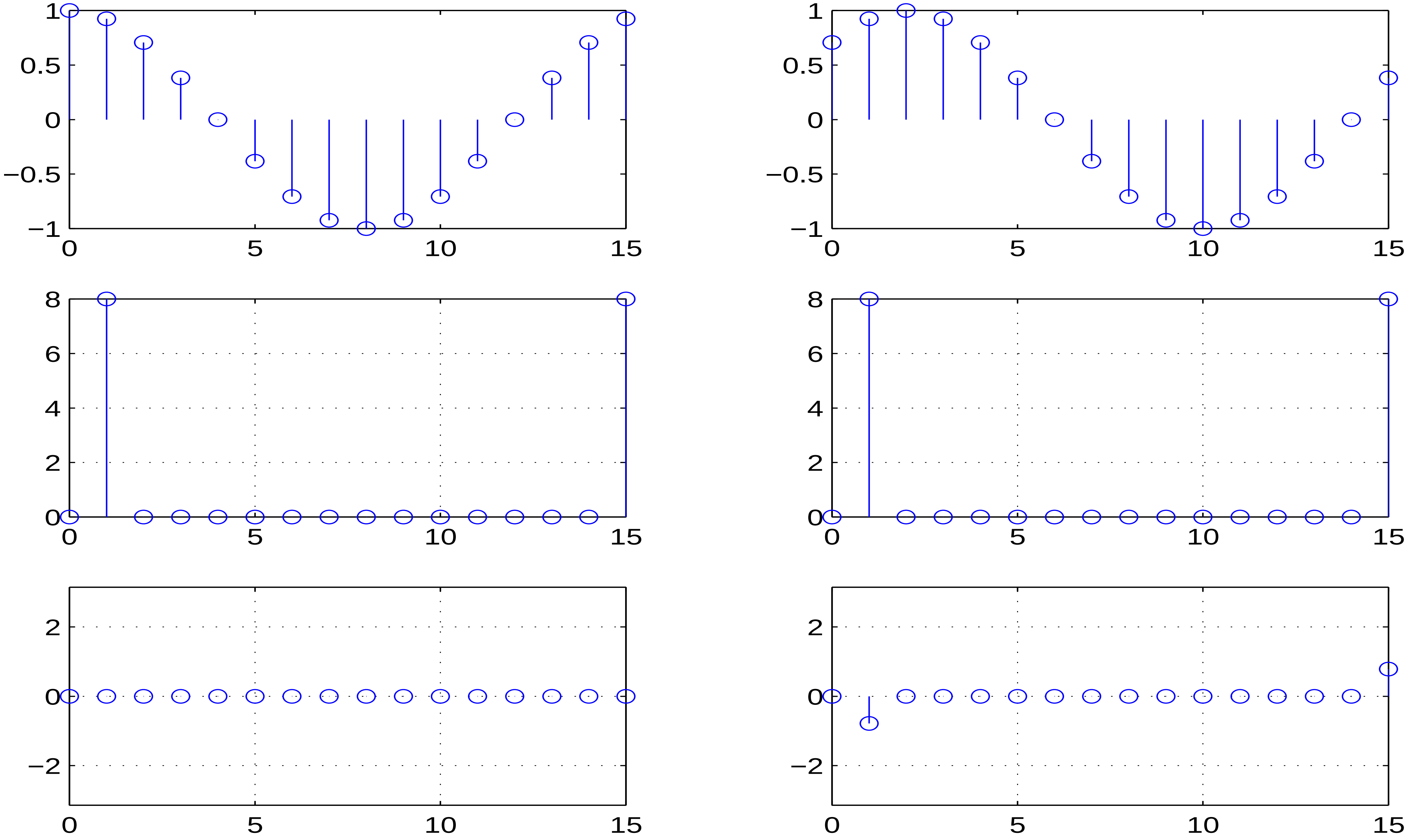
$$x_2[n] \xrightarrow{DFT} X_2[k]$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xrightarrow{DFT} aX_1[k] + bX_2[k]$$

Obraz kruhově posunuté posloupnosti

$$x[n] \xrightarrow{DFT} X[k]$$

$$R_N x[\mod_N(n-m)] \xrightarrow{DFT} X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$$


