# Náhodné signály II.

**Jan Černocký**

**ÚPGM FIT VUT Brno,** `cernocky@fit.vutbr.cz`

# Časový odhad autokorelačních koeficientů

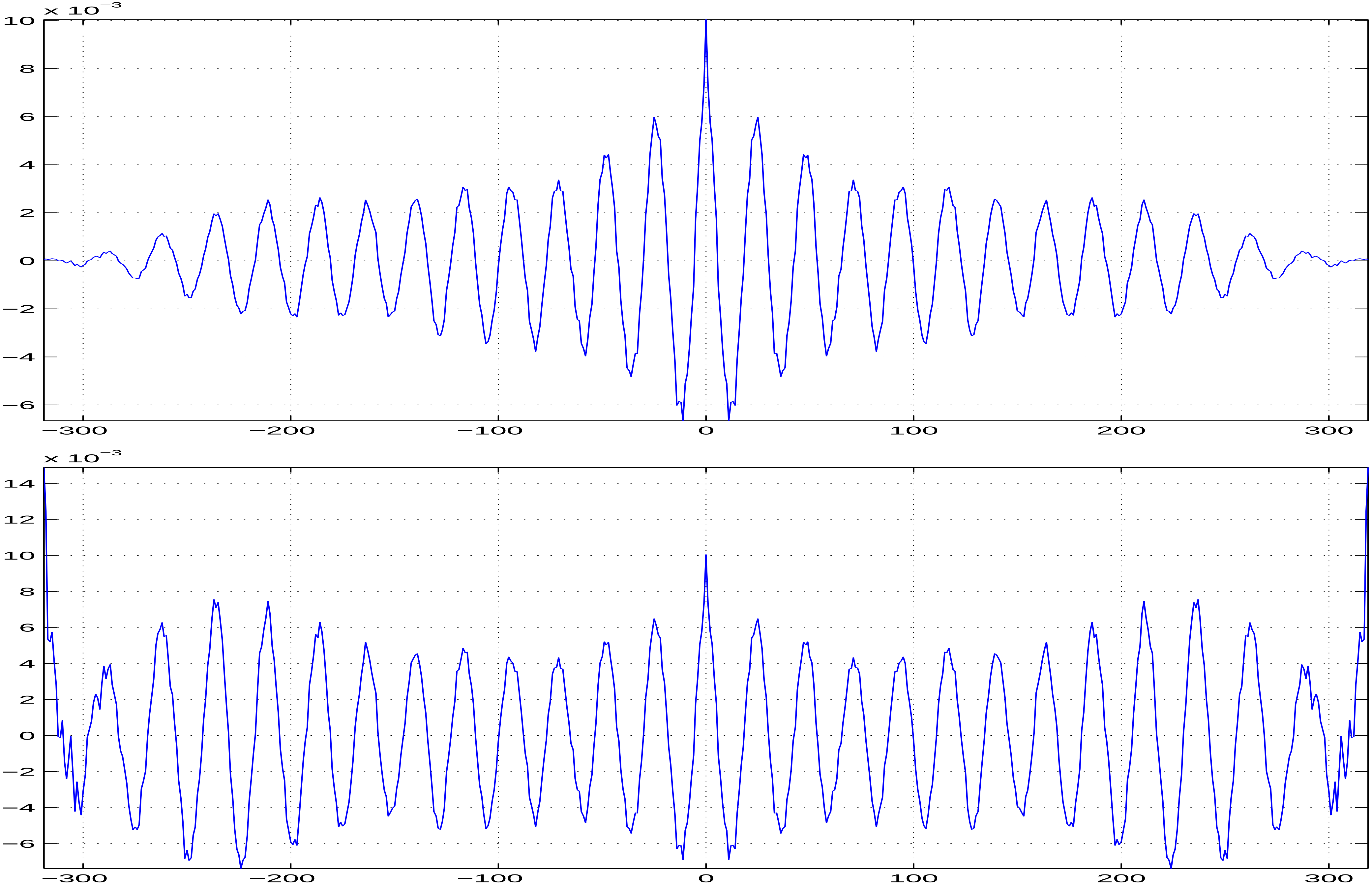
pro ergodický náhodný proces s diskrétním časem.

- $$\hat{R}[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k],$$

  kde $N$ je počet vzorků, které máme k disposici, se nazývá **vychýlený odhad** (biased estimation). Když totiž odsouváme signály od sebe, odhadujeme $R(k)$ pouze z $N-k$ vzorků. Dělíme však stále $N$, takže se hodnoty ke krajům budou snižovat.

- $$\hat{R}[k] = \frac{1}{N-|k|} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]x[n+k],$$

  je **nevychýlený odhad**, kdy se dělí skutečně použitým počtem vzorků. Krajní koeficienty $k \rightarrow N-1, \quad k \rightarrow -N+1$ jsou ale zatíženy značnou chybou (protože se k jejich odhadu používá málo vzorků!), proto dáváme přednost vychýlenému odhadu.


x 10^-3
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−300
−200
−100
0
100
200
300
x 10^-3
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−300
−200
−100
0
100
200
300

## Spektrální hustota výkonu – spojitý čas

I u náhodných procesů nás bude zajímat chování ve frekvenční oblasti, ale:

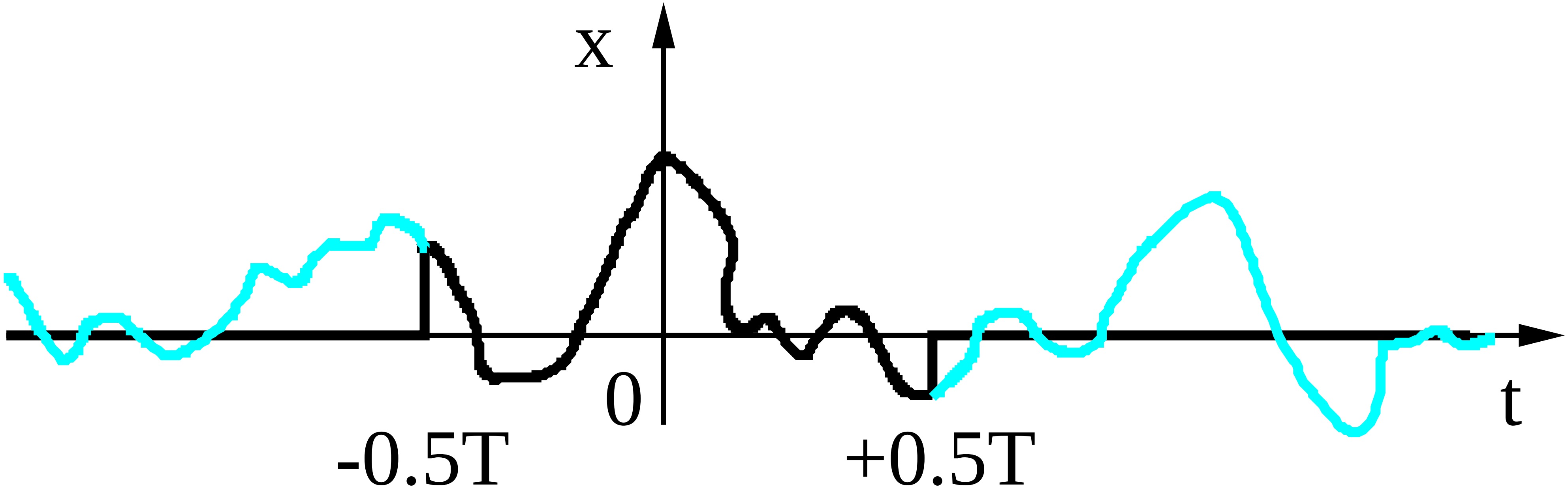
- nemůžeme použít FŘ, protože náhodné signály nejsou periodické.
- nemůžeme použít ani FT, protože náhodné signály mají nekonečnou energii (FT na tyto signály šla aplikovat, ale pouze ve speciálních případech)

Budeme uvažovat pouze ergodické náhodné signály, realizaci $x(t)$.

