Vzorkování

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

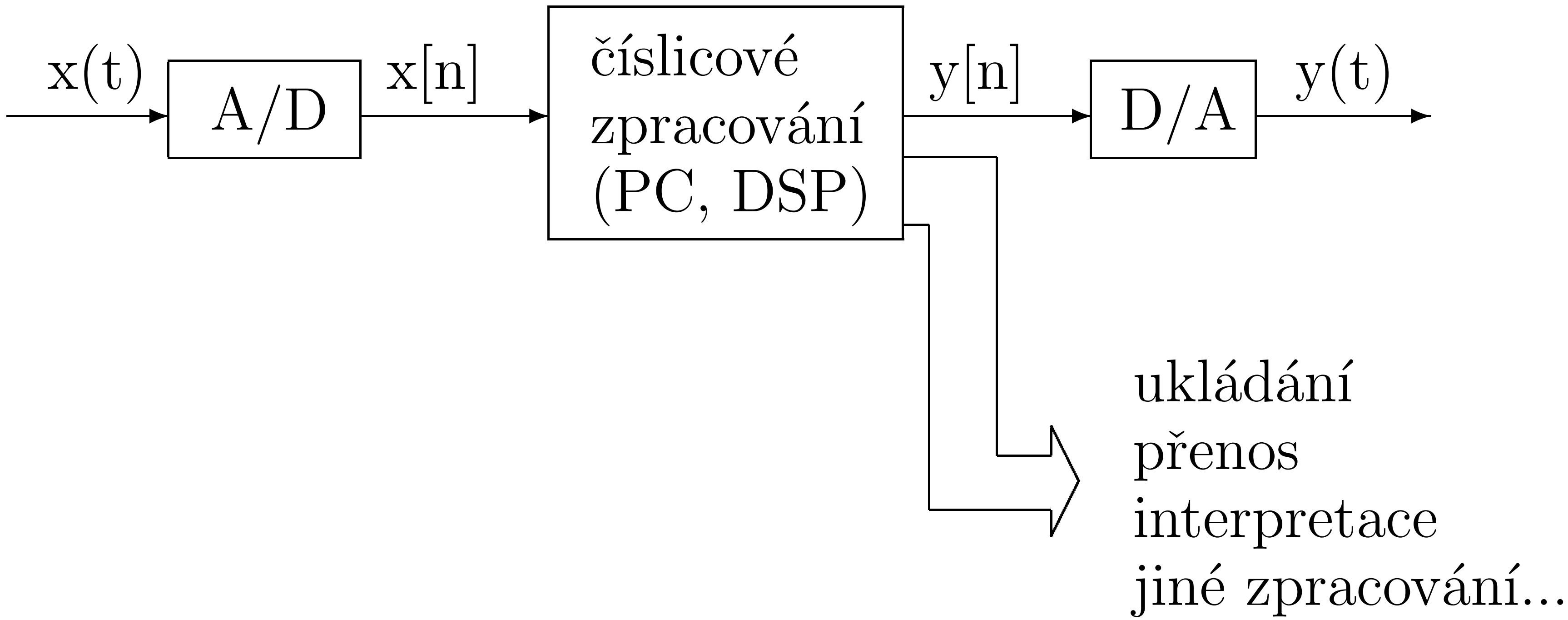
- Ideální vzorkování – spektrum navzorkovaného signálu.
- Aliasing, Shannonův teorém.
- Ideální rekonstrukce.
- Normalizovaný čas a frekvence.

Opakování – Proč číslicové zpracování signálů ?

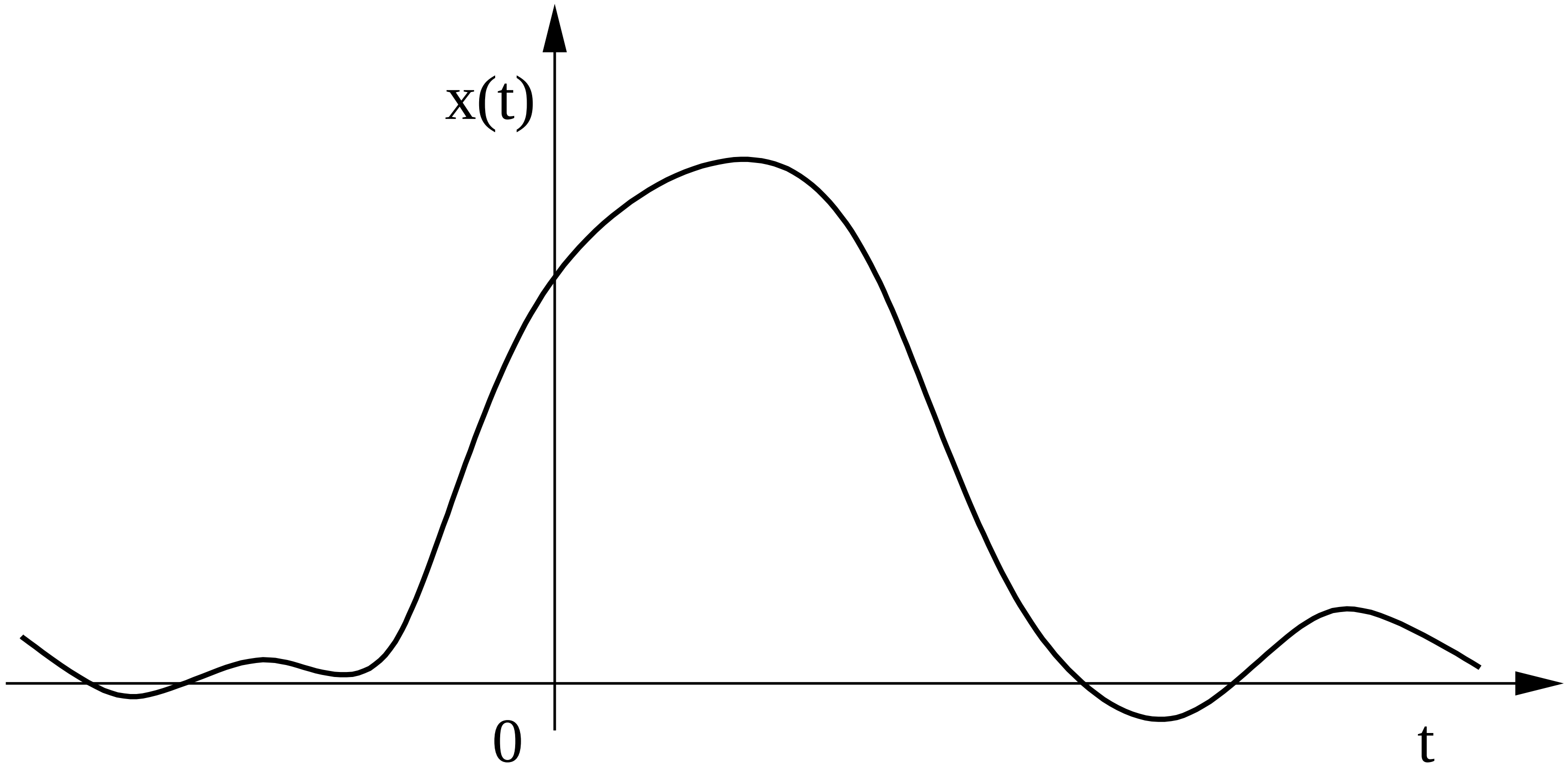
Protože má oproti klasickému (i když dnes už je vlastně klasické číslicové. . .) neboli analogovému některé nesporné výhody:

- reproduktibilita (neexistují žádné tolerance součástek).
- neexistují změny kvůli stárnutí materiálů a teplotě.
- nemusí se složitě nastavovat (viděli jste, kolik je ve starých rádiích odporových trimrů?).
- možnost adaptivního zpracování (“přístroj se mění podle vstupního signálu”).
- simulace = aplikace.
- kompatibilní s boomem výpočetní techniky, Internetu, mobilních telekomunikací.