1
0.5
0
−0.5
−1
0
5
10
15
8
6
4
2
−2

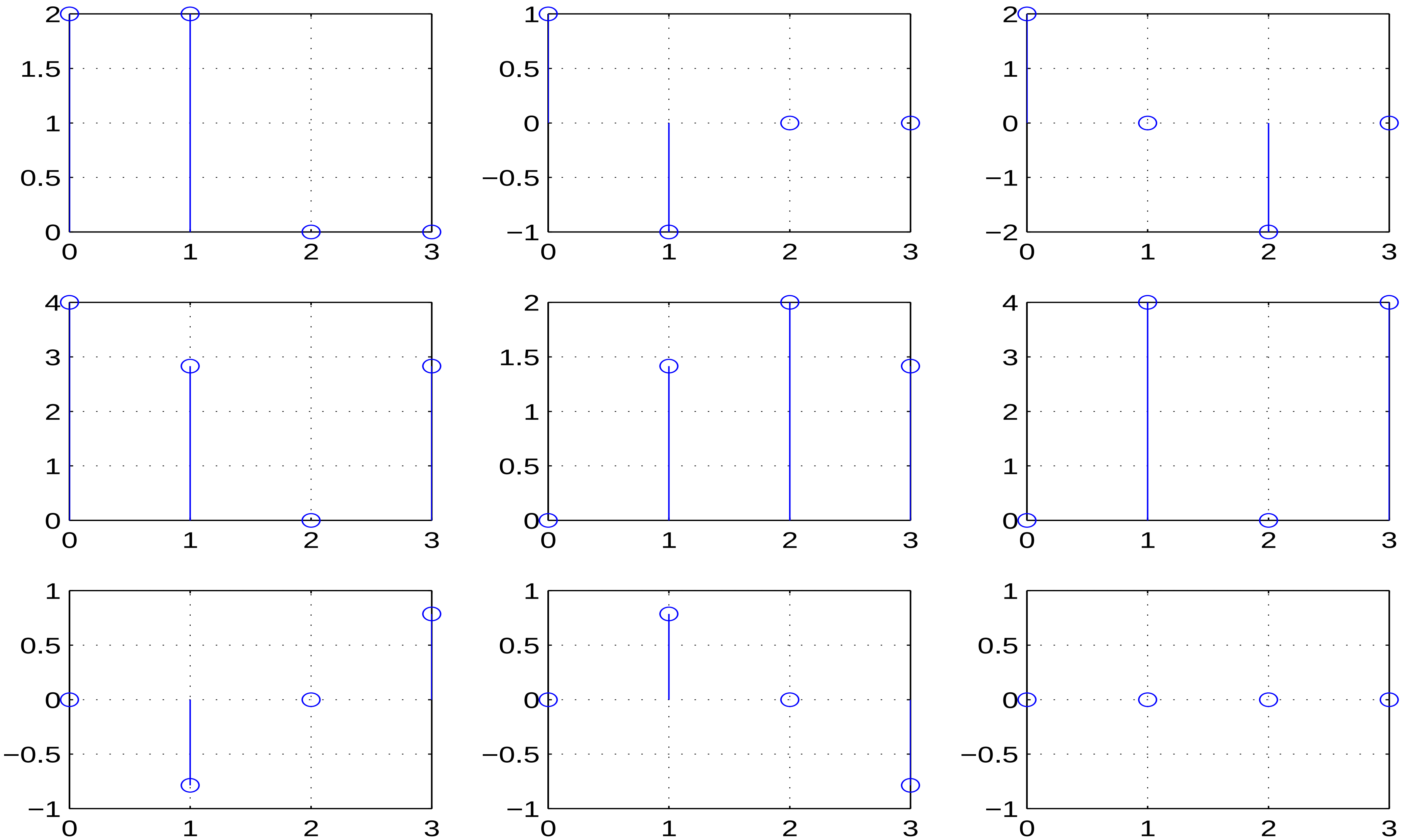
Obraz kruhové konvoluce

$$x_1[n] \stackrel{DFT}{\longrightarrow} X_1[k]$$

$$x_2[n] \stackrel{DFT}{\longrightarrow} X_2[k]$$

$$x_1[n] \textcircled{N} x_2[n] \stackrel{DFT}{\longrightarrow} X_1[k]X_2[k]$$

...podobně jako bylo u "analogové" FT obrazem konvoluce násobení spektrálních funkcí, je u DFT obrazem *kruhové konvoluce* násobení koeficientů DFT.



Rychlá Fourierova transformace

Výpočet DFT podle definičního vztahu:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

vyžaduje $2N^2$ operací (násobení nebo sčítání) s komplexními čísly. Zlatá éra DFT proto nastala v 60. letech 20. století, kdy pánové Cooley a Tuckey vynalezli rychlý algoritmus pro výpočet DFT pro $N = 2^k$, kde k je celé číslo: **rychlou Fourierovu transformaci, Fast Fourier transform – FFT**. Výpočet je rozložen do "motýlků", které zpracovávají vždy dvojici vzorků a produkují dvojici koeficientů DFT. Více ve specializovaných předmětech. Nutný počet operací je jen $N \log_2 N$.