**Odvození spektrální hustoty výkonu (power spectral density – PSD)**

- definujeme interval o délce $T$, vezmeme pouze úsek od $-T/2$ do $T/2$:

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro} \;\; |t| < T/2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$




- definujeme Fourierův obraz:

$$X_T(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t) e^{-j\omega t} dt$$

- definujeme spektrální hustotu energie (viz přednáška o FT):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \ldots = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(j\omega) X_T(-j\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} L_T(j\omega) d\omega$$

$L_T(\omega)$ nazýváme **(dvoustranná) spektrální hustota energie**

$$L_T(j\omega) = \frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$$

- pokusíme se "natáhnout" $T$ až do $\infty$. V tomto případě by ale energie (i její hustota) rostly nade všechny meze. Definujeme tedy **(dvoustrannou) spektrální hustota výkonu** dělením $T$ (analogie $P = E/T$):

$$G_T(j\omega) = \frac{L_T(j\omega)}{T}$$

- nyní už můžeme "natažení" provést a spočítat spektrální hustotu výkonu nejen pro úsek délky $T$, ale pro celý signál:

$$G(j\omega) = \lim_{T\to\infty} G_T(j\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{|X_T(j\omega)|^2}{2\pi T}$$

**Vlastnosti** $G(j\omega)$

- Pro spektrální funkci reálného signálu $X_T(j\omega)$ platí:

$$X_T(j\omega) = X_T^\star(-j\omega)$$

$G(j\omega)$ je prakticky dána jejími hodnotami na druhou, bude tedy **čistě reálná a sudá**.

- Výkon náhodného procesu v intervalu $[\omega_1,\ \omega_2]$ můžeme spočítat jako:

$$P_{[\omega_1,\ \omega_2]} = \int_{\omega_1}^{\omega_2} G(j\omega)d\omega + \int_{-\omega_2}^{-\omega_1} G(j\omega)d\omega = 2\int_{\omega_1}^{\omega_2} G(j\omega)d\omega.$$

- Pro **celkový** střední výkon náhodného signálu platí:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)d\omega$$

- Často je ve sdělovací technice $a = 0$. Pak je střední výkon roven rozptylu: $P = D$ a efektivní hodnota $X_{ef} = \sigma$.

## Wiener-Chinchinovy vztahy

Spektrální hustota výkonu je vázána FT s autokorelační funkcí $R(\tau)$ (někdy se tak dokonce definuje – je to jednodušší než limitní přechod $T \to \infty$):

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{+j\omega\tau} d\omega$$

## Spektrální hustota výkonu – diskrétní čas

PSD náhodného procesu s diskrétním časem budeme definovat přímo pomocí autokorelačních koeficientů (všimněte si terminologie: autokorelační **funkce** $R(\tau)$ pro spojitý čas, autokorelační **koeficienty** $R[k]$ pro diskrétní čas):

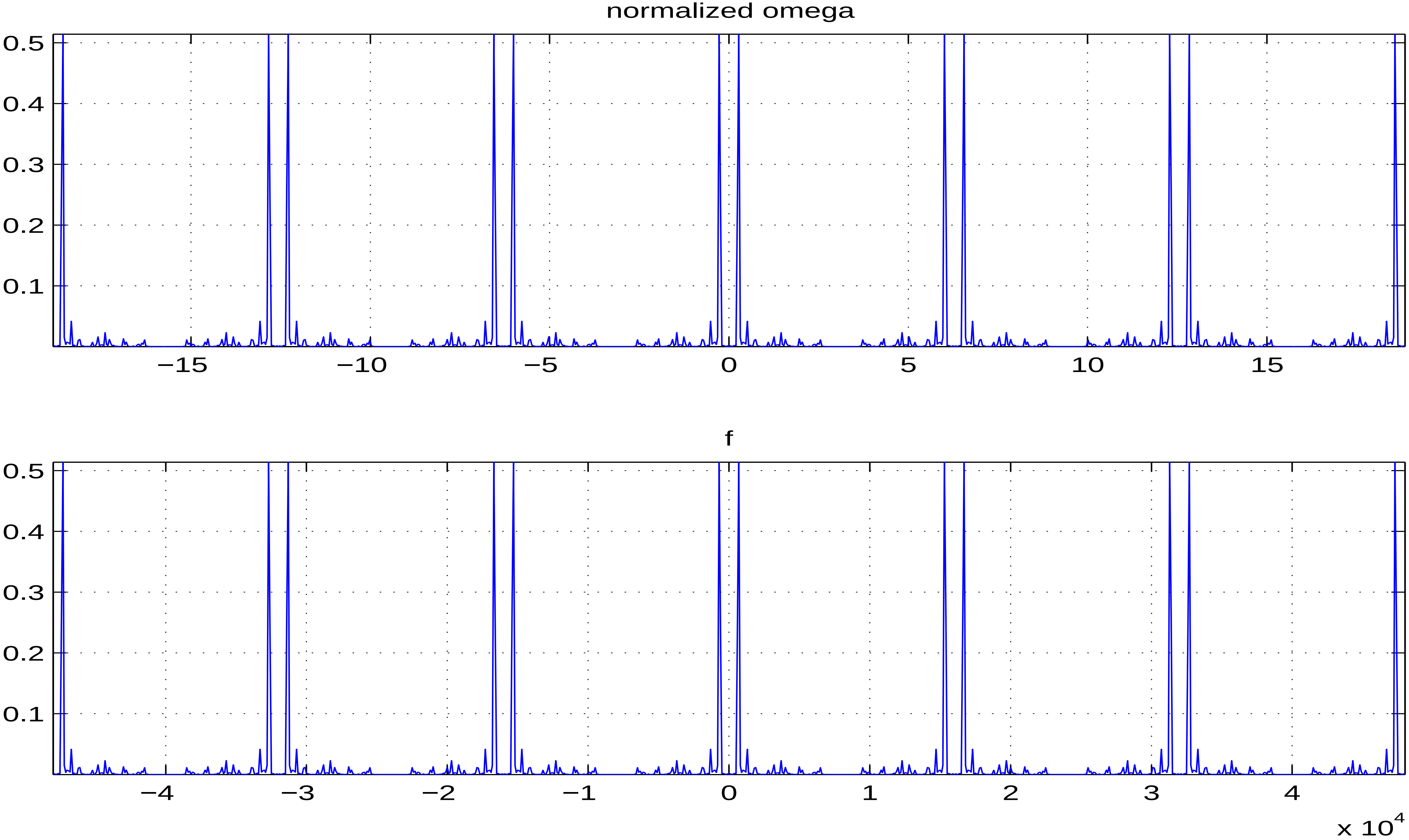
$$G(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R[k]e^{-j\omega k}$$

(jaká je zde $\omega$ kruhová frekvence ?). $G(e^{j\omega})$ je Fourierovou transformací s diskrétním časem (DTFT) autokorelačních koeficientů. Pokud tyto odhadneme (souborový odhad, časový odhad u ergodických), můžeme $G(e^{j\omega})$ spočítat.