Jak vypadá signál a co s ním obvykle děláme



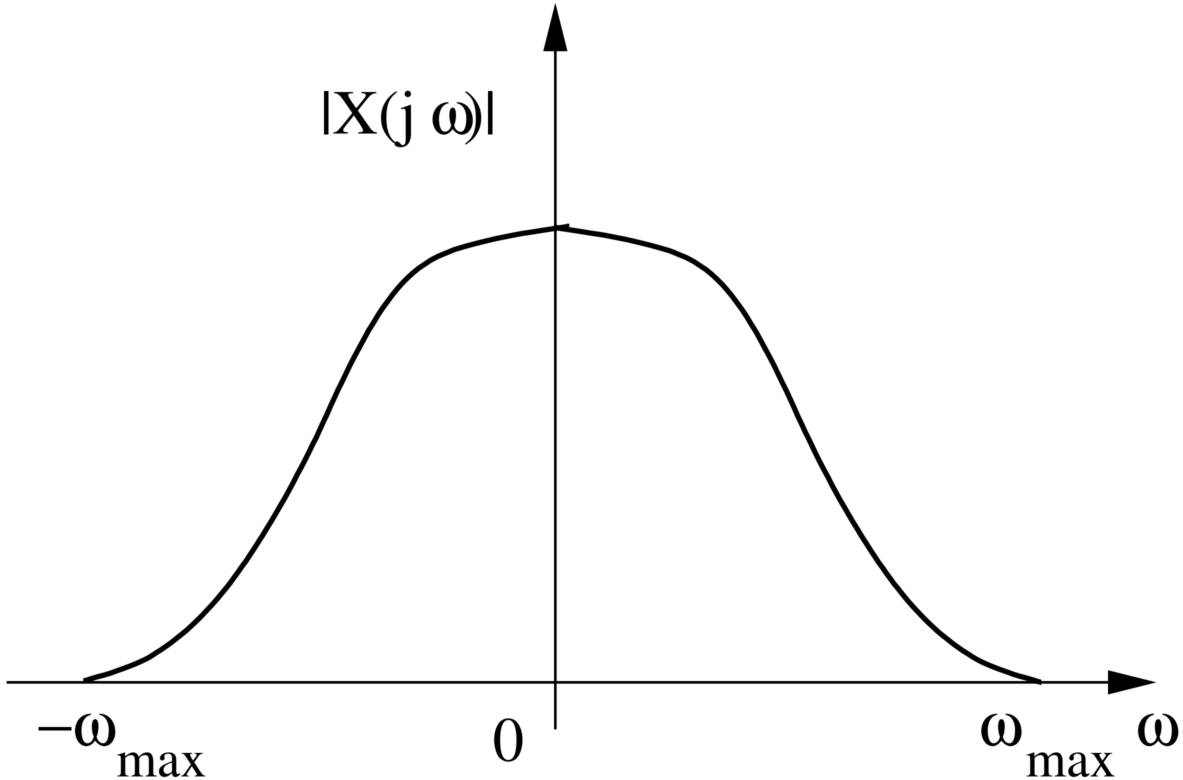
Na začátku zpracování je signál se spojitým **časem**: je definován všude od $-\infty$ do ∞, a čas má ∞ hodnot.



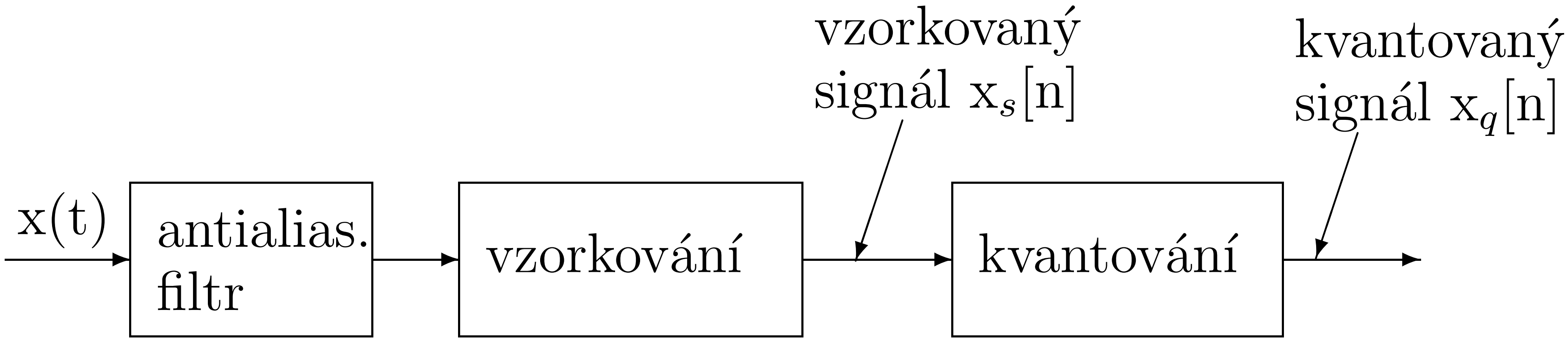
Pro representaci signálu ve **frekvenční oblasti** použijeme Fourierouvu transformaci:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{-\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt, \tag{1}$$

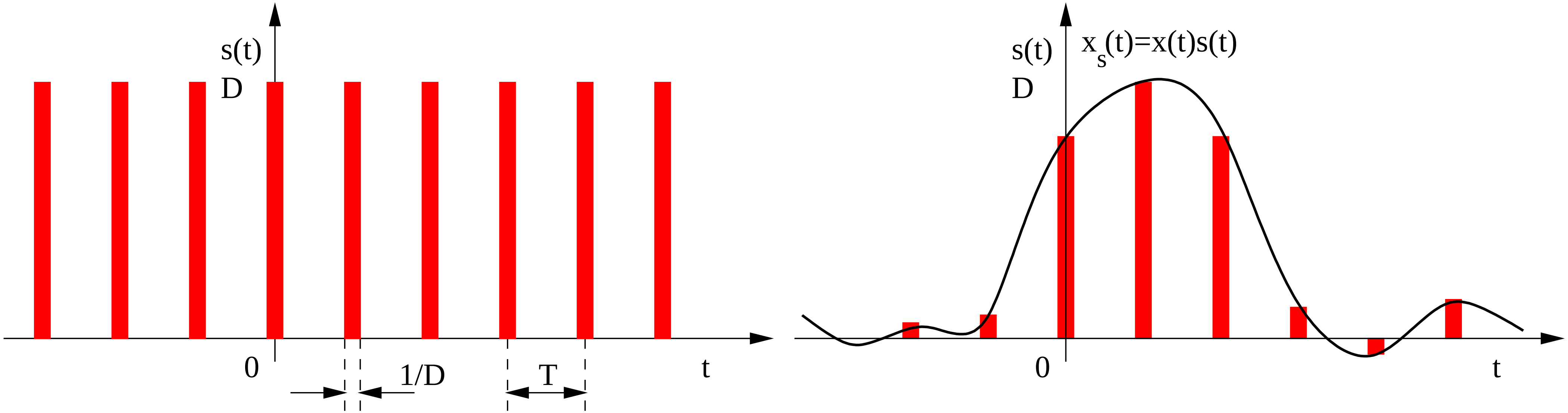
kde funkci $X(j\omega)$ říkáme **spektrální funkce**, nebo krátce **spektrum**. Inteligentní signály jsou frekvenčně omezené (energie je soustředěna do pásma $(0, \omega_{max})$).