Příklad: pro N = 1024, $2N^2 = 2$ MOPS, $N \log_2 N = 10$ kOPS

FFT produkuje stejné hodnoty jako DFT, jedná se pouze o jinou (rychlejší) implementaci

VÝPOČET FŘ A FT SE SPOJITÝM ČASEM POMOCÍ DFT

Bude nás zajímat, jak spočítat spektrální reprezentaci (tedy hodnoty a polohy koeficientů FŘ pro periodické signály nebo spektrální funkci pro obecné signály) pomocí toho jediného, co dokážeme spočítat: DFT.

nejprve si uvědomme, co jsme vlastně pomocí DFT spočítali:

- signál byl **vzorkovaný**, spektrum je tedy periodické (i když jsme pomocí DFT spočítali pouze jedinou jeho periodu) po N vzorcích (neboli po 1, 2π, F_s, $2\pi F_s$, podle toho, jakou frekvenci vybereme).
- signál byl **periodický** po N vzorcích (i když jsme pro výpočet DFT brali pouze jedinou periodu), spektrum je tedy **vzorkované (diskrétní)**. Krok ve spektrum je $\frac{1}{N}$, $\frac{2\pi}{N}$, $\frac{F_s}{N}$, $\frac{2\pi F_s}{N}$, opět podle toho, jakou frekvenci máme nejraději.
- signál byl v čase vybrán **oknem** – spektrum tohoto okna se projeví i v DFT, protože $x(t)w(t) \longrightarrow X(j\omega) \star W(j\omega)$.

Výpočet koeficientů FŘ pomocí DFT

Připomeňme si, že pro signál se spojitým časem s periodou T_1 byly koeficienty FŘ dány:

$$c_k = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt,$$

Pokud takový signál navzorkujeme se vzorkovací periodou T a T_1 bude obsahovat N vzorků, můžeme integrál aproximovat pomocí:

$$c_k \approx \frac{1}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\frac{2\pi}{NT}nT} T = \frac{T}{NT} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}.$$

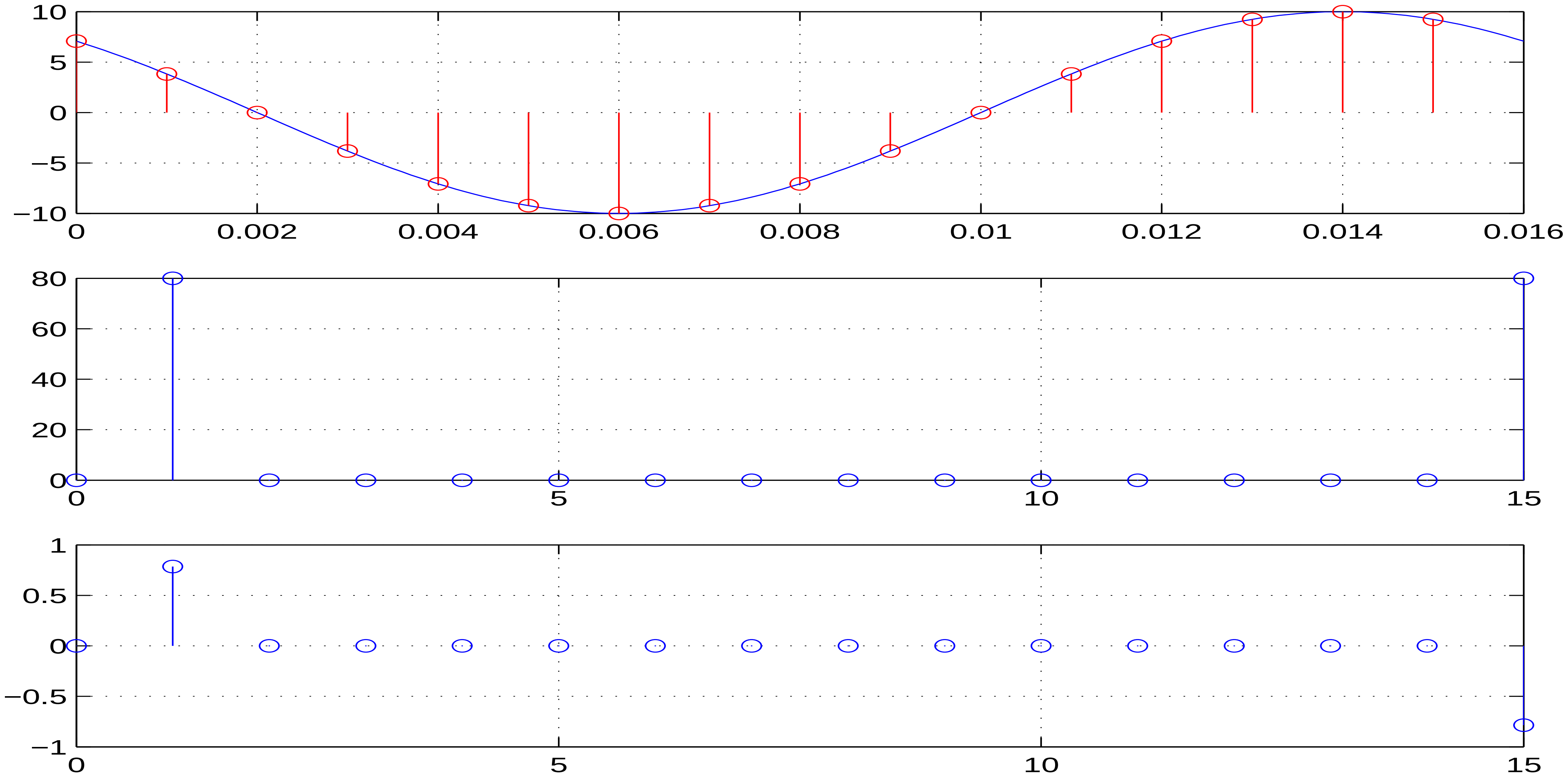
Ve vztahu vidíme definiční vzorec DFT, stačí jen podělit koeficienty počtem vzorků N:

$$c_k = \frac{X[k]}{N}.$$

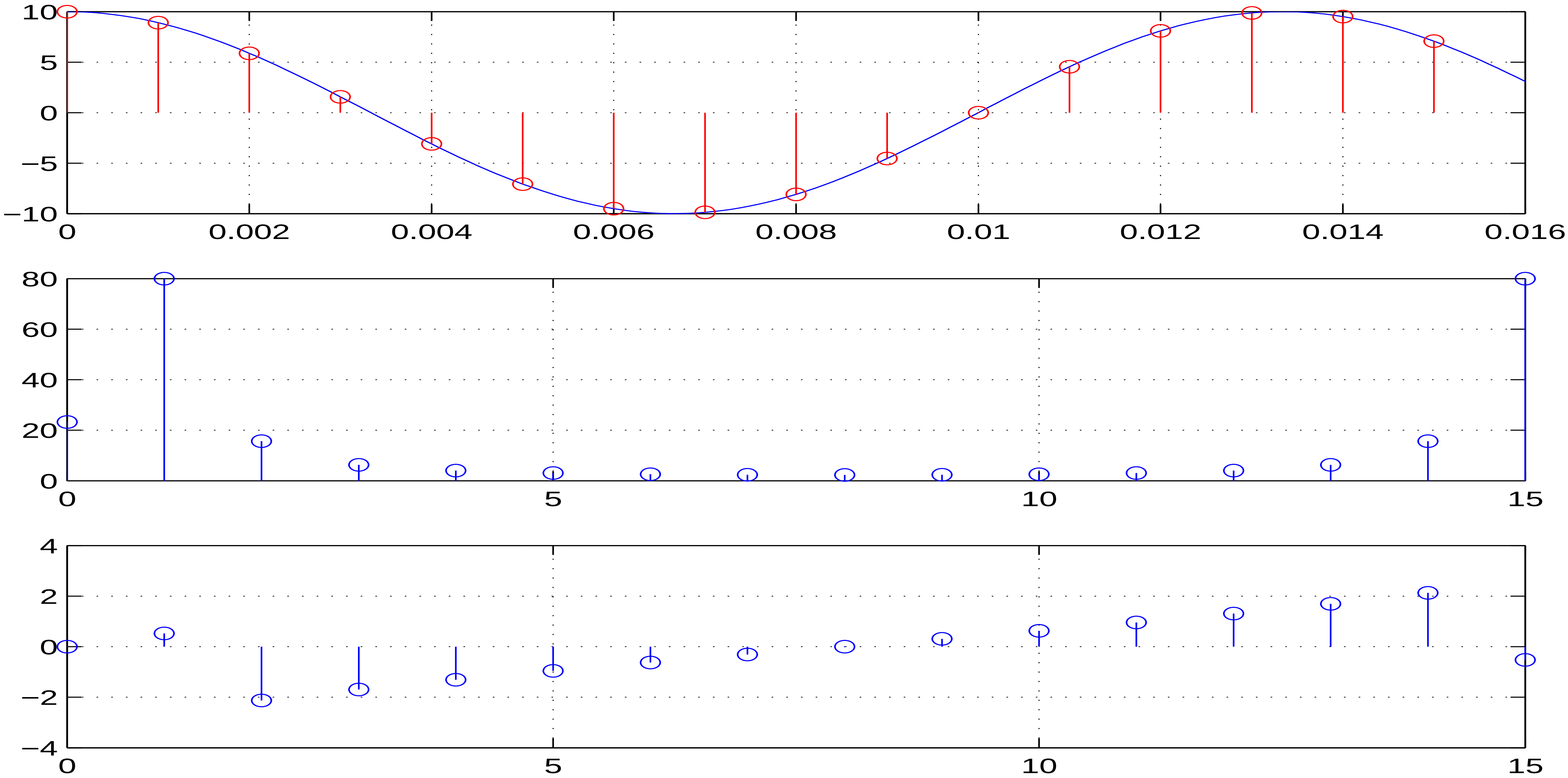
Tento vzorec však platí pouze s těmito **omezujícími podmínkami**:

1. dají se počítat jen koeficienty c_k pro $k < \frac{N}{2}$ (druhá polovina je zrcadlově obrácená první).
2. musí být splněn vzorkovací teorém: poslední nenulový koeficient "analogového signálu" musí být
$$k_{max} < \frac{N}{2},$$
jinak dojde k aliasingu. Uvědomíme-li si, že N bude odpovídat vzorkovací frekvenci, je to ekvivalentní vztahu
$$\omega_{max} < \frac{\Omega_s}{2}.$$
3. do N se musí "vejít" přesně jedna perioda signálu. Pokud se do N "vejde" několik period – m, platí rovnice s malou změnou:
$$c_k = \frac{X[mk]}{N},$$