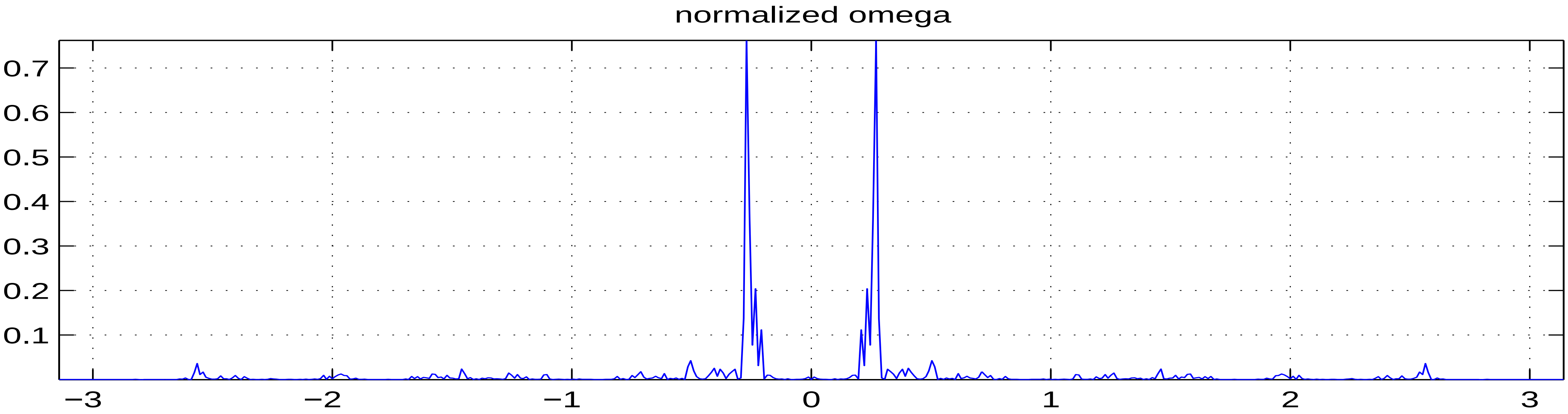
Zpětný přechod od $G(e^{j\omega})$ k autokorelačním koeficientům (zpětná DTFT):

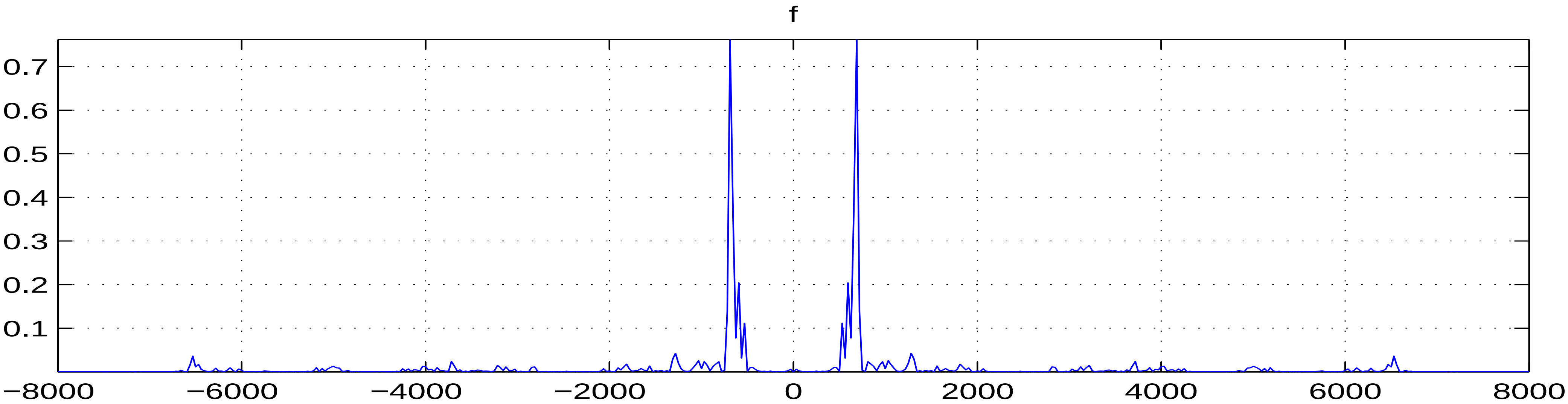
$$R[k] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega})e^{+j\omega k}d\omega$$

Pro tekoucí vodu ($R[k]$ odhadovány z jedné realizace):



zoom od $-Fs/2$ do $Fs/2$:




$\Rightarrow$ tekoucí voda má silnou hodně výkonu okolo 700 Hz, že by rezonance trubky ?

**vlastnosti** $G(e^{j\omega})$ jsou opět dány standardními vlastnostmi obrazu DTFT:

- autokorelační koeficienty jsou reálné, proto bude pro $G(e^{j\omega})$ platit

$$G(e^{j\omega}) = G^\star(e^{-j\omega}),$$

- autokorelační koeficienty jsou symetrické (sudé), proto bude $G(e^{j\omega})$ všude reálná.
- z toho vyplývá, že $G(e^{j\omega})$ bude reálná a sudá, podobně jako $G(j\omega)$.
- je periodická (s periodou $2\pi,\ 1,\ F_s,\ 2\pi F_s$ podle frekvence, kterou si vyberete) protože signál je diskrétní.
- Výkon náhodného procesu v intervalu $[\omega_1,\ \omega_2]$ můžeme spočítat jako:

$$P_{[\omega_1,\ \omega_2]} = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} G(e^{j\omega})d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_2}^{-\omega_1} G(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} G(e^{j\omega})d\omega.$$

- Pro **celkový** střední výkon náhodného signálu platí:

$$P = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} G(e^{j\omega})d\omega$$

to je ale hodnota zpětné DTFT pro $k = 0$:

$$R[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{+j\omega 0} d\omega = R[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} G(e^{j\omega}) d\omega$$

takže jsme dostali vztah:

$$R[0] = P$$

## Odhad spektrální hustoty výkonu $G(e^{j\omega})$ pomocí DFT

Máme-li k disposici realizaci náhodného procesu $x[n]$ o $N$ vzorcích, můžeme PSD odhadnout pomocí Diskrétní Fourierovy transformace (DFT – to je ta, co se jako jediná dá slušně spočítat), pro připomenutí:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$G(e^{j\omega})$ dostaneme pouze pro diskrétní frekvence: $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$:

$$\hat{G}(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{N}|X[k]|^2.$$

Tento odhad bývá někdy velice nespolehlivý (zašuměný), proto se často využívá **Welchova metoda** – průměrování odhadu PSD přes několik časových úseků:

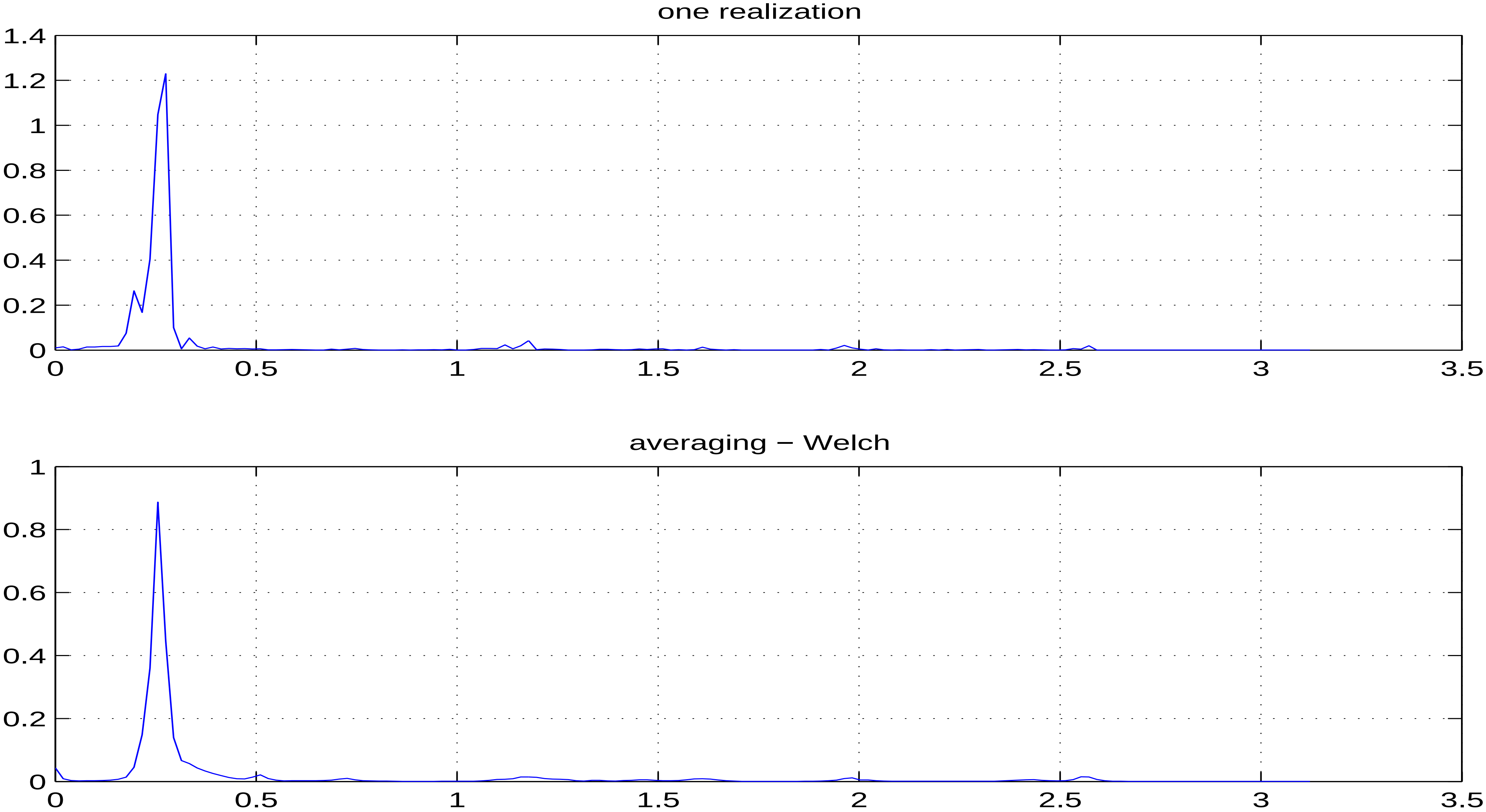
- Signál rozdělíme na $M$ úseků po $N$ prvcích a pro každý spočítáme DFT:

$$X_m[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_m[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad \text{pro} \quad 0 \le m \le M-1$$

- Odhad PSD spočítáme:

$$\hat{G}_W(e^{j\omega_k}) = \frac{1}{M}\sum_{m=0}^{M-1}\frac{1}{N}|X_m[k]|^2.$$

Ukázka pro odhad PSD z jednoho 320-vzorkového segmentu a z 1068 takových segmentů:




$\Rightarrow$ odhad získaný průměrováním je mnohem hladší.

## Průchod náhodných signálů lineárními systémy

- **spojitý čas:** lineární systém má komplexní kmitočtovou charakteristiku $H(j\omega)$. Pro vstupní signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(j\omega)$ je výstupní spektrální hustota výkonu dána:

$$G_y(j\omega) = |H(j\omega)|^2 G_x(j\omega)$$

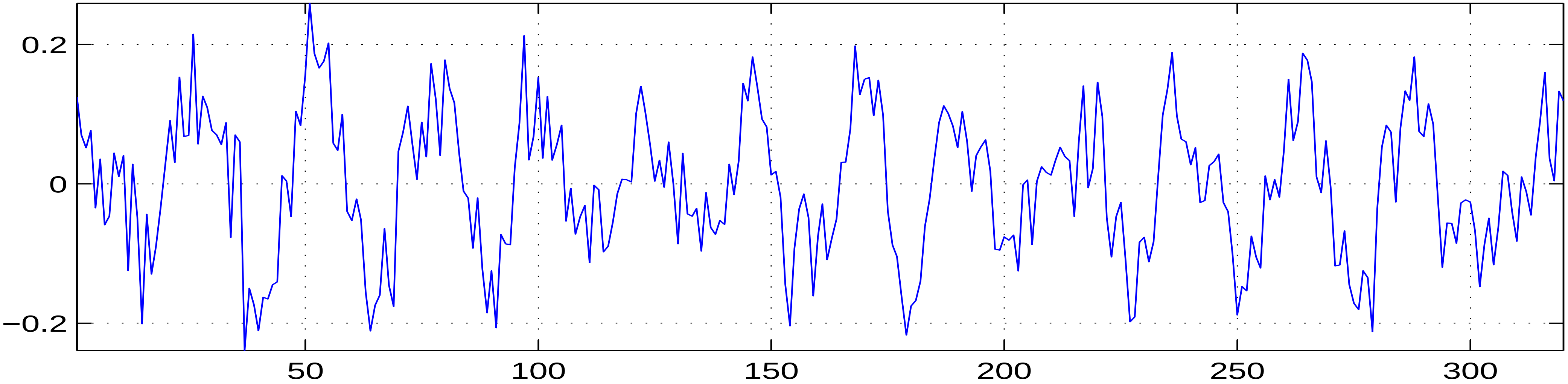
- **diskrétní čas:** lineární systém má komplexní kmitočtovou charakteristiku $H(e^{j\omega})$. Pro vstupní signál se spektrální hustotou výkonu $G_x(e^{j\omega})$ je výstupní spektrální hustota výkonu dána:

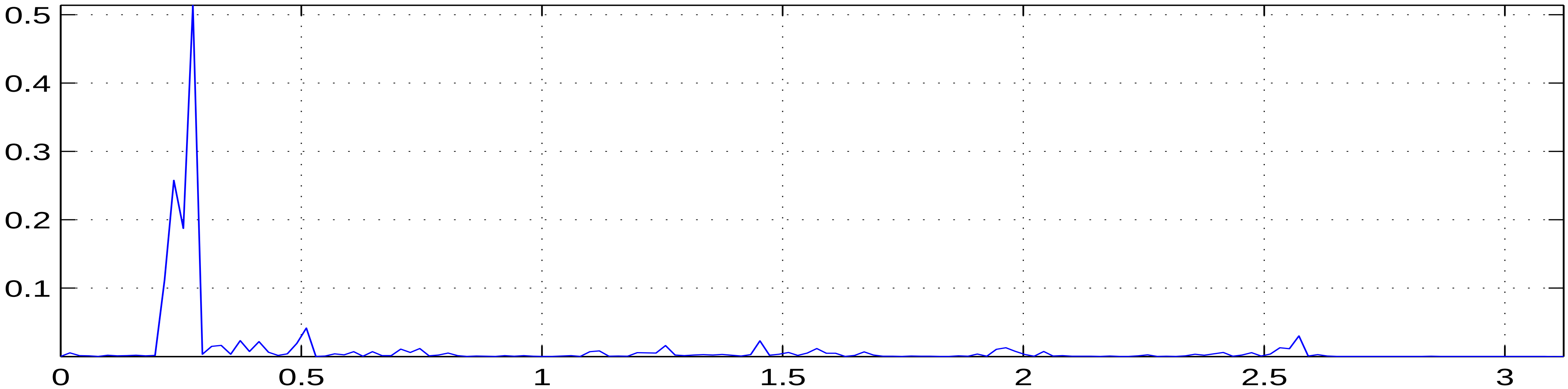
$$G_y(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 G_x(e^{j\omega})$$

V obou případech násobíme vstupní PSD druhou mocninou **modulu** komplexní kmitočtové charakteristiky.