Analogově – číslicový (AD) převod

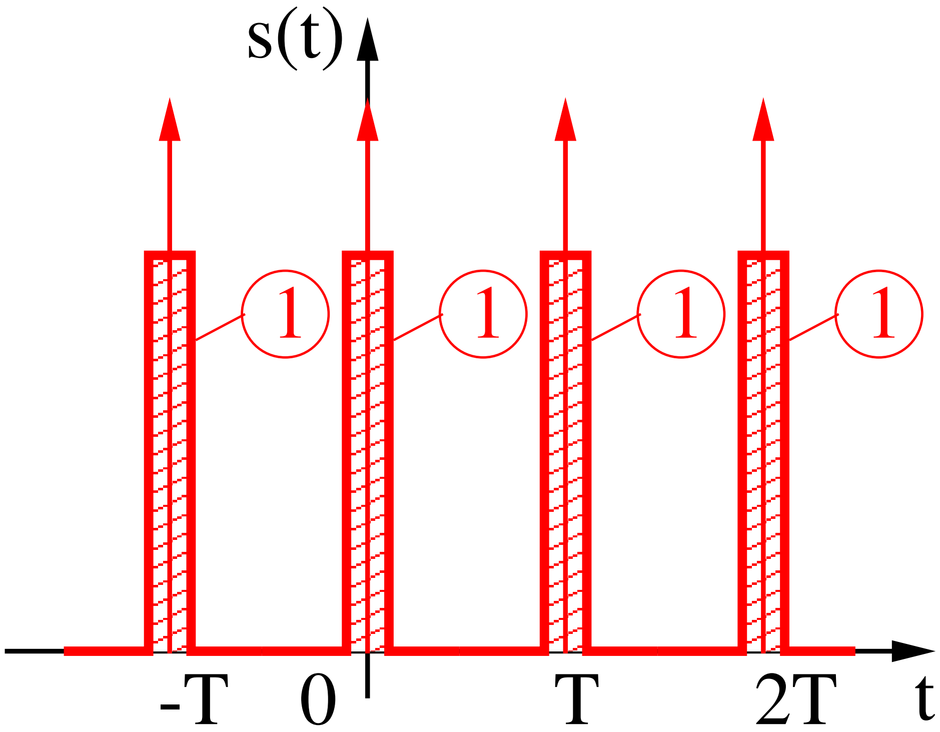


Vzorkovaný signál dostaneme tak, že původní signál vynásobím něčím, co je periodické v čase. Signálu $s(t)$ říkáme vzorkovací (samplovací).



Teoreticky vysvětlujeme vzorkování tak, že násobíme signál periodickým sledem Diracových impulsů. Budeme si muset odvodit spektrální funkci takového signálu :-(

Spektrální funkce periodického sledu obdélníkových impulsů



Dirakové mají periodu T. Pro nalezení spektrální funkce nejprve spočítáme koeficienty Fourierovy řady periodického sledu Diracových impulsů. Pro periodický sled obdélníků o šířce ϑ, výšce D a periodě T jsme našli tyto koeficienty:

$$c_k = \frac{D\vartheta}{T}\mathsf{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\Omega\right)$$

Představme si, že Diracův impuls vyjádříme pomocí takového obdélníkového impulsu: D musí být $D = \frac{1}{\vartheta}$, aby vycházela plocha 1. Pak začneme utahovat svěrák, $\vartheta \rightarrow 0$, $\frac{1}{\vartheta} \rightarrow \infty$, ale plocha bude stále 1. Co se stane s koeficienty:

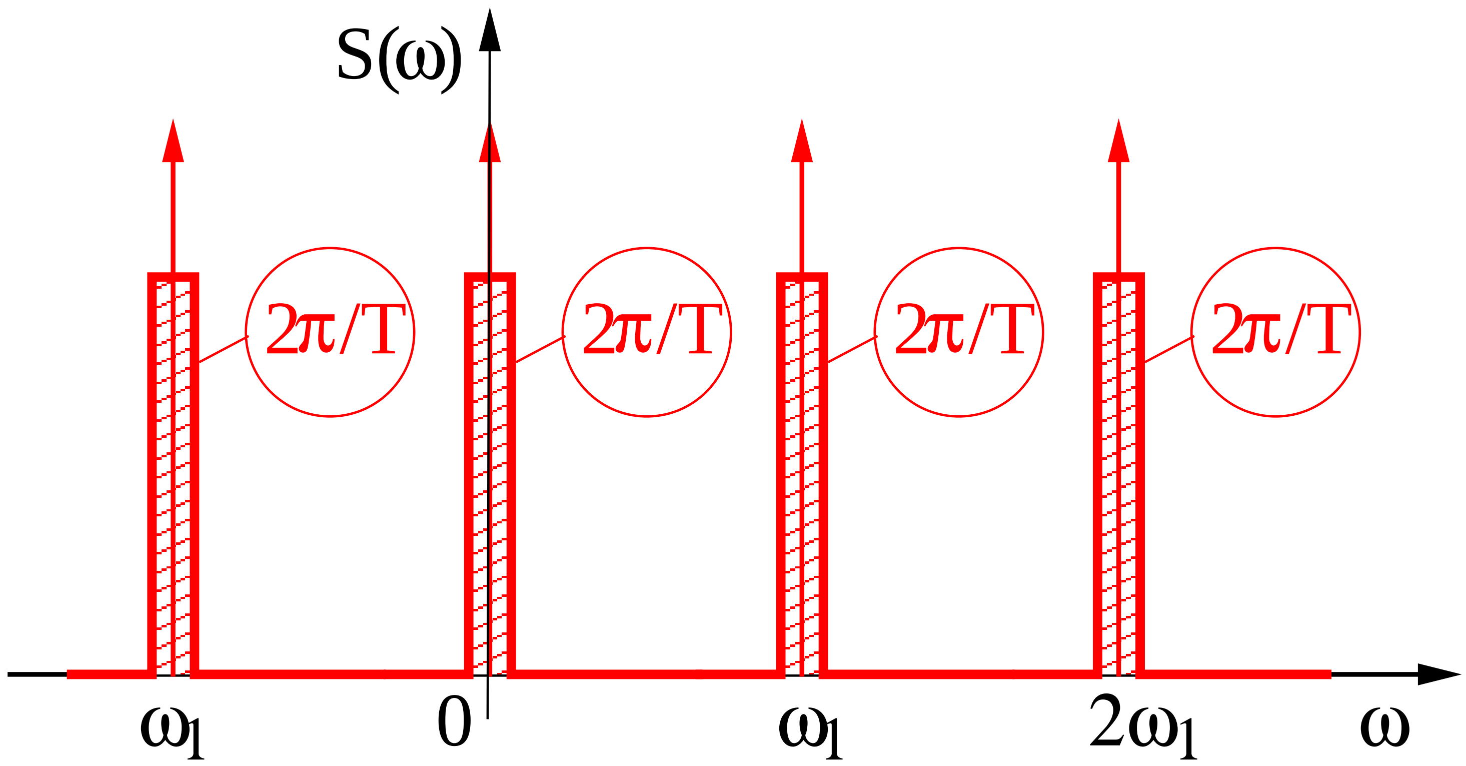
$$c_k = \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\vartheta}\vartheta}{T} \mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\Omega\right) = \frac{1}{T}\mathrm{sinc}(0) = \frac{1}{T}$$

Pro periodický sled Diraků tedy platí, že má **všechny koeficienty FŘ rovny** $1/T$

Konverze koeficientů FŘ na spektrální funkci se provádí tak, že naperiodizujeme Diraky (a umístíme je na každý násobek základní kruhové frekvence) a jejich mocnosti položíme rovny koeficientům FŘ, takže pro náš signál:

$$S(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - k\omega_1)$$

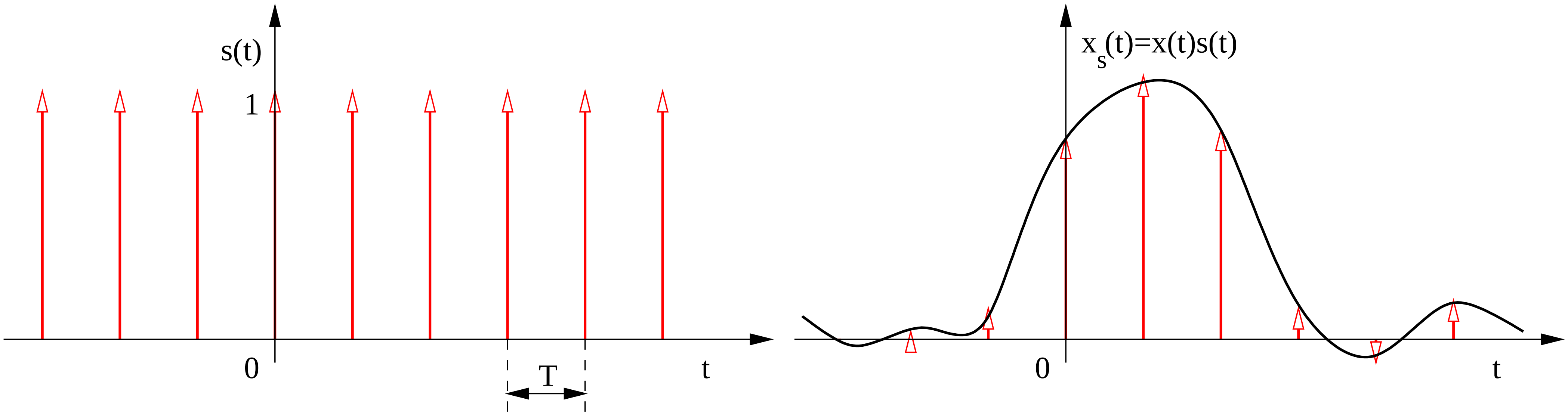
Výsledek je zajímavý – spektrum periodického sledu Diraků (perioda T) je opět periodický sled Diraků (perioda $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$).