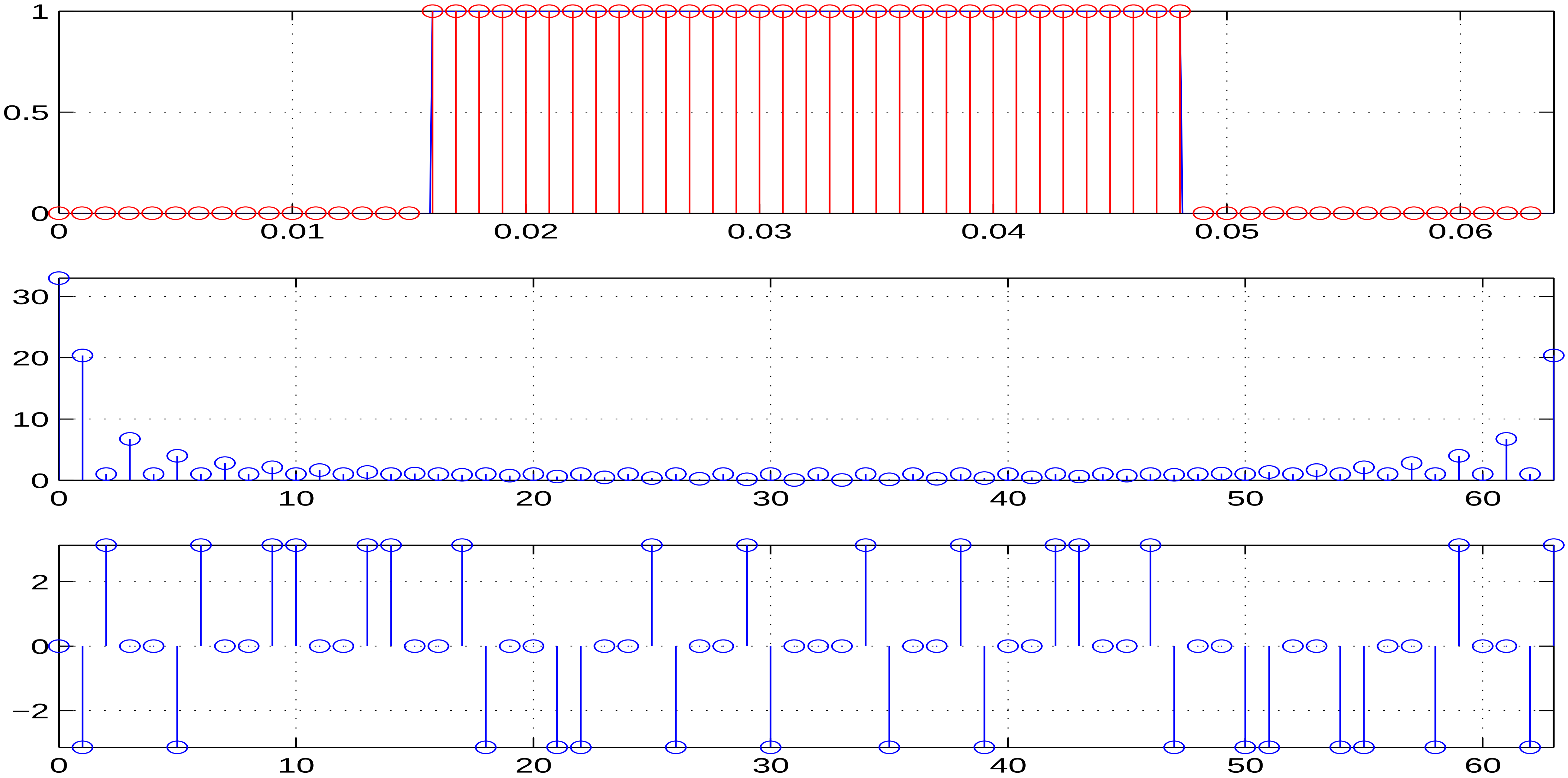
Příklad 1: signál se spojitým časem $x(t) = 10\cos(125\pi t + \pi/4)$ vzorkovaný na 1 kHz, počítáme koeficienty FŘ pomocí DFT. Perioda $T_1 = \frac{2\pi}{125\pi} = 0.016$. Počet vzorků pro výpočet bude tedy $\frac{T_1}{T} = 0.016/0.001 = 16$. Teoretické hodnoty koeficientů jsou $c_1 = 5e^{j\pi/4}$, $c_{-1} = 5e^{-j\pi/4}$,



Příklad 2: signál se spojitým časem $x(t) = 10\cos(150\pi t)$ vzorkovaný na 1 kHz, počítáme koeficienty FŘ pomocí DFT. Nikdo nám ale neřekl, jakou periodu má signál, proto zase volíme $N = 16$. Teoretické hodnoty koeficientů jsou $c_1 = 5$, $c_{-1} = 5$,



Příklad 3: signál se spojitým časem: periodický sled obdélníkových impulsů s $D = 1$, $\vartheta = 32$ ms, $T_1 = 64$ ms, vzorkovaný na 1 kHz, počítáme koeficienty FŘ pomocí DFT. Teoretické hodnoty koeficientů jsou $c_k = \frac{D\vartheta}{T_1}\text{sinc}(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1)$.