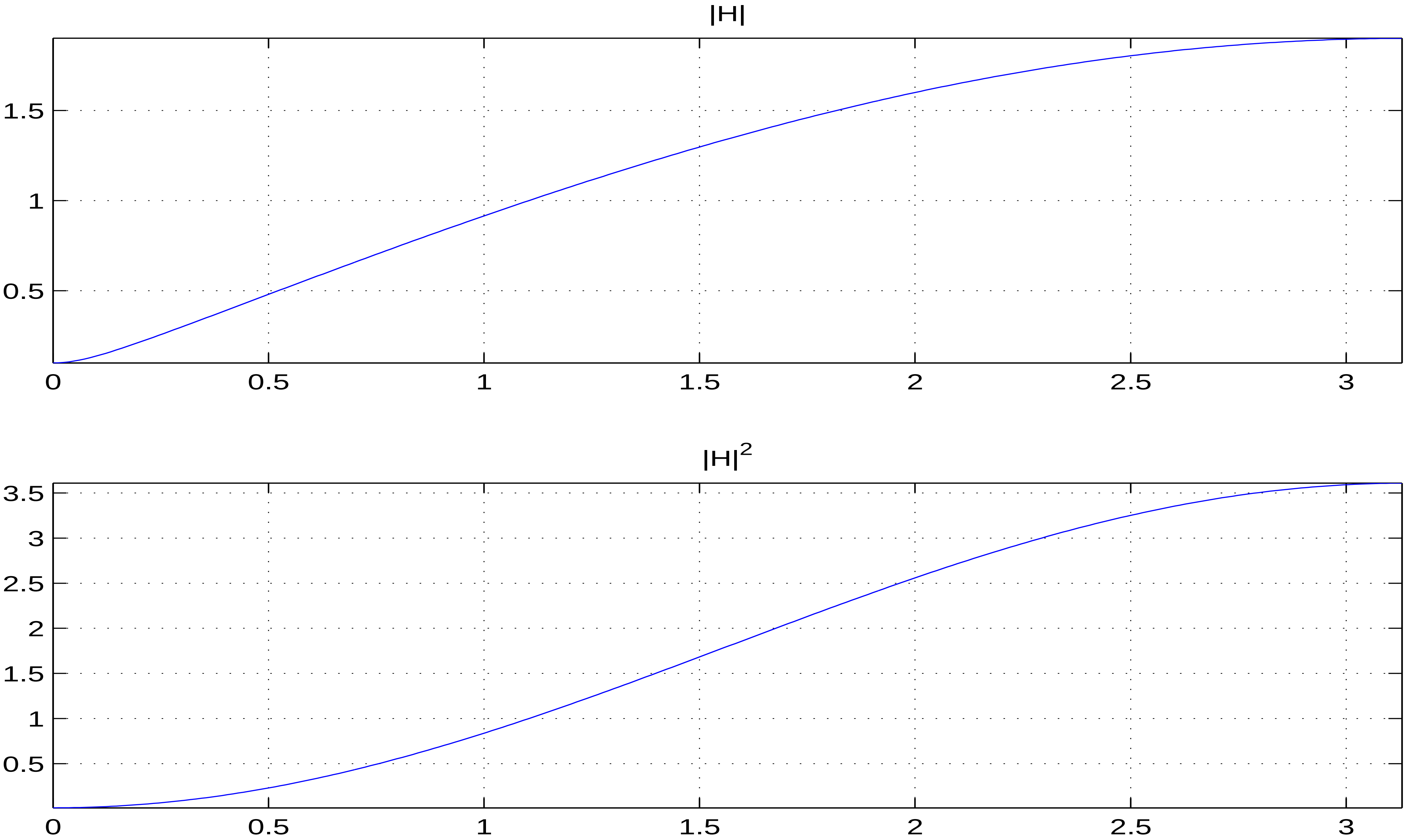
Tvar funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti se průchodem lineárním systémem **nemění** – mění se jen parametry.

**Příklad:** filtrování jedné realizace tečení vody filtrem $H(z) = 1 - 0.9z^{-1}$. Vstupní signál a jeho PSD:

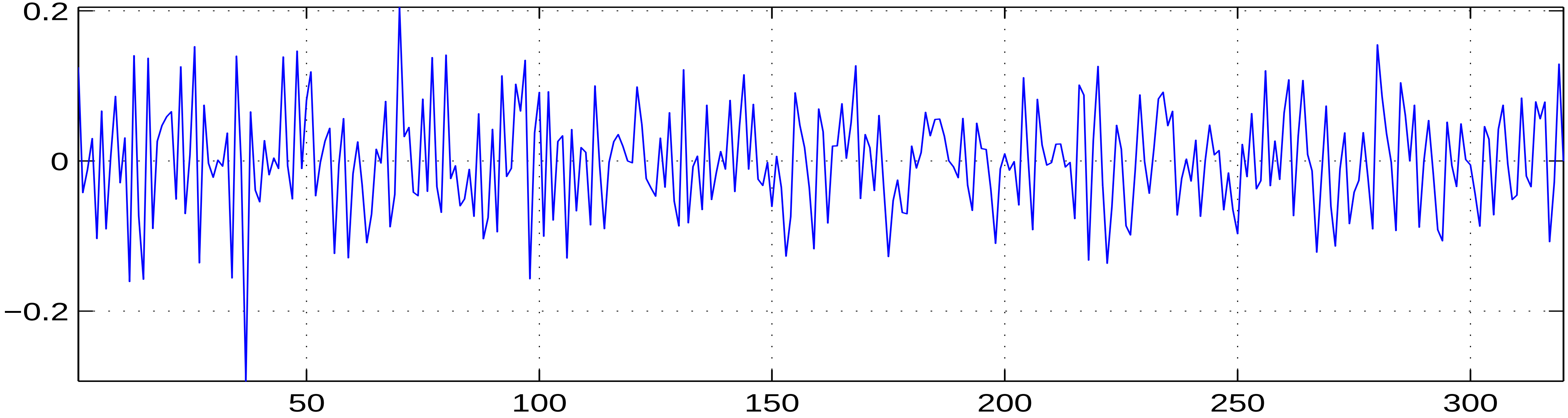


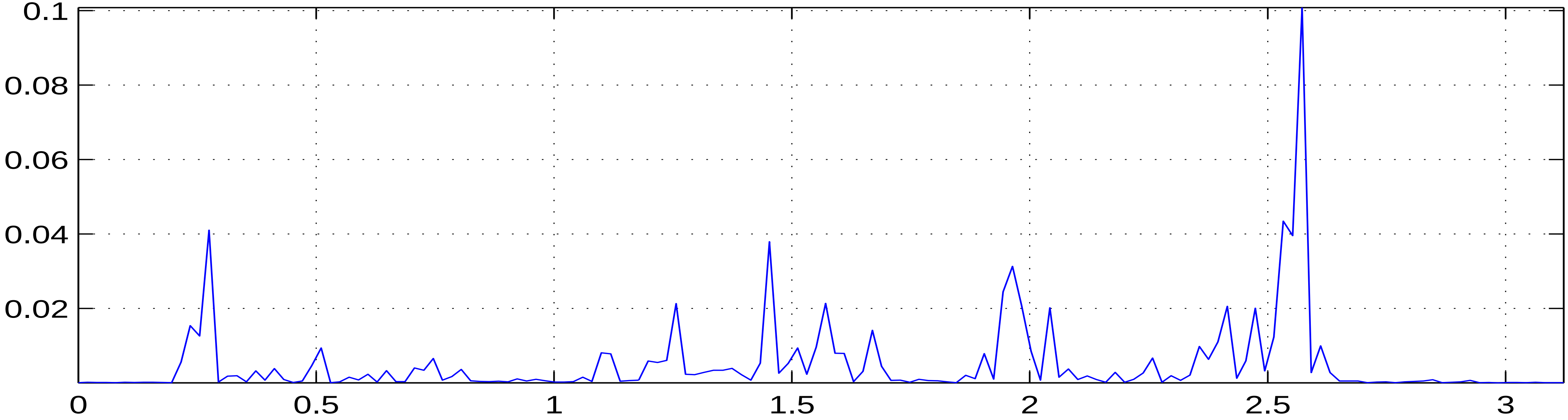



Modul komplexní kmitočtové charakteristiky a jeho druhá mocnina:



Výstupní signál a jeho PSD:

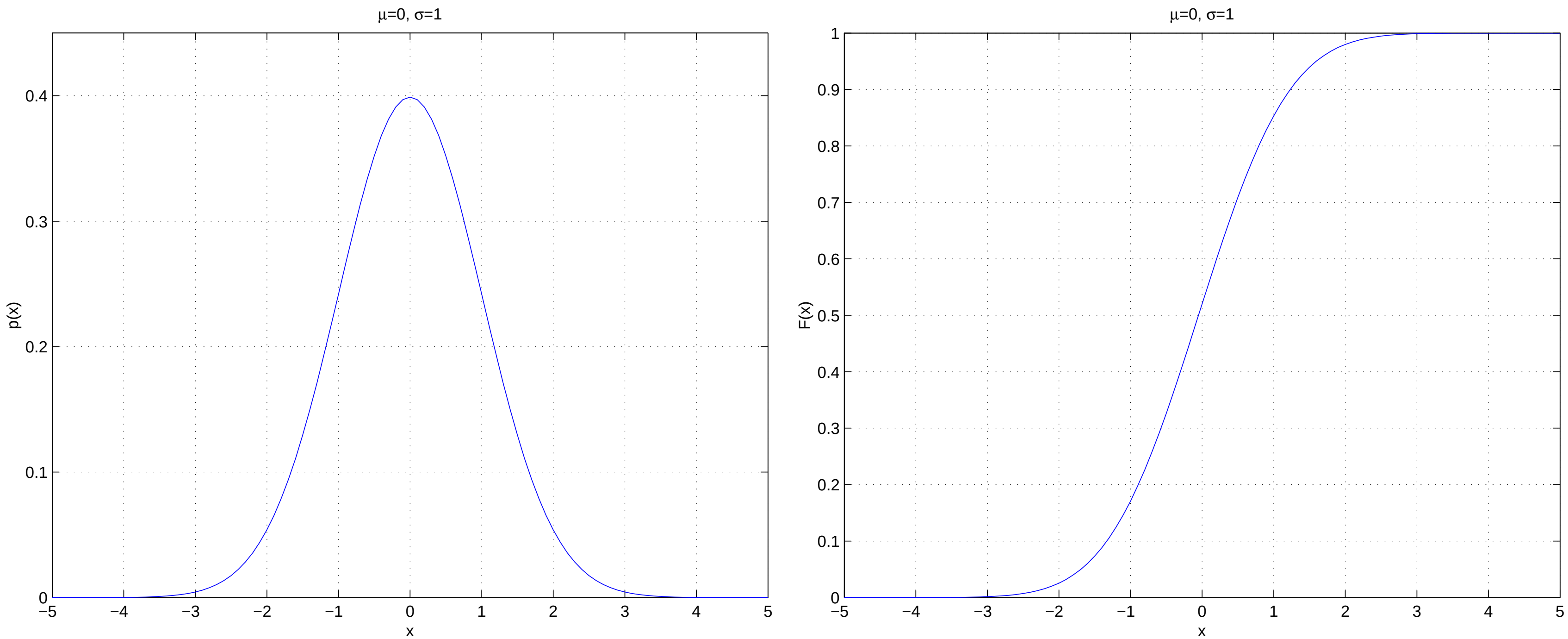


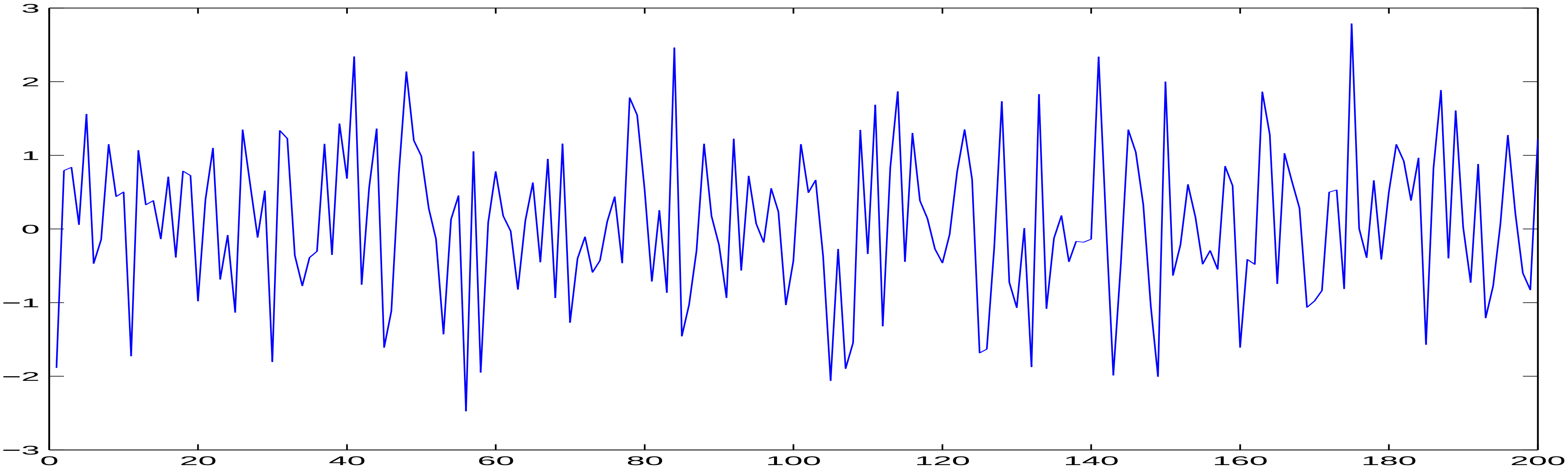
## Příklad náhodného procesu – Gaussovský bílý šum

V Matlabu funkce `randn` – jednotlivé vzorky na sobě nezávisí, funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je dána Gaussovým rozložením:

$$p(x) = \mathcal{N}(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2}}$$

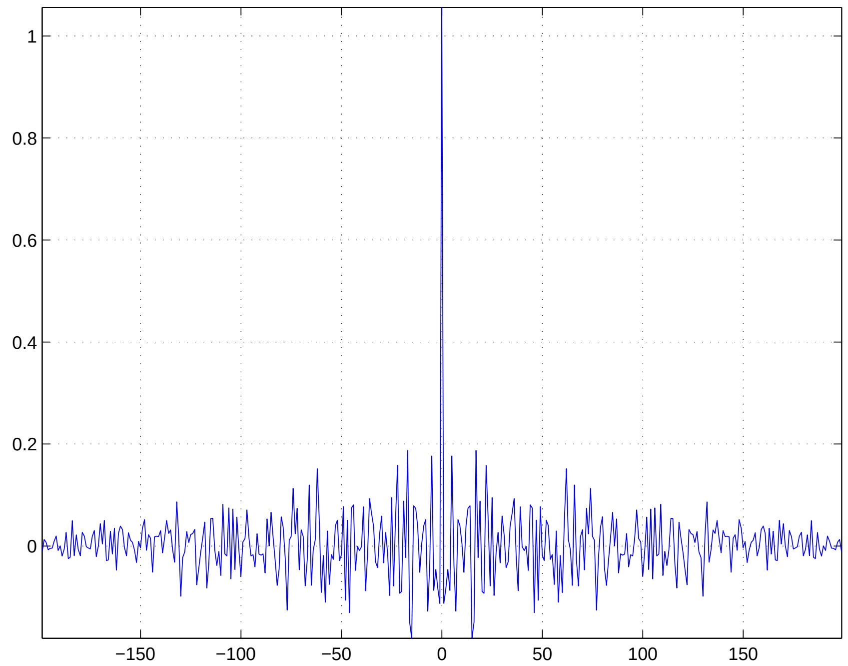



Generování v Matlabu: `x = sigma*randn(1,N) + mu`



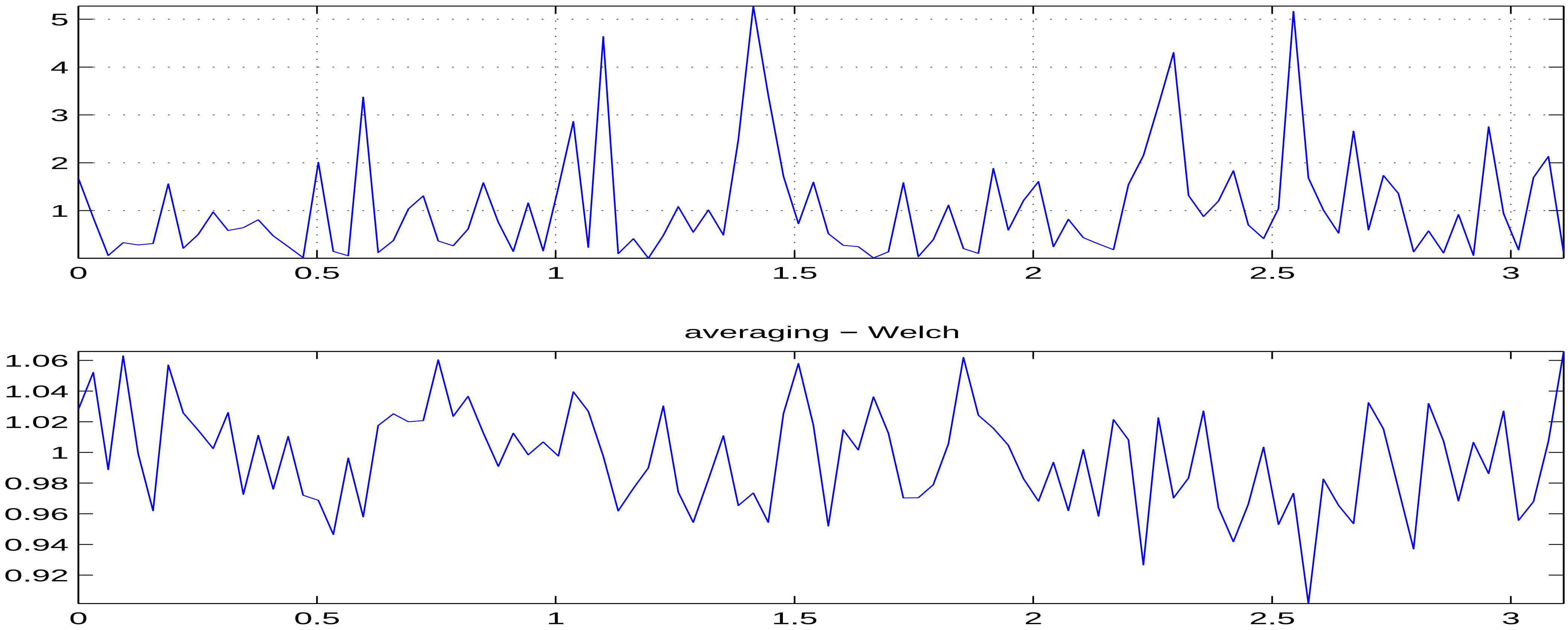

Autokorelační koeficienty:

$$R[0] = \mu^2 + D, \qquad R[k] = \mu^2 \text{ pro } k \neq 0$$




Spektrální hustota výkonu je u bílého šumu **konstantní** (proto bílý):

$$G(e^{j\omega}) = R[0]$$

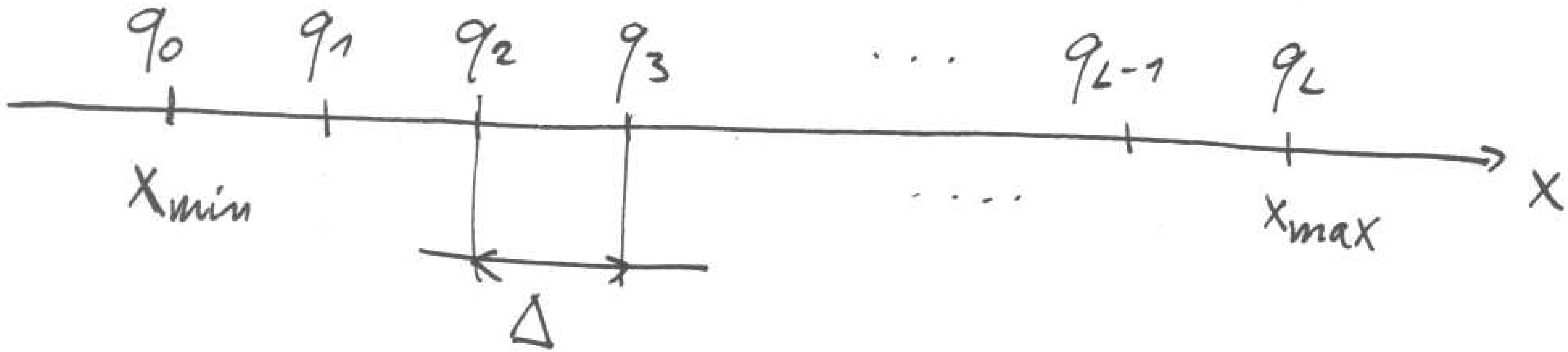



Pro spojitý čas nejde čistě bílý šum vygenerovat: pokud by $G(j\omega)$ byla nenulová pro všechny $\omega$, měl by nekonečný výkon. . .

# Kvantování

Representace vzorků diskrétního signálu $x[n]$ není možná s libovolnou přesností $\Rightarrow$ **kvantování**. Nejčastěji **zaokrouhlujeme** na fixní počet $L$ **kvantovacích hladin**, které jsou očíslované od 0 do $L-1$. Pokud máme na kvantování k disposici $b$ bitů, $L = 2^b$.

**Uniformní kvantování** má rovnoměrné rozložení kvantovacích hladin $q_0 \ldots q_{L-1}$ od minimální hodnoty signálu $x_{min}$ do maximální hodnoty $x_{max}$:




**Kvantovací krok** $\Delta$ je dán:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L-1},$$

pro velká $L$ můžeme použít přibližný vztah:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L}.$$

**Kvantování:** pro hodnotu $x[n]$ je index nejlepší kvantovací hladiny dán:

$$i[n] = \arg \min_{l=0 \ldots L-1} |x[n] - q_l|,$$

a kvantovaný signál je:

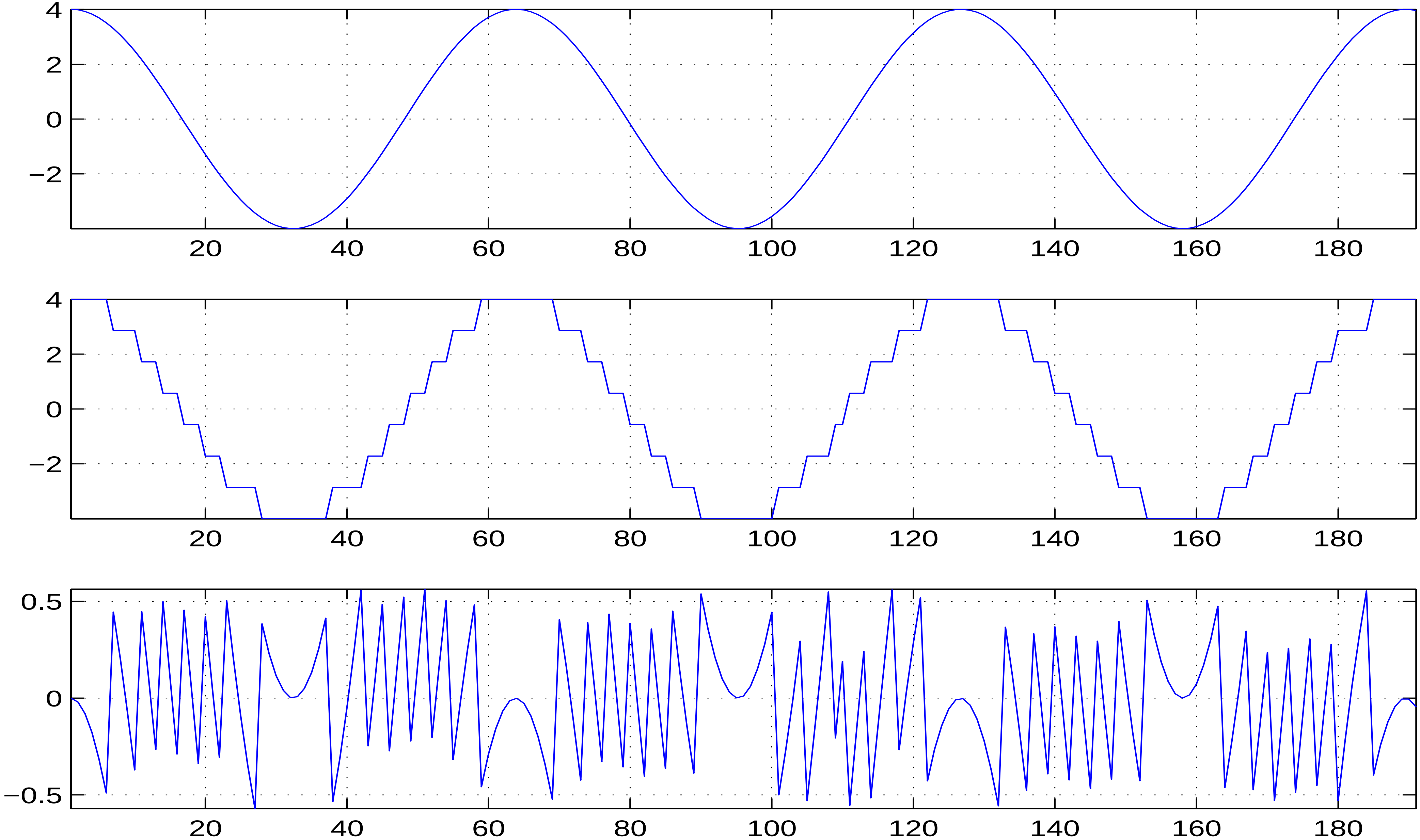
$$x_q[n] = q_{i[n]}.$$

**Chyba kvantování**:

$$e[n] = x[n] - x_q[n].$$

může být také považována za **signál**.

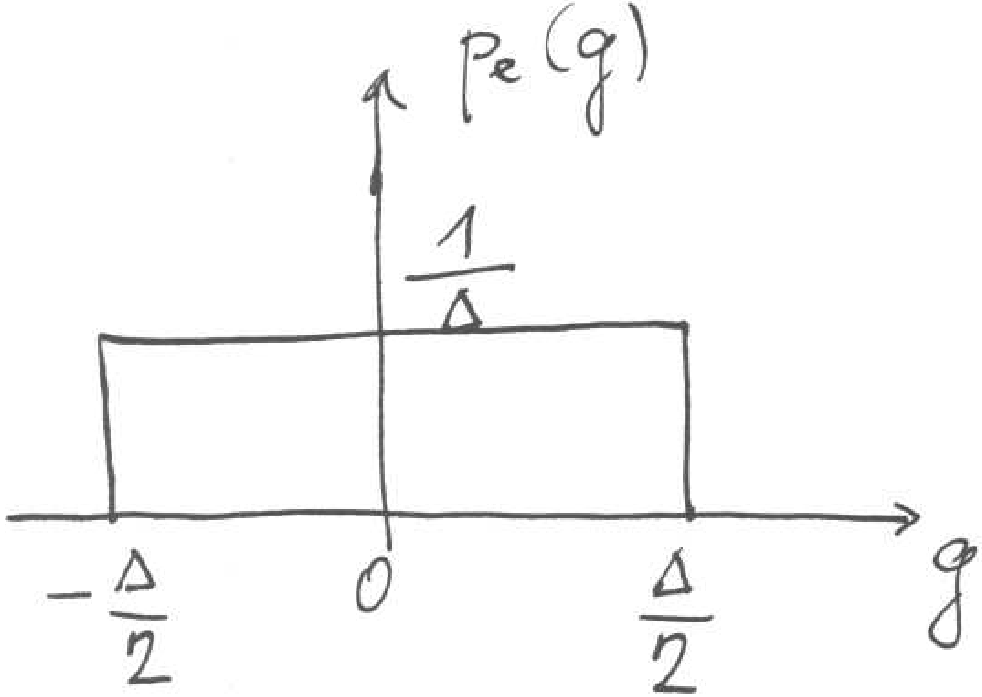
Ilustrace na kvantování kosinusovky $x[n] = 4\cos(0.1n)$, $L = 8$:



Abychom zjistili, jak je signál kvantováním narušen, bude dobré spočítat **výkon** chybového signálu $P_e$ a srovnat jej s výkonem užitečného signálu $P_s$: **poměr signálu k šumu – signal-to-noise ratio (SNR)**:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} \quad \text{[dB]}.$$

Pro výpočet výkonu chybového signálu využijeme teorie **náhodných procesů**: neznáme hodnoty $e[n]$, ale víme, že budou v intervalu $[-\frac{\Delta}{2}, +\frac{\Delta}{2}]$ a že budou rovnoměrně rozložené. Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti pro $e[n]$ bude:



…výška $\frac{1}{\Delta}$ vychází z toho, že plocha:

$$\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} p_e(g)dg \stackrel{!}{=} 1.$$

Tento proces má nulovou střední hodnotu (snadno bychom zjistili, že $\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} gp_e(g)dg = 0$), výkon bude tedy roven **rozptylu**:

$$P_e = D_e = \int_{-\infty}^{\infty} g^2 p_e(g)dg = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} g^2 p_e(g)dg = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{g^3}{3}\right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{3\Delta}\left(\frac{\Delta^3}{8} + \frac{\Delta^3}{8}\right) = \frac{\Delta^2}{12}$$

## Výpočet SNR pro kosinusovku

amplituda $A$, kosinusovka má výkon $P_s = \frac{A^2}{2}$
$x_{min} = -A$, $x_{max} = A$, takže

$$\Delta = \frac{2A}{L} \qquad P_e = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{4A^2}{12L^2} = \frac{A^2}{3L^2}.$$

Poměr signálu k šumu:

$$SNR = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_e} = 10\log_{10}\frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{A^2}{3L^2}} = 10\log_{10}\frac{3L^2}{2}.$$

Pokud máme k disposici $b$ bitů a počet kvantovacích hladin $L = 2^b$:

$$SNR = 10\log_{10}\frac{3}{2}(2^b)^2 = 10\log_{10}\frac{3}{2} + 10\log_{10}2^{2b} = 1.76 + 20b\log_{10}2 = 1.76 + 6\,b \text{ dB}.$$

Konstanta 1.76 závisí na charakteru signálu (cos, šum), ale platí, že **přidání/ubrání jednoho bitu zlepšuje/zhoršuje SNR o 6 dB**.

**Příklad:** kosinusovky s $A = 4$ kvantované na $L = 8$ hladinách:

$$SNR_{teor} = 1.76 + 3 \times 6 = 19.76 \text{ dB}$$

$$SNR_{exp} = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s^2[n]}{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^2[n]} = 19.36 \text{ dB}$$

Matlab: `snr = 10*log10 (sum(x.^2) / sum(e.^2))`

...celkem to vychází.