S(ω)
2π/T
2π/T
2π/T
2π/T
ω1
0
ω1
2ω1
ω

Násobení sledem Diraků

Vynásobíme-li signál periodickým sledem Diracových signál $x(t)$, dostaneme opět periodický sled Diracových impulsů, ale s mocnostmi danými hodnotami původního signálu v bodech nT:

$$x_s(t) = x(t)s(t)$$



T je **vzorkovací perioda** a $F_s = \dfrac{1}{T}$ je **vzorkovací frekvence**

Spektrum vzorkovaného signálu

v čase jsme původní a vzorkovací signál násobili. Ve spektru tedy musíme **konvoluovat**:

$$X_s(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)s(t)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\nu)X(\omega-\nu)d\nu =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\nu-k\omega_1)\right]X(\omega-\nu)d\nu = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega-\nu)\delta(\nu-k\omega_1)d\nu =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_1).$$

Při výpočtu používáme pomůcku:

$$\int f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0),$$

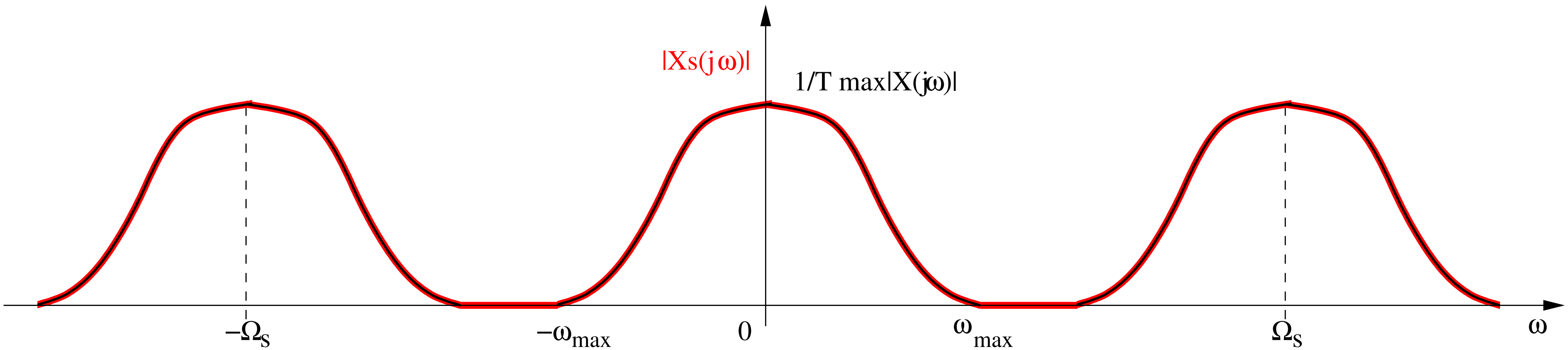
ve které dosazujeme: $x=\nu$, $f(x)=X(\omega-\nu)$, $x_0=k\omega_1$.

Spektrum původního signálu se periodizuje a všechny kopie se sečtou.

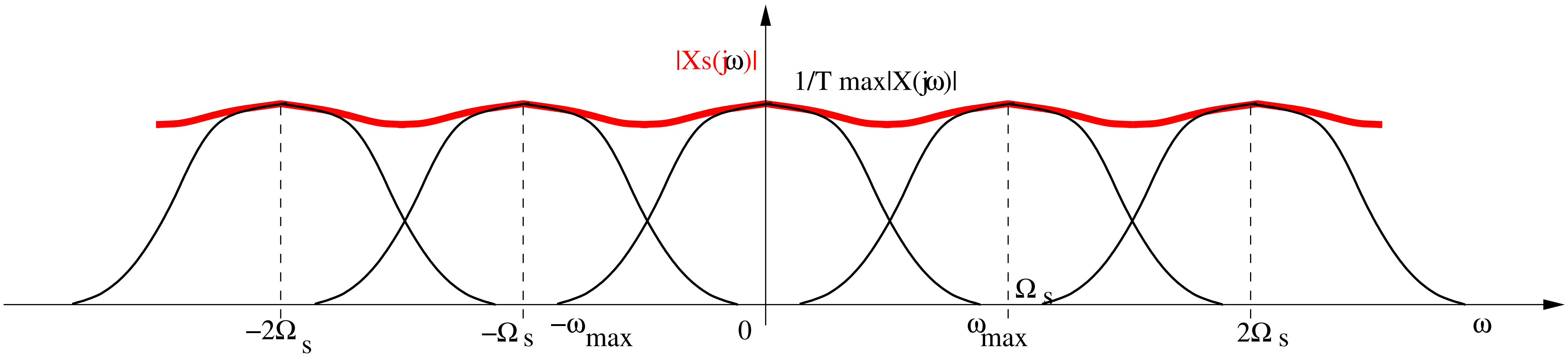
Vzorkovací teorém a aliasing

Podle vztahu maximální frekvence obsažené ve spektru signálu ω_{max} a vzorkovací frekvence $\Omega_s = 2\pi F_s$ rozlišujeme dva případy:

1) $\Omega_s > 2\omega_{max}$: Jednotlivé kopie původního spektra se nepřekrývají a původní signál můžeme *ideálně rekonstruovat*.



2) $\Omega_s \leq 2\omega_{max}$: Jednotlivé kopie původního spektra se překrývají, výsledné spektrum má *jiný* tvar než původní spektrum. Původní signál *nemůžeme* žádným způsobem rekonstruovat, dochází k takzvanému **aliasingu**.



Podmínka pro správné vzorkování se jmenuje **Shannonův alias Kotelnikovův alias Nyquistův alias vzorkovací teorém**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega_s > 2\omega_{max} \\ \text{nebo} \\ F_s > 2f_{max} \end{array}}$$

Poznámky:

- dodržujeme i tam, kde není požadována zpětná rekonstrukce signálu (rozpoznávání).
- prakticky není možné zkonstruovat zcela "pravoúhlou" dolní propusť se zesílením/útlumem T od $-\omega_{max}$ do $+\omega_{max}$ a 0 jinde. Běžné rekonstrukční filtry mají útlum v závěrném pásmu 30–40 dB.