Výpočet spektrální funkce pomocí DFT

opět si zopakujeme definici:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

Budeme schopni počítat pouze FT signálu, který je v čase omezen: od 0 do T_1:

- pokud není, máme smůlu.
- pokud je, ale je jinde – například od t_{start} do $t_{start} + T_1$ – přesuneme jej do $[0, T_1]$, ale zapamatujeme si, jak jsme přesouvali - na konci bude stačit malá úprava fáze.

Pokud takový signál navzorkujeme se vzorkovací periodou T, dostaneme N vzorků. Integrál můžeme aproximovat, ale pouze pro určité frekvence - určíme, že to budou násobky N-tého dílku ze vzorkovací frekvence $\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$: $k\frac{\Omega_s}{N}$. Pak:

$$X(jk\frac{\Omega_s}{N}) \approx \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\frac{\Omega_s}{N}nT}T = T\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-jk\frac{2\pi/T}{N}nT} = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}.$$

Opět vidíme definici DFT a můžeme psát, že pro kruhové frekvence $k\frac{\Omega_s}{N}$ platí:

$$X(jk\frac{\Omega_s}{N}) = TX[k]$$

Opět platí určité **omezující podmínky**:

- platí pouze pro $k < \frac{N}{2}$.
- musí být splněn vzorkovací teorém: maximální frekvence obsažená ve spektru signálu ω_{max} musí být:

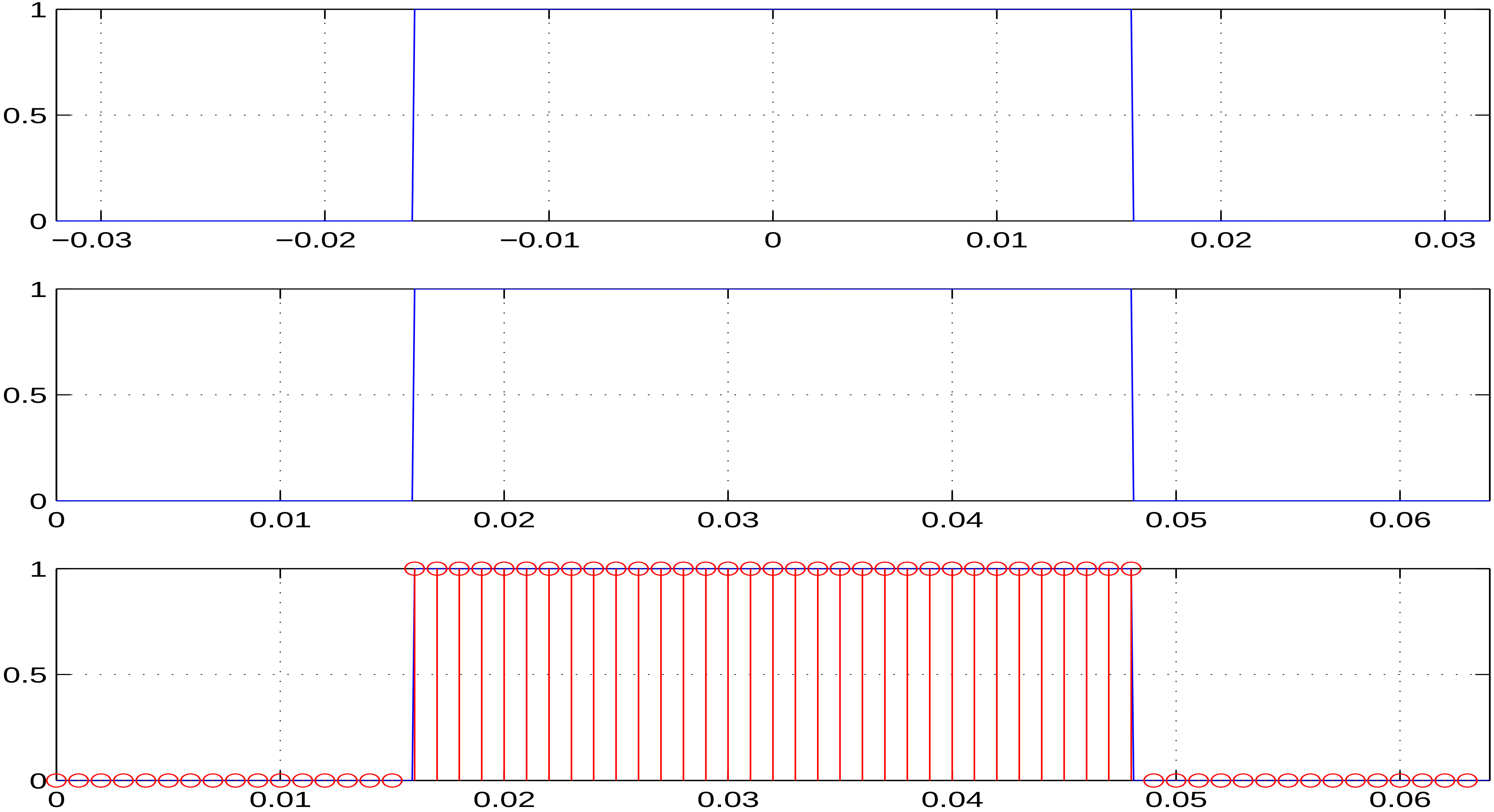
  $$\omega_{max} < \frac{\Omega_s}{2}$$

  jinak dojde k aliasingu. Pokud o signálu víme, že $\omega_{max} = \infty$ (obdélník. . .), musíme použít Ω_s co nejvyšší, aby aliasing tolik "nebolel".

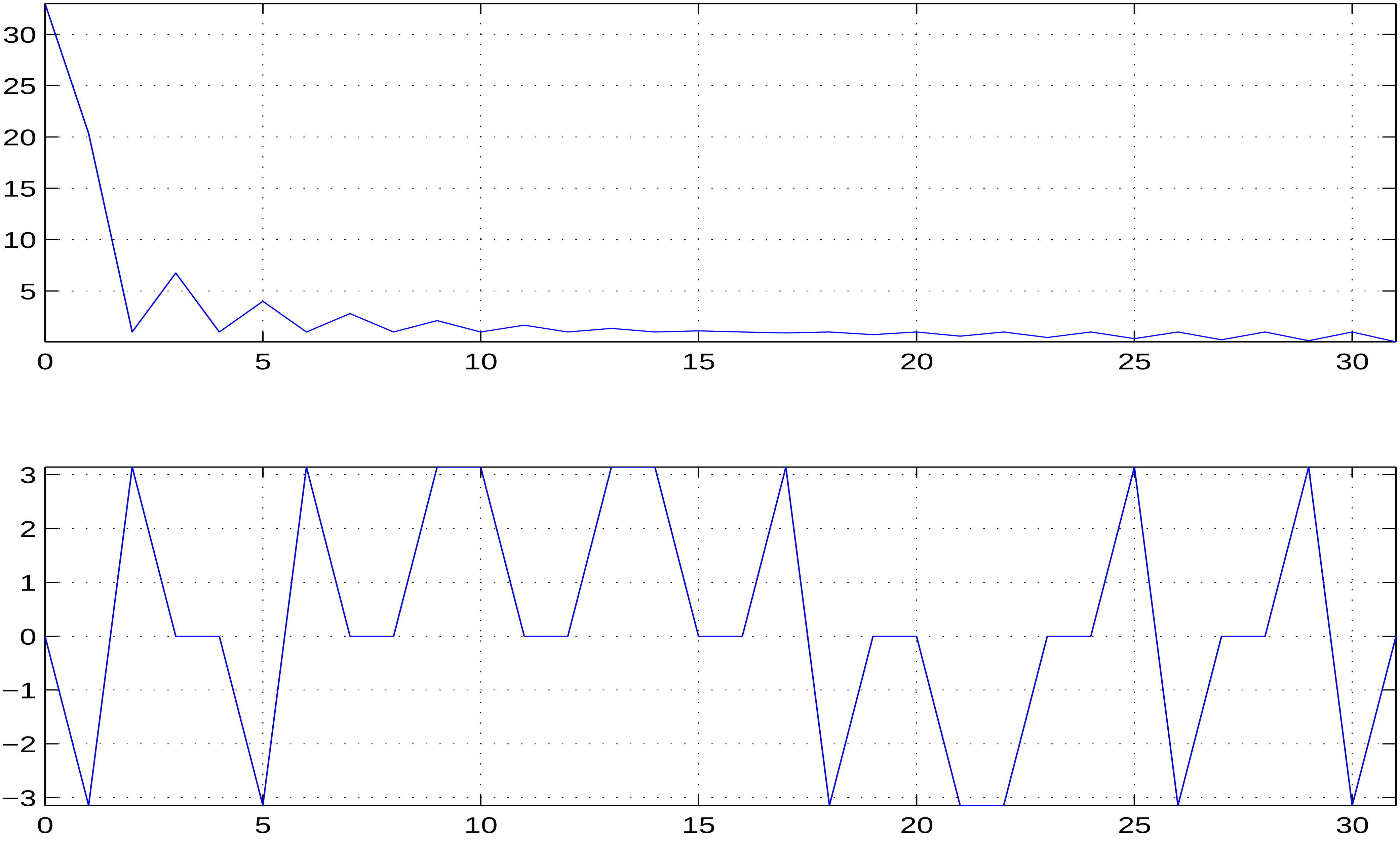
- dostáváme hodnoty pro určité frekvence, ale zajímá nás celá spektrální funkce. Musíme interpolovat, nebo použít tzv. **zero-padding** – doplňování nulami, při kterém dostáváme ve frekvenci více vzorků.
- pokud jsme signál do intervalu $[0, T_1]$ násilně posunuli, musíme upravit fázi: násobíme vzorky spektrální funkce:

$$X(jk\frac{\Omega_s}{N}) \longrightarrow X(jk\frac{\Omega_s}{N})e^{-jk\frac{\Omega_s}{N}t_{start}}$$