Rekonstrukce

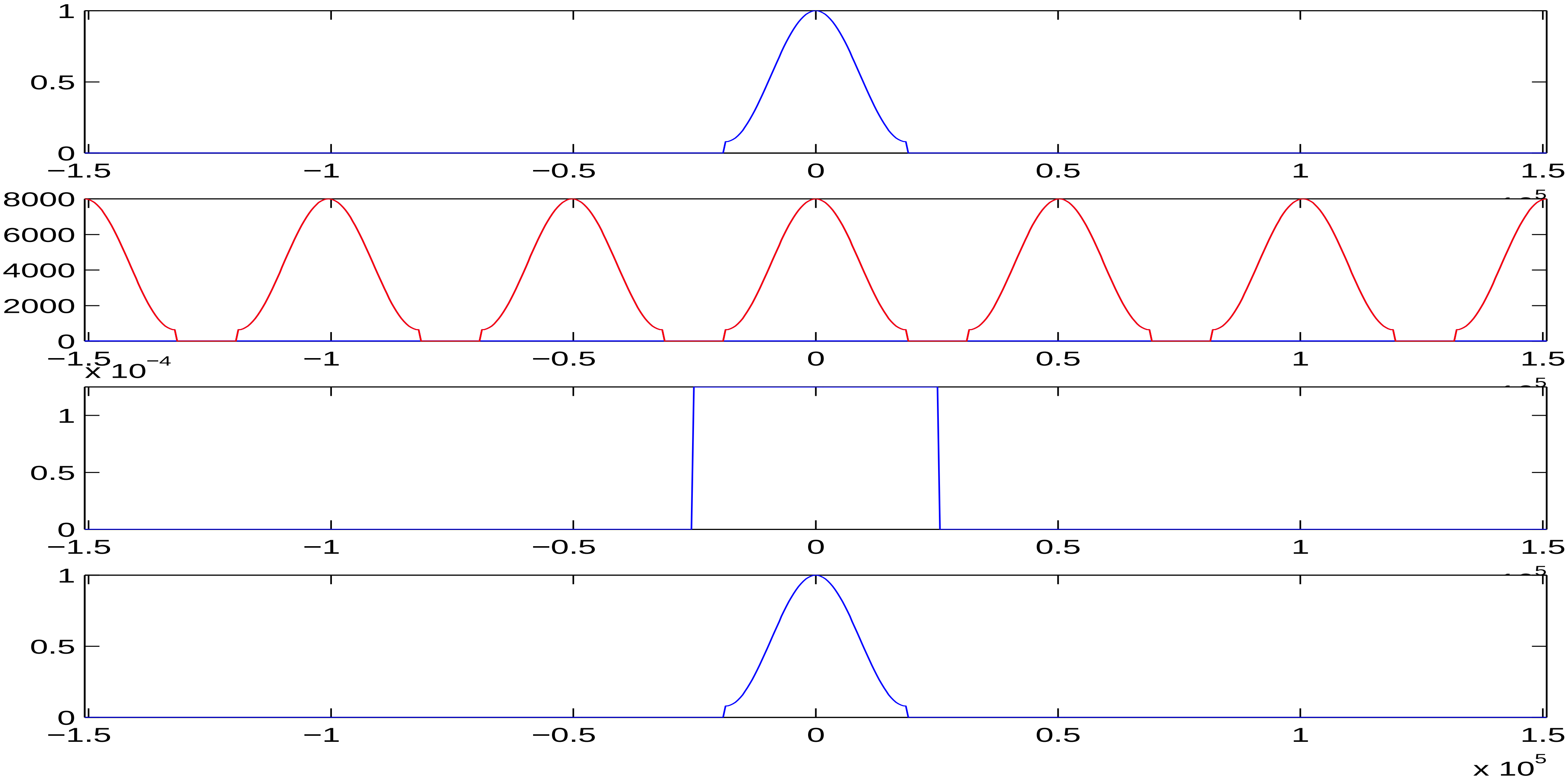
probíhá tak, že vzorkovaný signál vyfiltrujeme dolní propustí s mezním kmitočtem $\Omega_s/2$:

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & \text{pro} \quad -\Omega_s/2 < \omega < \Omega_s/2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Hodnota frekvenční charakteristiky v propustném pásmu je T, abychom dostali stejnou velikost původního spektra ($\frac{1}{T}T = 1$).

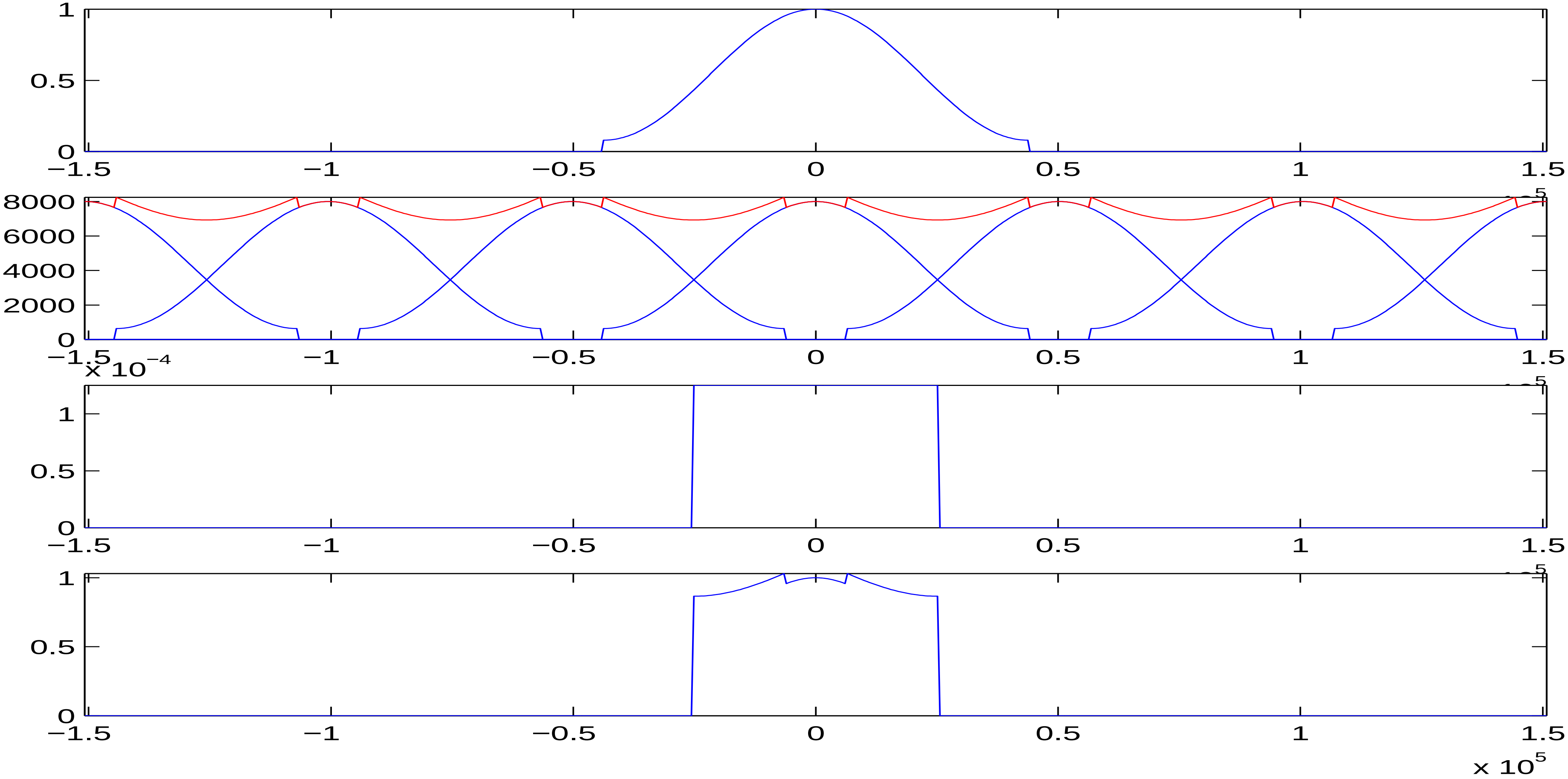
1. Příklad vzorkování a rekonstrukce – OK

$F_s = 8000\ Hz$, $f_{max} = 3000\ Hz$, a tedy $\Omega_s = 16000\pi$ rad/s, $\omega_{max} = 6000\pi$ rad/s.
$T = \frac{1}{8000}$ s



2. Příklad vzorkování a rekonstrukce – BAD

$F_s = 8000\ Hz$, $f_{max} = 7000\ Hz$, a tedy $\Omega_s = 16000\pi$ rad/s, $\omega_{max} = 14000\pi$ rad/s.
$T = \frac{1}{8000}$ s

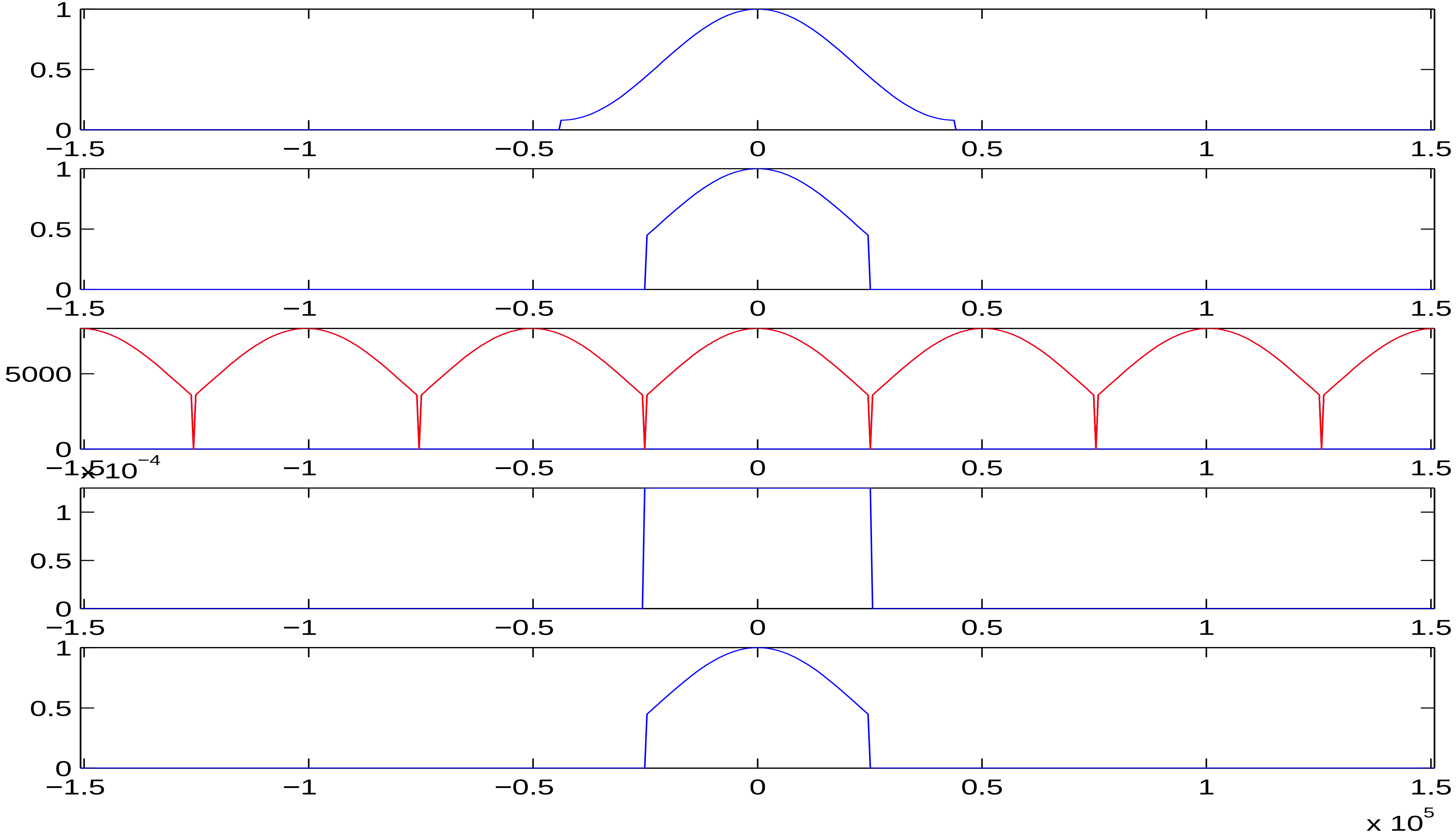


Antialiasingový filtr

Co dělat, když máme vzorkovat signál, který nesplňuje vzorkovací teorém, ale nemůžeme pohnout se vzorkovací frekvencí ? Před vzorkováním budeme filtrovat antialiasingovým filtrem, který odřeže vše, co je za polovinou vzorkovací frekvence. Spektrum signálu se tak "předmrší", o frekvence za $\Omega_s/2$ přijdeme, ale část, kterou jsme vyřízli, už nebude ovlivněna aliasingem.

$$H_{aa}(j\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -\Omega_s/2 < \omega < \Omega_s/2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Příklad 2. s anti-aliasingovým filtrem:



Rekonstrukce v časové oblasti

...aneb co dělá ideální dolní propusť se vzorky ? Filtrování rekonstrukčním filtrem s frekvenční charakteristikou $H_r(j\omega)$:

$$H_r(j\omega) = \begin{cases} T & \text{pro} \quad -\Omega_s/2 < \omega < \Omega_s/2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

odpovídá konvoluci s jeho impulsní odezvou $h_r(t)$. Impulsní odezva je zpětnou Fourierovou transformací, pro obdélníkový impuls ve spektru už jsme ji viděli:

$$h_r(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_r(j\Omega_s)e^{+j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} Te^{+j\omega t}d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\Omega_s/2}^{\Omega_s/2} e^{+j\omega t}d\omega =$$

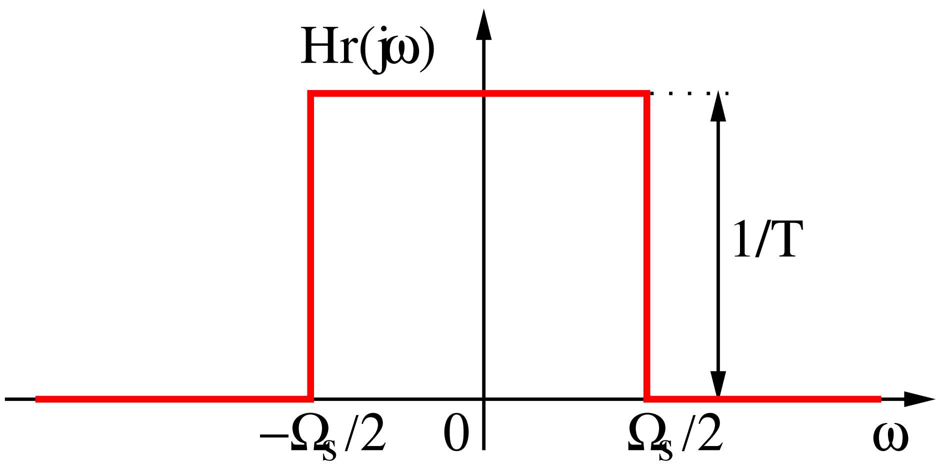
jako obvykle nám pomůže Šebestova pomůcka: $\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy}dy = 2b\ \mathrm{sinc}(bx)$, kam dosadíme $\vartheta = \Omega_s/2$, $y = \omega$ a $x = t$. Dostaneme:

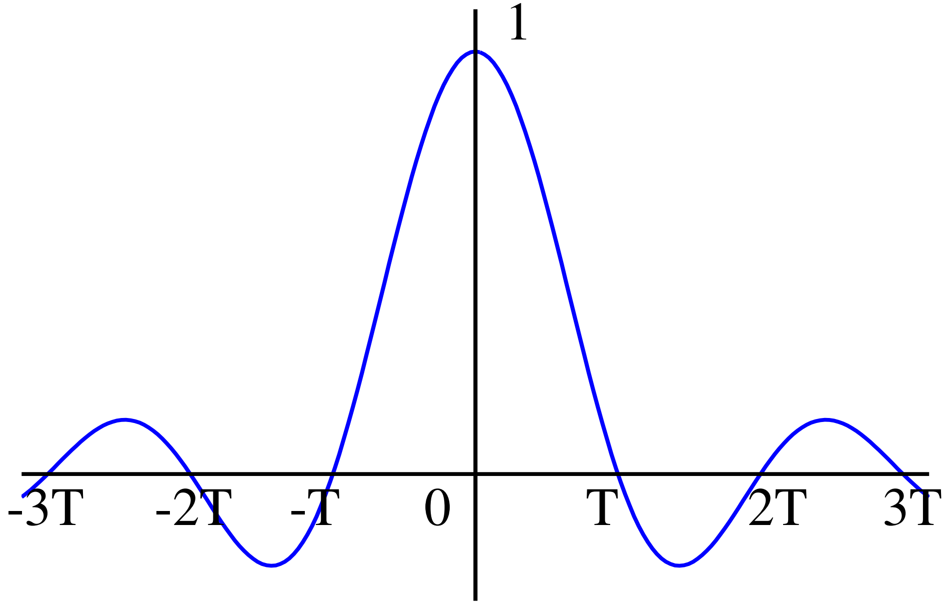
$$h_r(t) = \frac{T}{2\pi}\Omega_s \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2}t\right) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2}t\right)$$

Kardinální sinus bude mít maximální hodnotu 1 a osu t protne v bodě:

$$\frac{\Omega_s}{2} t = \pi, \quad \text{tedy} \quad t = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\pi T}{T} = T.$$

To je docela zajímavé:





Rekonstruovaný signál zapíšeme v časové oblasti jako:

$$x_r(t) = h_r(t) \star x_s(t)$$

Nebudeme odvozovat, ale uvědomíme si, že pokud konvoluujeme se sekvencí Diracových impulsů (a $x_s(t)$ je takovou sekvencí), spustí každý Diracův impuls jednu kopii impulsní odezvy, posune ji tam, kde ležel a vynásobí ji svou mocností.

Pro jeden Dirac v navzorkovaném signálu:

$$x(nT)\delta(t-nT) \longrightarrow x(nT)\mathsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2}(t-nT)\right),$$

a pro všechny Diracy se všechny tyto impulsní odezvy **sečtou**:

$$y_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\mathsf{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2}(t-nT)\right).$$

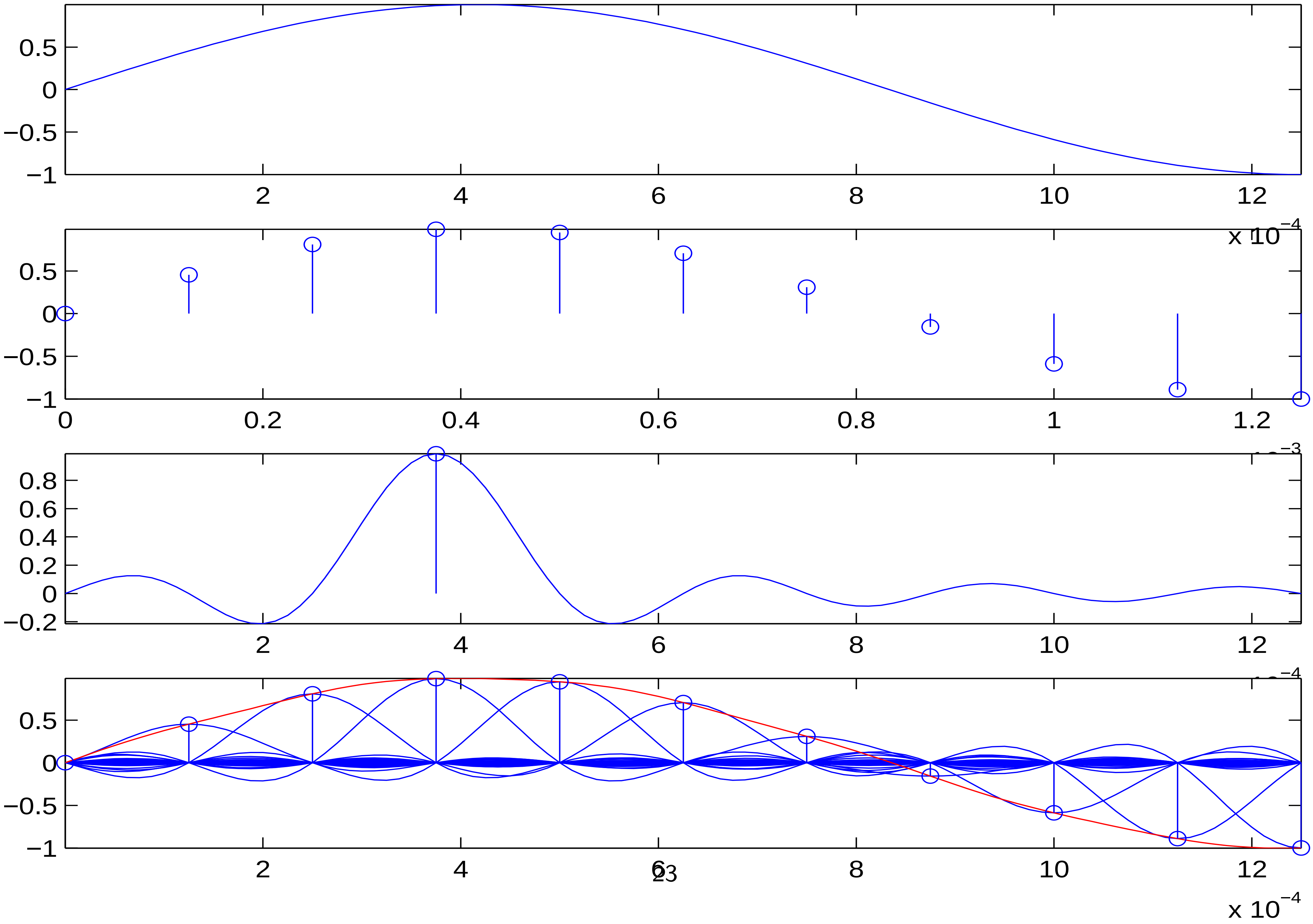
Uvědomme si, že funkce sinc **interpolují hodnoty** mezi jednotlivými vzorky. Dále si uvědomme, že každá funkce sinc prochází pro sousední vzorky přesně nulou, hodnota rekonstruovaného signálu v místech nT je tedy dána přesně vzorky $x(nT)$, mezi vzorky se projeví především interpolace sousedních dvou vzorků, ale také všech ostatních "kamarádů".

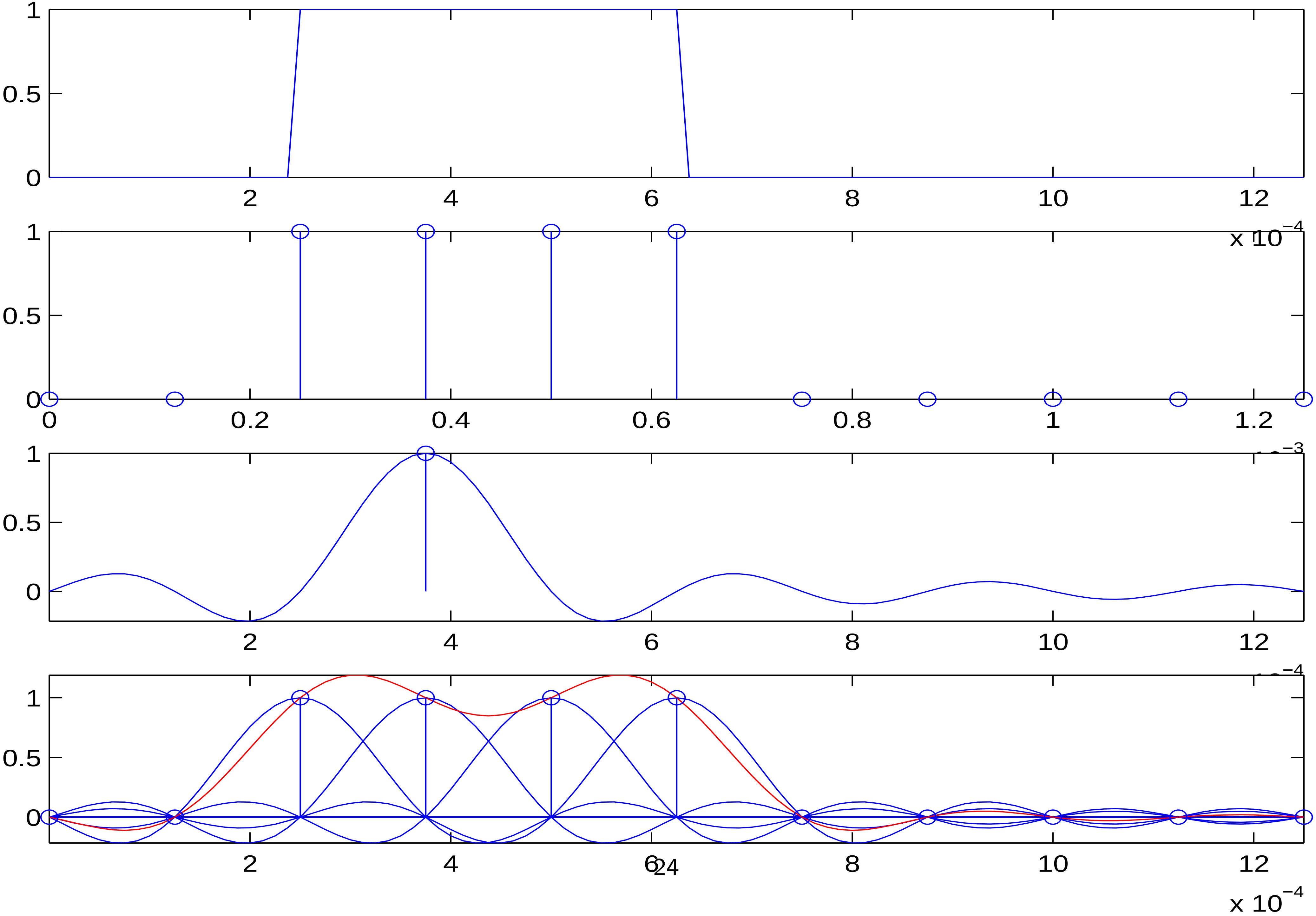
Rekonstrukce v časové oblasti

Ilustrace 1:
$F_s = 8000$ Hz, $\Omega_s = 16000\pi$ rad/s, $T = 1/8000$ s. Vzorkujeme signál: $x(t) = \sin(2\pi 600t)$ na frekvenci 600 Hz.

Ilustrace 2. $F_s = 8000$ Hz, $\Omega_s = 16000\pi$ rad/s, $T = 1/8000$ s. Vzorkujeme obdélníkový impuls s hodnotami 1 od $2T$ do $5T$, 0 jinde.

a jé je, co se stalo ? Proč není stejný jako originál ???


0.5
0
−0.5
−1
2
4
6
8
10
12
x 10^{-4}
0.5
0
−0.5
−1
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
2
4
6
8
10
12
0.5
0
−0.5
−1
2
4
6
8
10
12
x 10^{-4}


1
0.5
0
2
4
6
8
10
12
x 10^−4
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
x 10^−3
x 10^−4
x 10^−4

Zápis vzorkovaného signálu

signál $x_s(t)$ stačí vyjádřit mocnostmi jednotlivých Diraců, což jsou čísla $x_s(nT)$. Jelikož se jedná pouze o **posloupnost čísel – diskrétní signál**, stačí, když ho zapíšeme standardně jen pomocí "počítadla" n: $x_s[n]$.

Máme-li vzorkovaný signál, musíme k němu dostat i informaci o vzorkovací frekvenci (implicitně: vzorky přicházejí do signálového procesoru s periodou T, explicitně: např. hlavička souboru WAV).

Počítáme-li se vzorkovanými signály, rádi se času zcela zbavíme. Záměnu nT za obyčejné n si můžeme představit jako přechod k tzv. normalizovanému času, který se provede dělením vzorkovací periodou T:

$$n = \frac{nT}{T}$$

Takže vzorkovací perioda signálu $x_s[n]$ je "jakoby" 1. Takové záměně času ovšem odpovídá také **normalizace frekvence**:

- normální fekvence:

$$f' = \frac{f}{F_s},$$

takže vzorkovací frekvenci F_s bude odpovídat 1.

- kruhová frekvence:

$$\omega' = \frac{\omega}{F_s},$$

takže vzorkovací kruhové frekvenci budou odpovídat 2π.

Pozor!

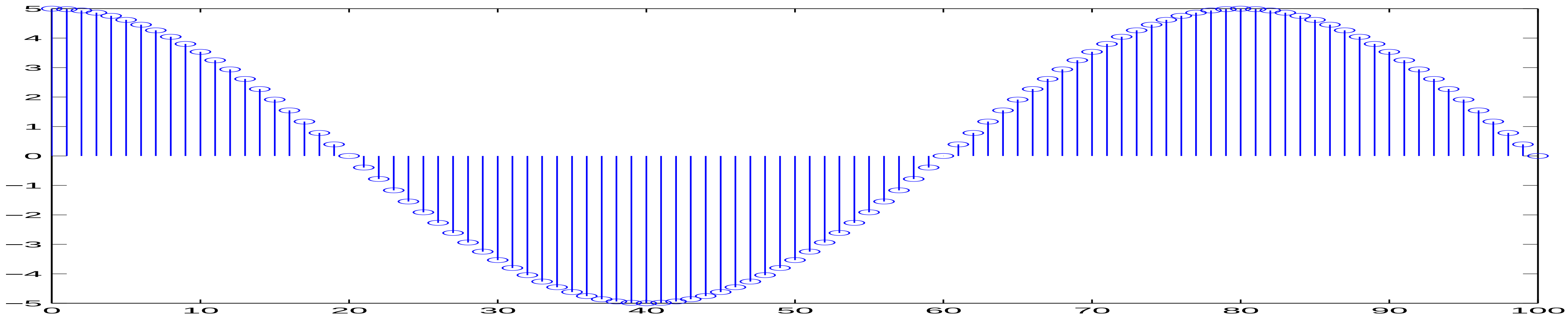
- Jelikož jsou zpracovatelé signálu *lenoši*, většinou žádné čárky nikam nepíší a symbolem ω klidně označí normovanou nebo nenormovanou frekvenci (což jste ostatně už zažili na přednášce o harmonických signálech).
- Ve vzorcích se normovaná frekvence pozná tak, že blízko ní nikde nestojí vzorkovací perioda T.
- přecházíme-li mezi normovanou a nenormovanou frekvencí (je jedno, zda kruhovou nebo obyčejnou), tvar spektra se nemění, mění se pouze hodnoty na ose x.

Příklad 1. Cosinusovka se spojitým časem má kmitočet 100 Hz, amplitudu 5 a nemá počáteční fázi. Zapište rovnicí. Zapište diskrétní verzi této cosinusovky po vzorkování na $F_s = 8000$ Hz a zobrazte pro vzorky $n = 0 \ldots 100$.

Řešení: $f_1 = 100$ Hz, $\omega_1 = 200\pi$ rad/s, $C_1 = 5$.
$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = 5\cos(200\pi t)$.

Normovaná frekvence je dána: $f_1' = \dfrac{f_1}{F_s} = \dfrac{100}{8000} = 0.0125$. $\omega_1' = 0.025\pi$.
$x[n] = C_1 \cos(\omega_1' n + \phi_1) = 5\cos(0.025\pi n)$.

Matlab: `n = 0:100; xn = 5 * cos(0.025 * pi * n); stem(n,xn)`

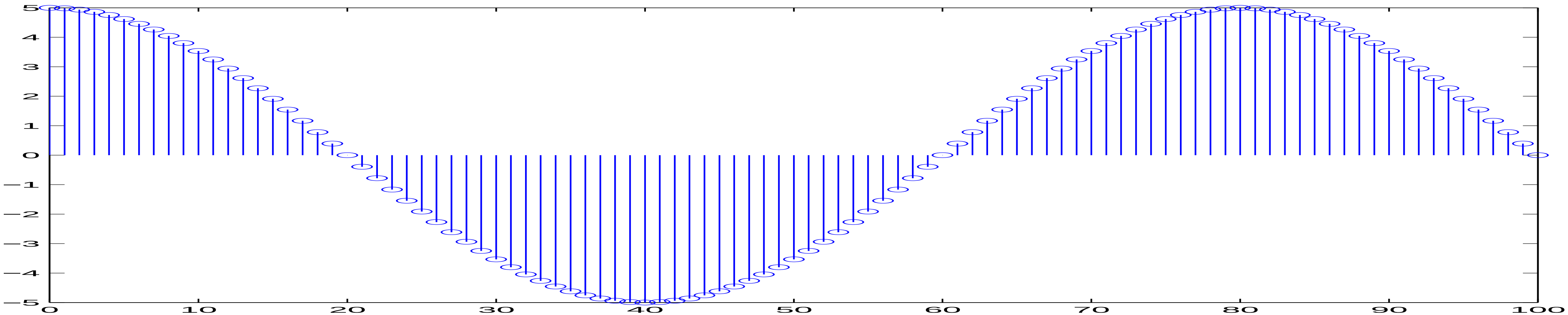


Příklad 2. Cosinusovka se spojitým časem má kmitočet 8100 Hz, amplitudu 5 a nemá počáteční fázi. Zapište rovnicí. Zapište diskrétní verzi této cosinusovky po vzorkování na $F_s = 8000$ Hz a zobrazte pro vzorky $n = 0 \dots 100$.

Řešení: $f_1 = 8100$ Hz, $\omega_1 = 16200\pi$ rad/s, $C_1 = 5$.
$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = 5 \cos(16200\pi t)$.

Normovaná frekvence je dána: $f_1' = \dfrac{f_1}{F_s} = \dfrac{8100}{8000} = 1.0125$. $\omega_1' = 2.025\pi$.
$x[n] = C_1 \cos(\omega_1' n + \phi_1) = 5 \cos(2.025\pi n)$.

Matlab: `n = 0:100; xn = 5 * cos(2.025 * pi * n); stem(n,xn)`



... co se stalo ? Jak to, že jsme dostali stejný signál ?