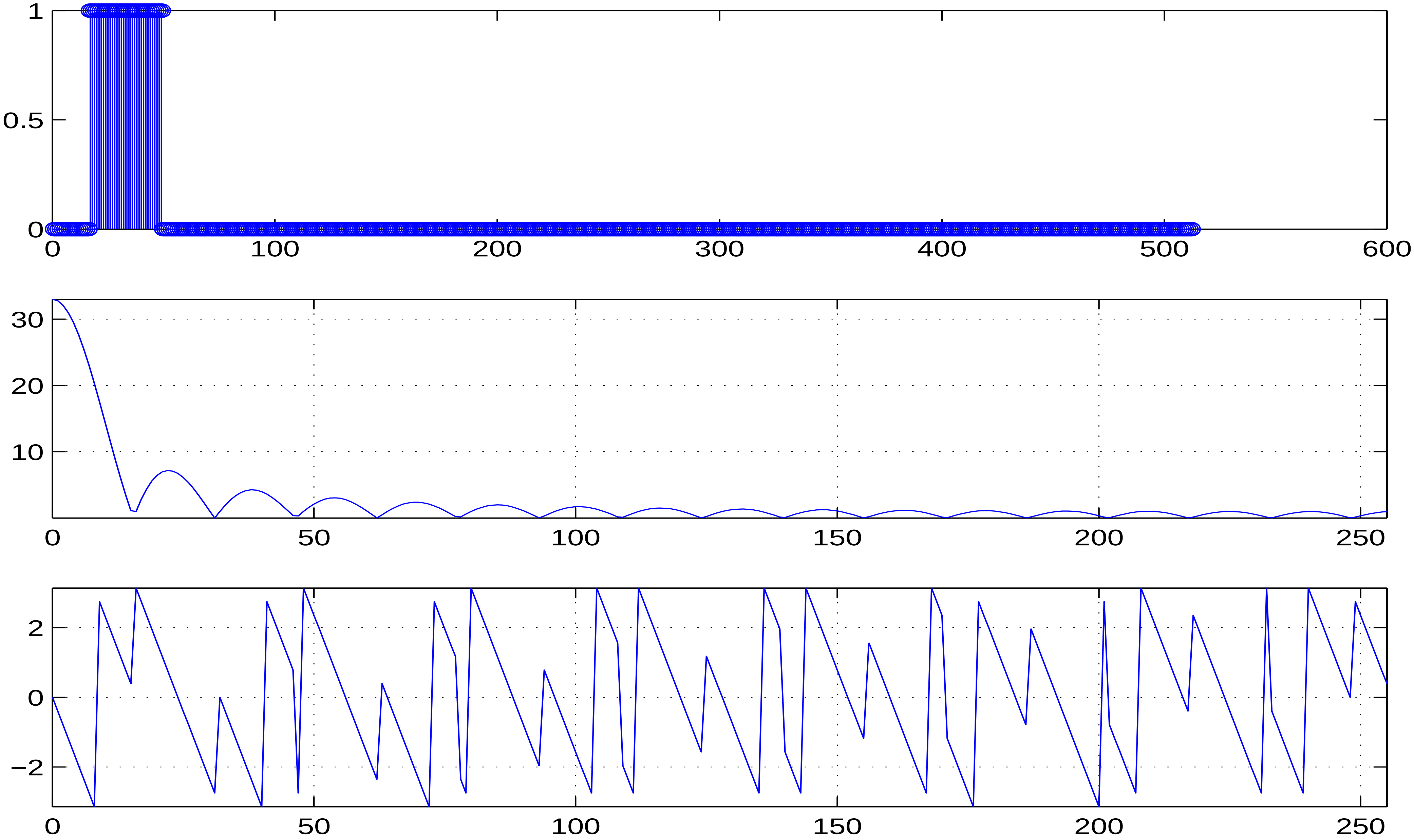
Příklad: obdélníkový impuls s $D = 1$, $\vartheta = 32$ ms, vzorkovaný na 1 kHz. Teoretická spektrální funkce je $X(j\omega) = D\vartheta \text{sinc}(\frac{\vartheta}{2}\omega)$.



spektrální funkce spočítaná pro $N = 64$



doplnění nulami, spektrální funkce spočítaná pro $N = 512$



slušná frekvenční osa (ω), oprava velikosti (násobení T) a oprava fáze: