# Systémy se spojitým časem

**Jan Černocký**

**ÚPGM FIT VUT Brno,** cernocky@fit.vutbr.cz

- LTI systémy – opakování.
- kmitočtová charakteristika $H(j\omega)$.
- průchod signálů systémem s $H(j\omega)$.
- Laplaceova transformace.
- Stabilita a vztah LT s $H(j\omega)$.

## LTI systémy – opakování

- jsou lineární: $ax_1(t) + bx_2(t) \longrightarrow ay_1(t) + by_2(t)$ – tato vlastnost bude užitečná, protože neustále rozkládáme signály na komplexní exponenciály.
- časově invariantní: vlastnosti systému se nemění s časem.
- LTI systémy popisujeme **impulsní odezvou**: vybudíme $\delta(t)$, systém odpoví $h(t)$. Jak vypadá $h(t)$ pro kauzální systémy ?
- reakci na libovolný vstup $x(t)$ získáme pomocí **konvoluce**:

$$y(t) = x(t) \star h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

nebo naopak protože konvoluce je komutativní. Pro kauzální impulsní odezvu:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

# Reakce systému na vstup $e^{st}$,

kde $s$ je libovolné komplexní číslo:

$$y(t) = H(s)e^{st}, \quad \text{kde} \quad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st}dt.$$

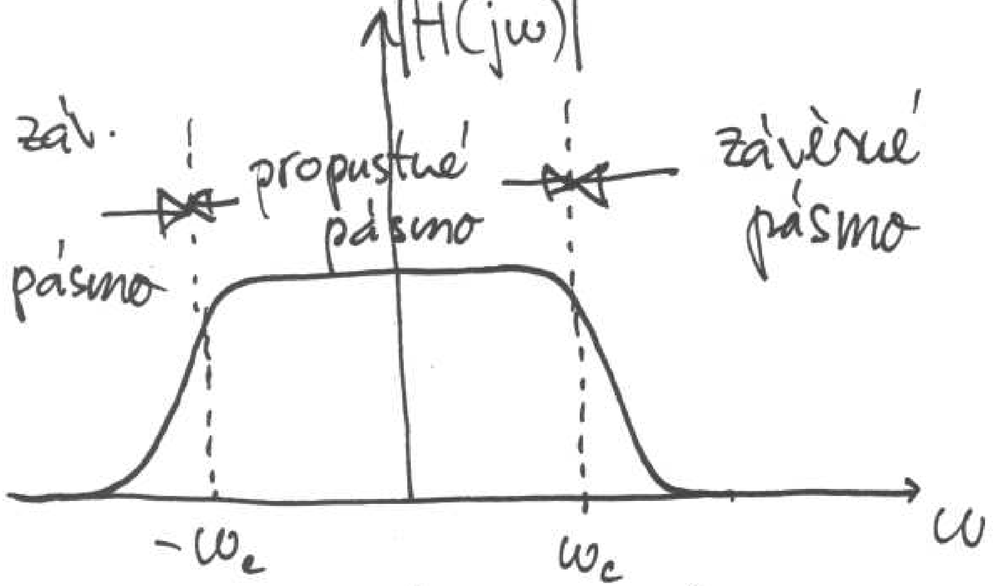
Stejný signál násobený komplexním číslem $H(s)$. Nejvíce nás zajímá $s = j\omega$, vstupem je pak starý známý signál $e^{j\omega t}$. Pak $y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}, \quad$ kde

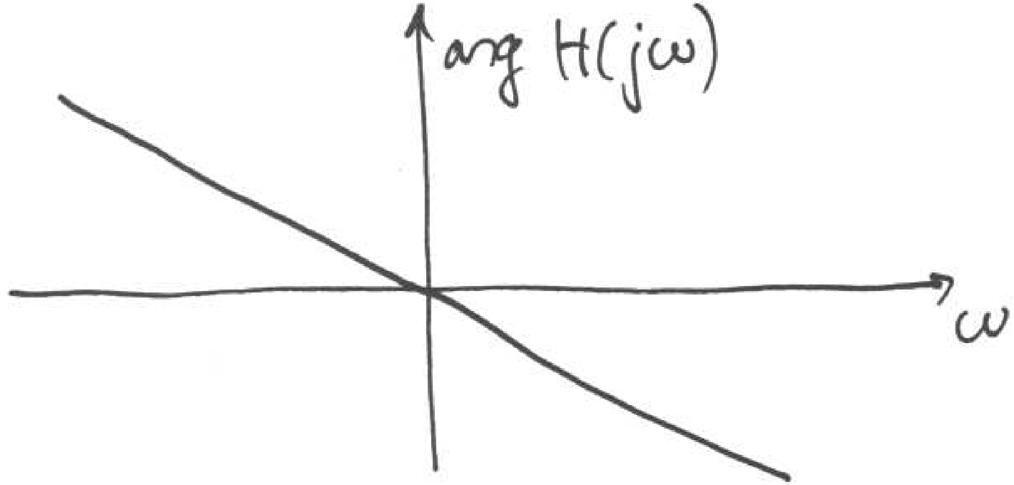
$$\boxed{H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt.}$$

Číslem $H(j\omega)$ bude změněna komplexní exponenciála kroutící se na kruhové frekvenci $\omega$. Číslo nazýváme **přenos** nebo **činitel přenosu**. Hodnotu $H(j\omega)$ můžeme nalézt pro libovolné $\omega$, celou funkci $H(j\omega)$ nazveme **(komplexní) frekvenční charakteristika**. Co o ní můžeme říci ? Je to Fourierova transformace impulsní odezvy: $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$. Jelikož $h(t) \in \Re$, má $H(j\omega)$ některé obvyklé vlastnosti:

$$H(j\omega) = H^{\star}(-j\omega).$$

**Příklad:** $H(j\omega)$ filtru typu dolní propusť (DP):



## Průchod signálů systémem s $H(j\omega)$

**Komplexní exponenciála** $x(t) = c_1 e^{j\omega_1 t}$.

Najdeme hodnotu $H(j\omega_1)$, rozdělíme na modul a argument:

$$y(t) = H(j\omega_1) c_1 e^{j\omega_1 t} = |H(j\omega_1)||c_1| e^{j(\arg c_1 + \arg H(j\omega_1))} e^{j\omega_1 t}.$$

$\Rightarrow$ změní se jen modul a argument koeficientu $c_1$, tj. "tloušťka a předtočení" komplexní exponenciály. Perioda zůstává stejná.

**Kosinusovka** $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$.

Umíme rozložit na $x(t) = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} + \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 t}$. Pracujeme s **lineárním systémem**, takže exponenciály se mohou zpracovat samostatně, poté opět složit:

$$y(t) = H(j\omega_1) \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} + H(-j\omega_1) \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 t}.$$

Víme, že $H(j\omega_1)$ a $H(-j\omega_1)$ jsou komplexně sdružení kamarádi, takže $|H(j\omega_1)| = |H(-j\omega_1)| \quad$ a $\quad \arg H(j\omega_1) = -\arg H(-j\omega_1)$:

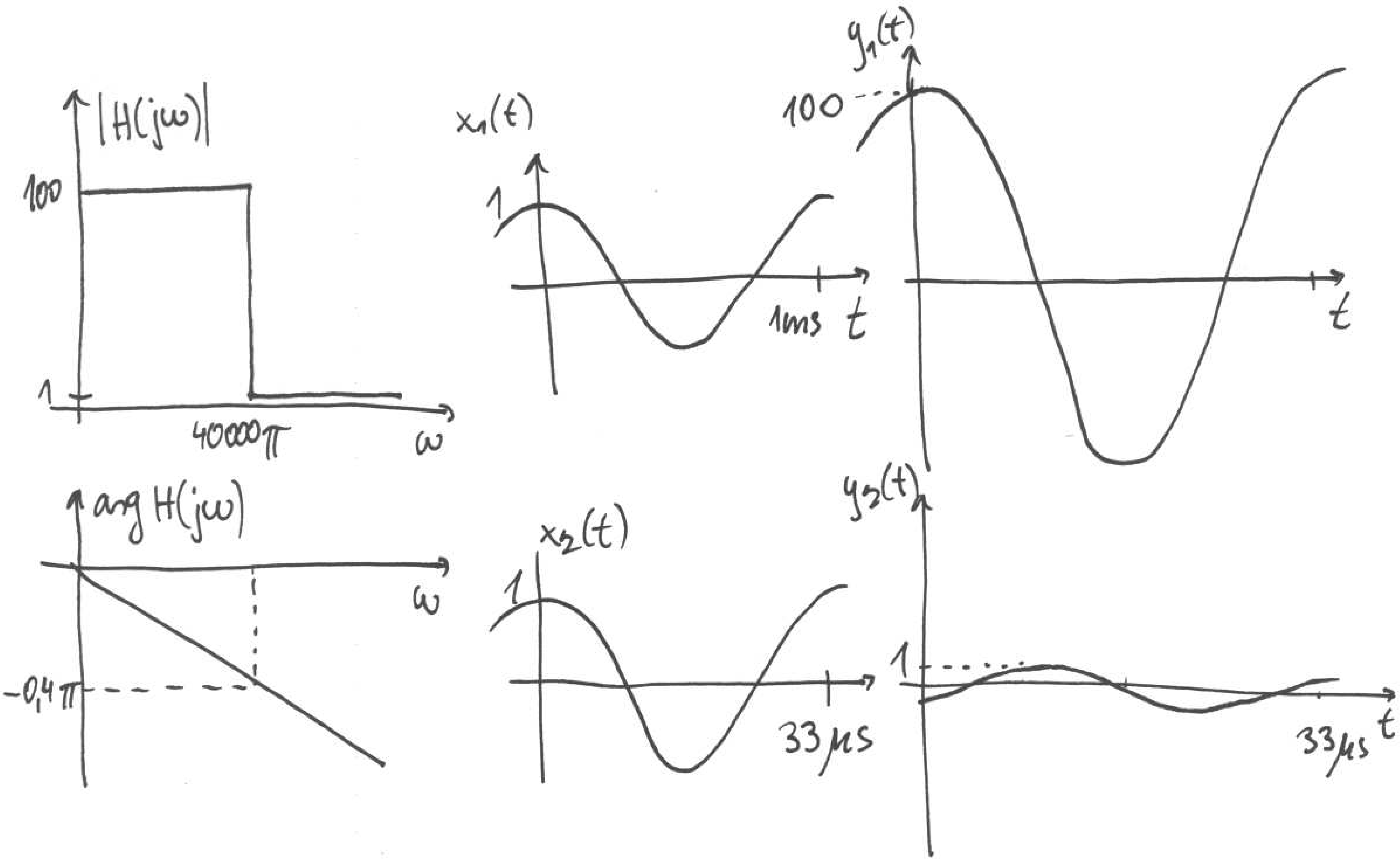
$$y(t) = |H(j\omega_1)|\frac{C_1}{2}e^{j\phi_1 + j\arg H(j\omega_1)}e^{j\omega_1 t} + |H(j\omega_1)|\frac{C_1}{2}e^{-j\phi_1 - j\arg H(j\omega_1)}e^{-j\omega_1 t} =$$
$$= |H(j\omega_1)|C_1 \cos\left[\omega_1 t + \phi_1 + \arg H(j\omega_1)\right].$$
$\Rightarrow$ kosinusovka bude jinak velká a s jinou fází!

**Příklad:** Ideální Hi-Fi zesilovač zesiluje od 0 do 20 kHz, pak už skoro vůbec:

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro } 0 \leq |\omega| \leq 40000\pi \\ 1 & \text{pro } |\omega| > 40000\pi \end{cases} \qquad \arg H(j\omega) = -\frac{\omega}{100000}.$$

Jak bude reagovat na kosinusovky o velikosti 1 V na frekvencích $f_1 = 1\ kHz$ a $f_2 = 30\ kHz$ ?

$$x_1(t) = \cos(2000\pi t), \quad \omega_1 = 2000\pi, \quad H(j\omega_1) = 100e^{-j0.02\pi}$$
$$y_1(t) = 100\cos(2000\pi t - 0.02\pi).$$
$$x_2(t) = \cos(60000\pi t), \quad \omega_2 = 60000\pi, \quad H(j\omega_1) = 1e^{-j0.6\pi}$$
$$y_1(t) = 1\cos(60000\pi t - 0.6\pi).$$


|H(jω)|
100
1
40000π
ω
arg H(jω)
-0,4π
ω
x1(t)
1
1ms
t
y1(t)
100
t
x2(t)
1
33μs
y2(t)
1
33μs
t

**Libovolný periodický signál** umíme rozložit na FŘ:

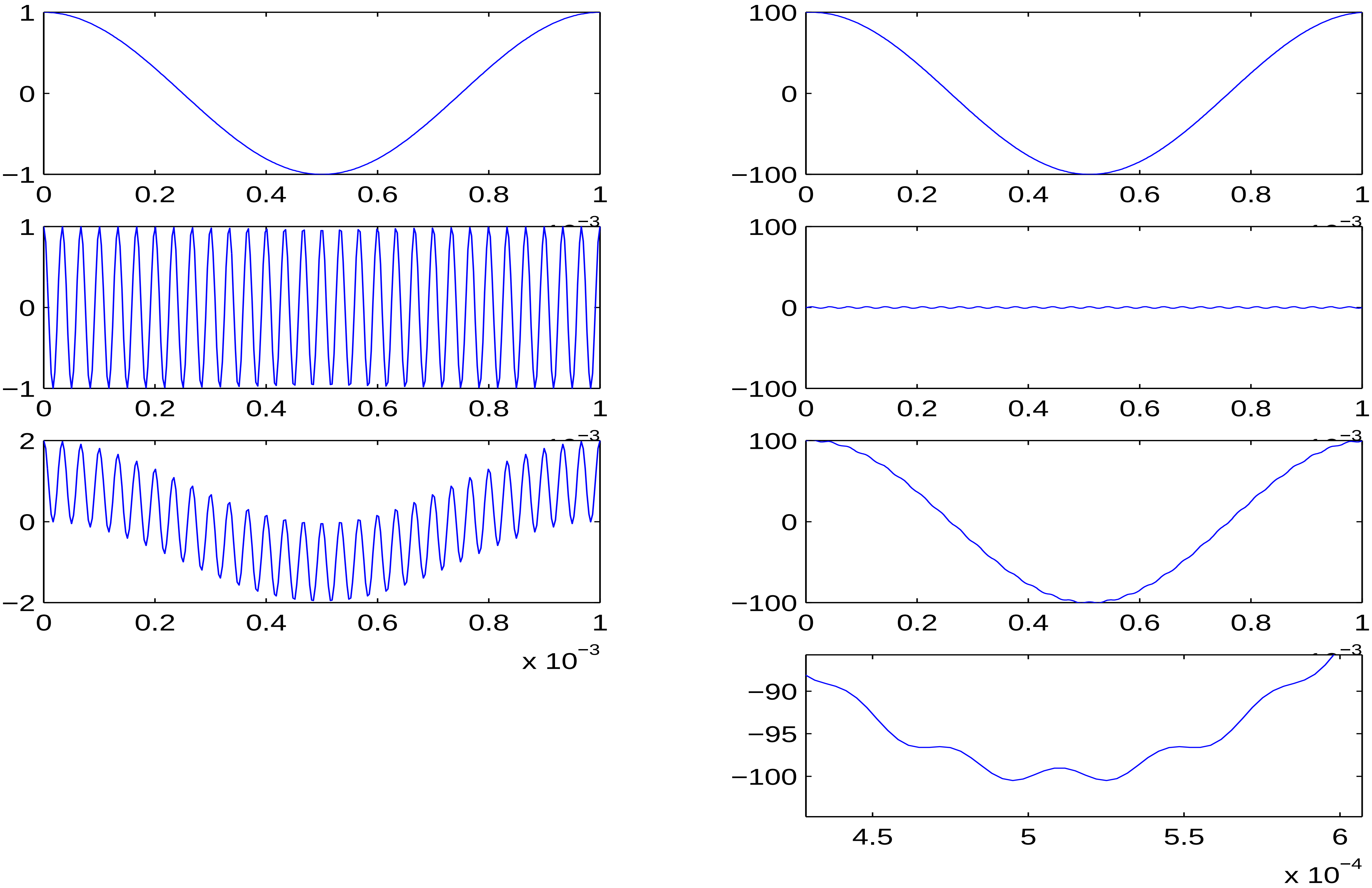
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

$H(j\omega)$ ovlivní každý koeficient podle toho, na které frekvenci "leží":

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H(jk\omega_1) c_k e^{jk\omega_1 t},$$

takže opět neděláme nic jiného, než že násobíme koeficienty FŘ. Proč je to zajímavé ? Výpočet koeficientů FŘ, násobení a zpětná syntéza mohou být *podstatně rychlejší* než konvoluce !

**Příklad:** Směs signálů z minulého příkladu:
$x(t) = \cos(2000\pi t) + \cos(60000\pi t) = c_1 e^{j\omega_1 t} + c_{-1} e^{-j\omega_1 t} + c_{30} e^{j30\omega_1 t} + c_{-30} e^{-j30\omega_1 t}$,
kde $c_1 = c_{-1} = c_{30} = c_{-30} = \frac{1}{2}$. Po průchodu zesilovačem jsou nové koeficienty:
$c_{1,y} = \frac{1}{2}100e^{-j0.02\pi}, \quad c_{-1,y} = \frac{1}{2}100e^{j0.02\pi}, \quad c_{30,y} = \frac{1}{2}1e^{-j0.6\pi}, \quad c_{-30,y} = \frac{1}{2}1e^{j0.6\pi}$.
$y(t) = 100\cos(2000\pi t - 0.02\pi) + 1\cos(60000\pi t - 0.6\pi)$.



1
0
−1
0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
100
0
−100
2
−2
x 10^−3
−90
−95
−100
4.5 5 5.5 6
x 10^−4

## Průchod obecného signálu se spojitým časem systémem s $H(j\omega)$

Obecný signál jsme rozložili do nekonečného počtu nekonečně malých exponenciál pomocí FT:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

kde $X(j\omega)$ je spektrální funkce. Ta byla ovšem definována jako:

$$X(j\omega) = 2\pi \frac{dc_x}{d\omega}.$$

Podobně to můžeme udělat i pro výstupní signál:

$$Y(j\omega) = 2\pi \frac{dc_y}{d\omega}.$$

Vybereme nějakou $\omega_1$, na které "sedí" nekonečně malé koeficienty $dc_{x,1}$ a $dc_{y,1}$. Ty jsou svázány podobně jako koeficienty FŘ:

$$dc_{y,1} = H(j\omega_1)dc_{x,1}.$$

Pak ale také platí:

$$Y(j\omega_1)\frac{d\omega}{2\pi} = H(j\omega_1)X(j\omega_1)\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Ale to platí pro všechny možné $\omega_1$, takže:

$$\boxed{Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)}$$

Dá se dokázat i pomocí:

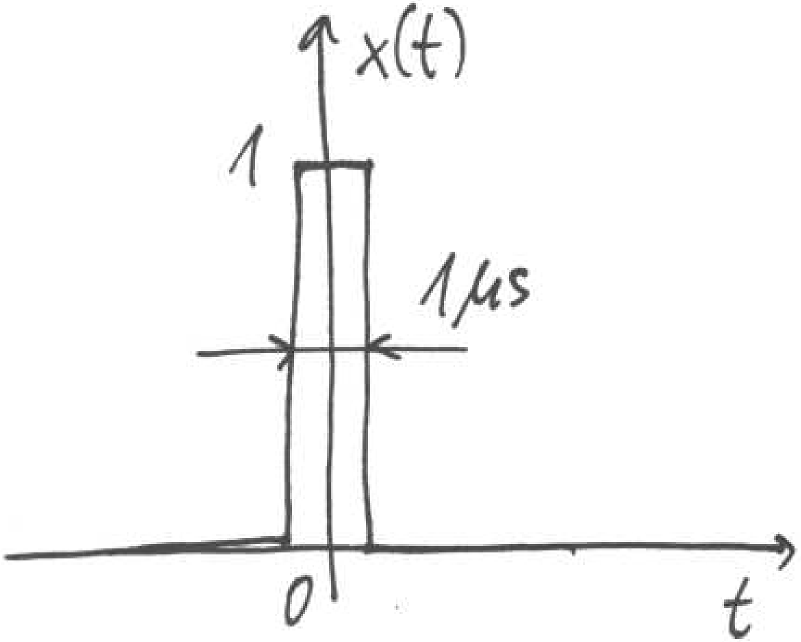
$$Y(j\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right]dt = \ldots \text{sami !!!}$$

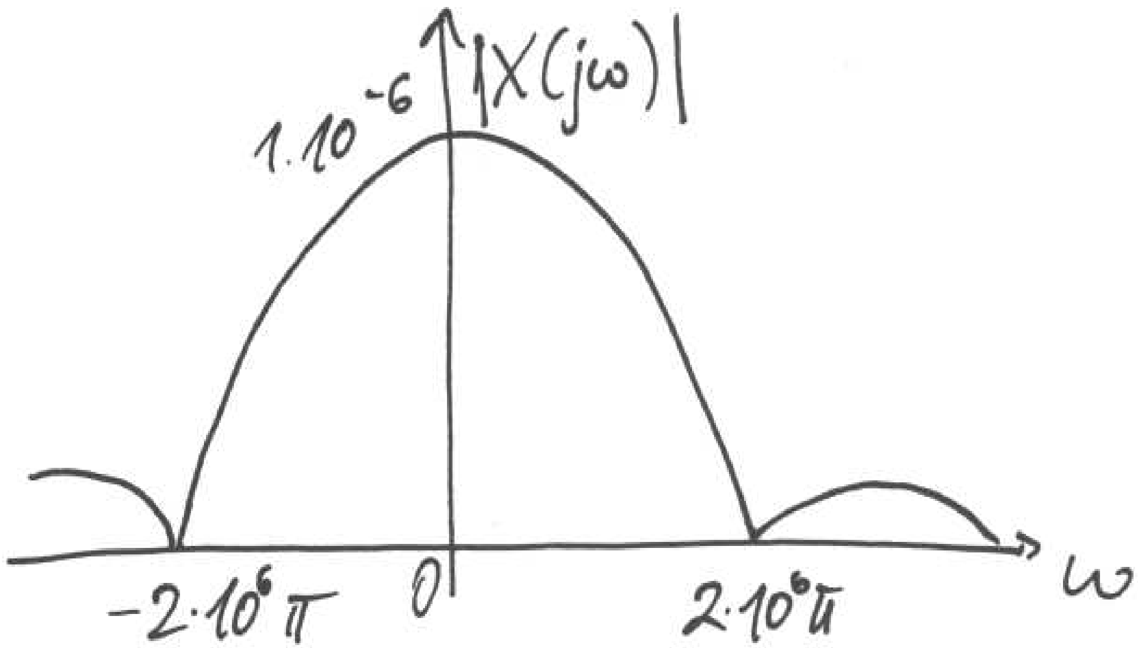
**Příklad:** Do našeho Hi-Fi zesilovače (zjednodušení: od 20 kHz nahoru neprojde nic) vešel obdélníkový impuls o šířce $\vartheta = 1$ $\mu$s, výšce $D = 1$ V. Jaký je výstup $y(t)$ ?

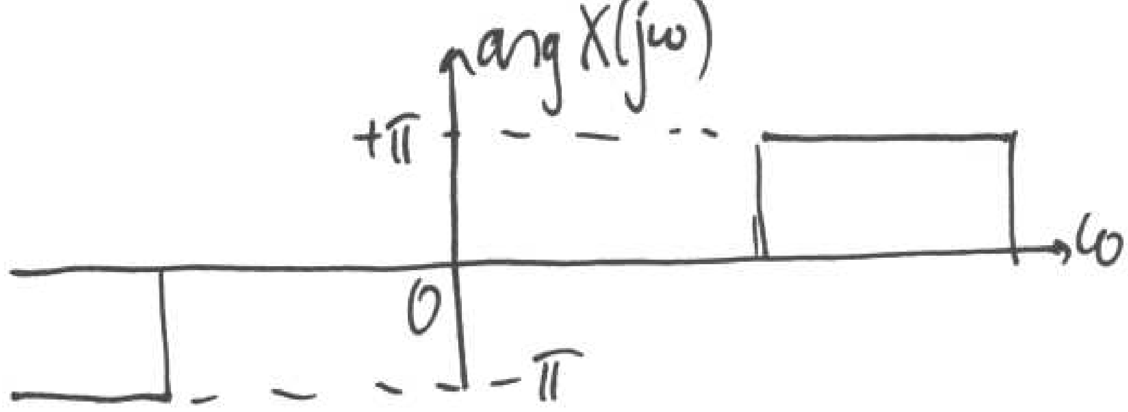
Výstup určíme jako:

$$x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega) \quad Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \quad Y(j\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} y(t).$$

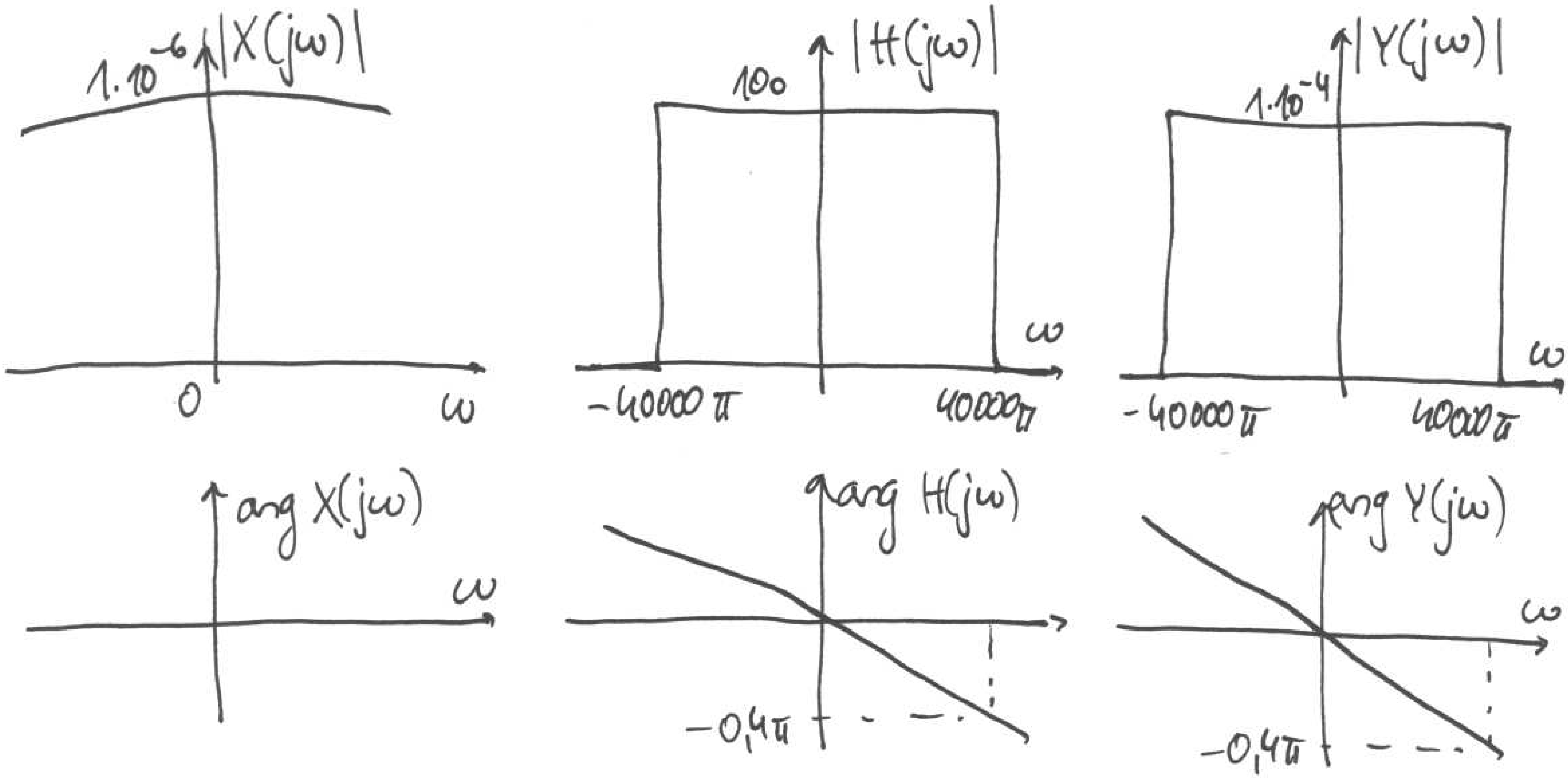
Přímá FT: $X(j\omega) = D\vartheta \text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) = 1 \times 1 \times 10^{-6}\text{sinc}(0.5 \times 10^{-6}\omega)$, funkce se poprvé dotkne osy $\omega$ pro $\frac{\vartheta}{2}\omega_a = \pi$, $\omega_a = \frac{\pi}{0.5\times 10^{-6}} = 2M\pi$.



Tato funkce je násobena $H(j\omega)$, která je ovšem mnohem užší:




Výsledkem je obdélník s lineární fází. Je potřeba ještě provést zpětnou Fourierovu transformaci.

Představme si nejprve, že fáze obdélníka je nulová ("bf"–bez fáze). Signál s obdélníkovým spektrem je:

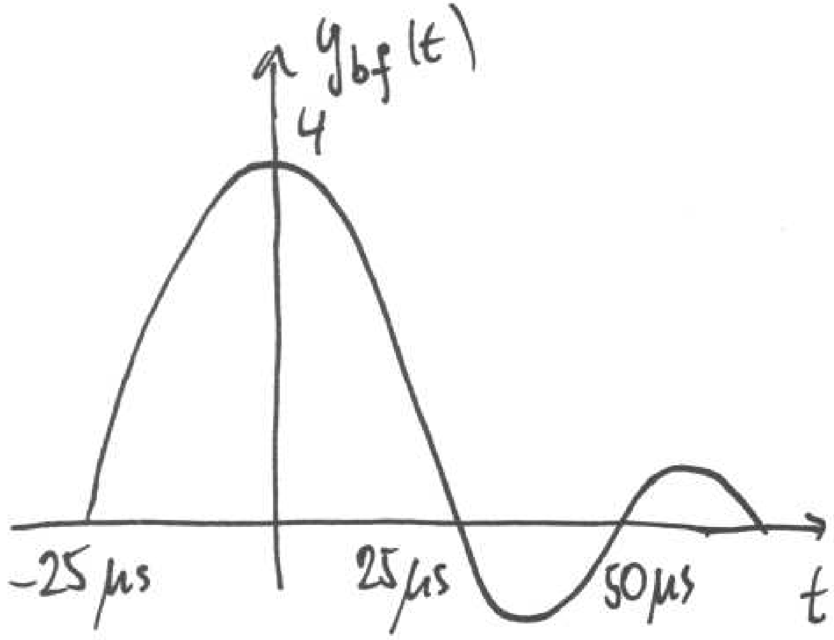
$$y_{bf}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} He^{+j\omega t} = \frac{H\omega_c}{\pi}\mathsf{sinc}(\omega_c t) = 1 \times 10^{-4}\frac{40000\pi}{\pi}\mathsf{sinc}(40000\pi t) =$$
$$= 4\mathsf{sinc}(40000\pi t).$$

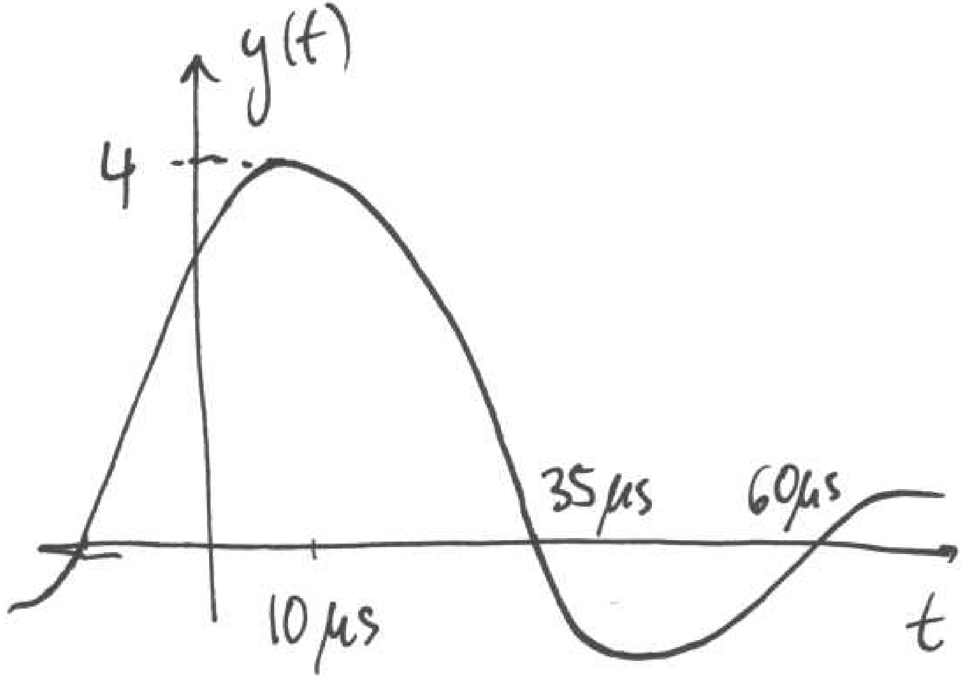
Kde je první průchod tohoto signálu nulou: $40000\pi t = \pi$, $t = \frac{1}{40000} = 25$ $\mu$s.

Fáze ovšem nulová není, je lineární: $\phi = -\frac{\omega}{100000}$ ... co nám to připomíná ? Posunutí signálu v čase !

$y(t) = y_{bf}(t-\tau) \quad \longrightarrow \quad Y(j\omega) = Y_{bf}(j\omega)e^{-j\omega\tau}$,

takže $\tau = \frac{1}{100000} = 10$ $\mu$s.



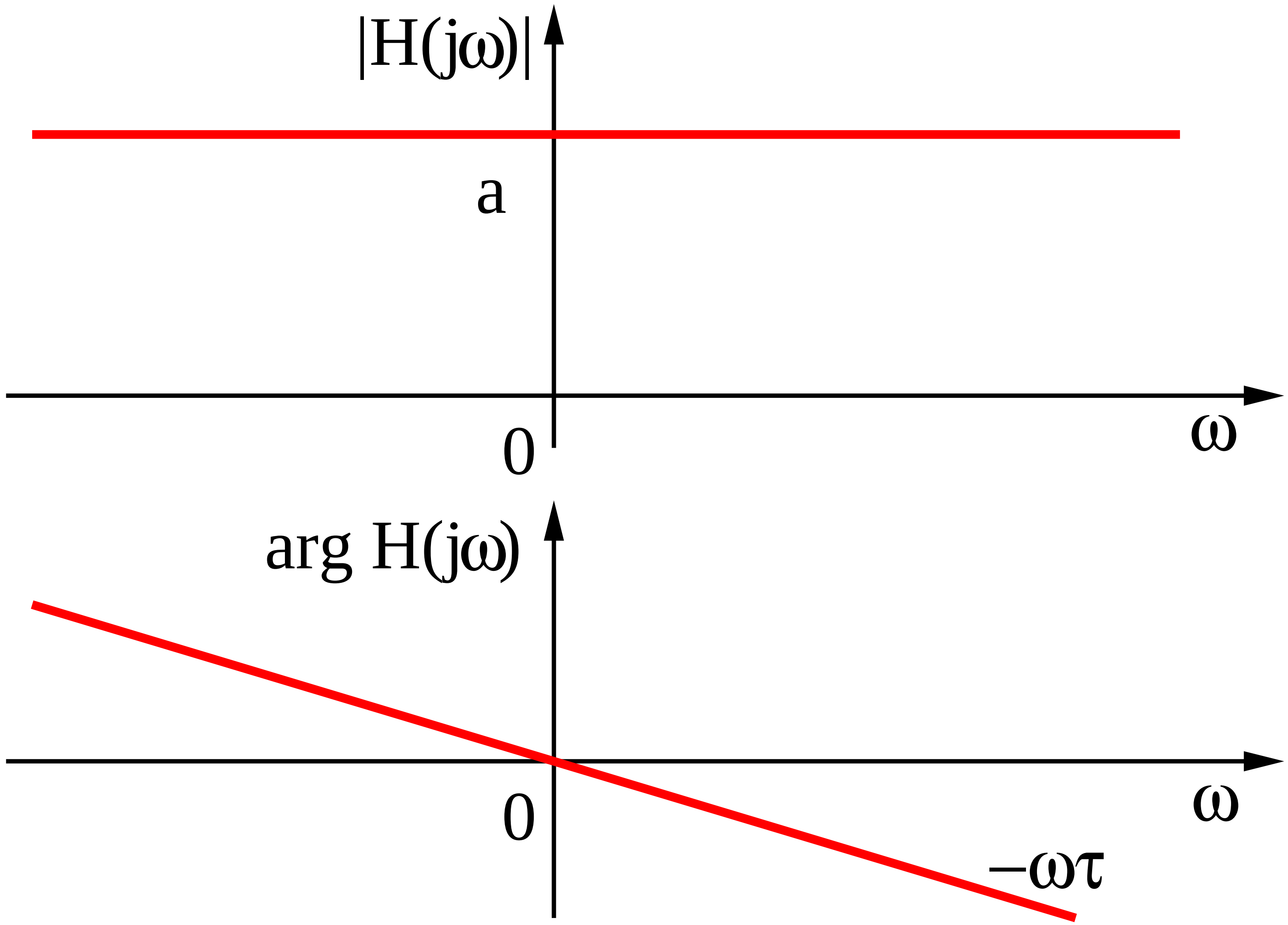




Vidíme, že:

- krátký signál na výstupu už není krátký, roztáhl se nejméně 50 $\times$.
- filtr typu DP zřejmě nemá rád krátké ostré signály.
- Impulsová odezva ideální dolní propusti bude zřejmě funkce sinc.
- je opravdu možné, aby signál $y(t)$ začínal před časem, kdy začal $x(t)$ ($-0.5$ $\mu$s) ?

## Ideální přenosový článek

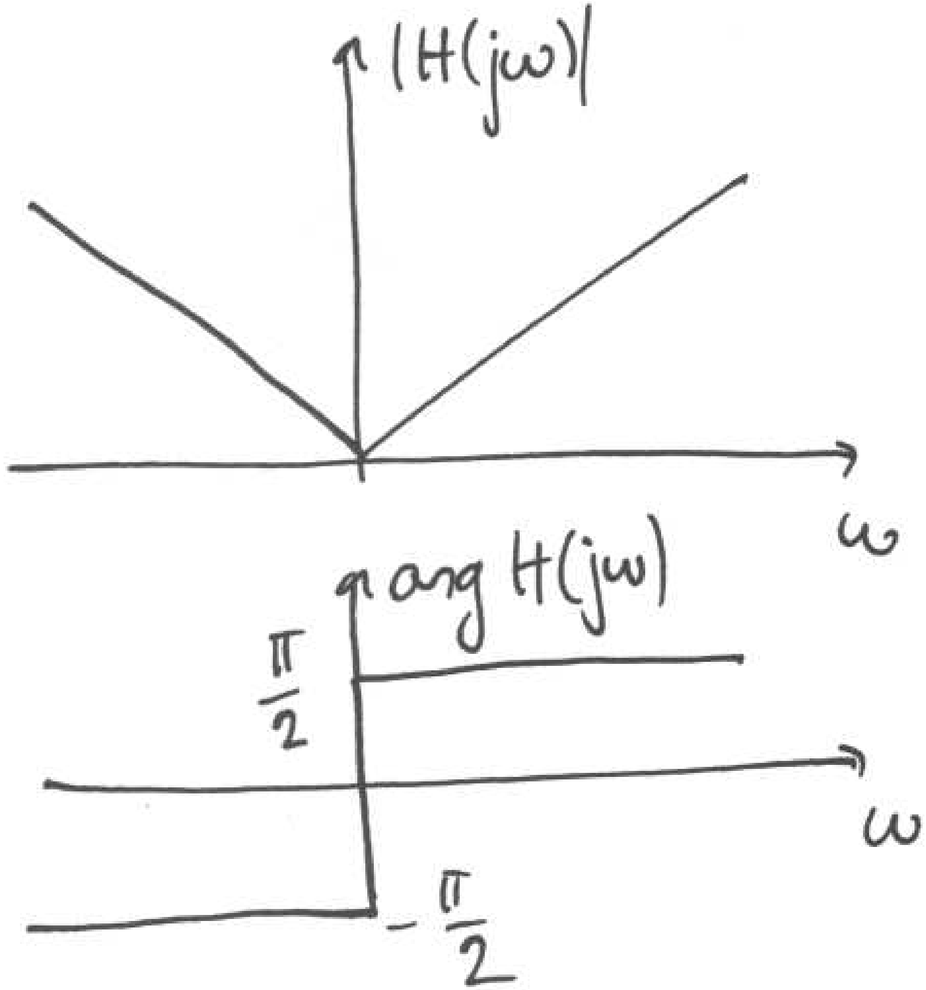
$$y(t) = a\,x(t-\tau), \quad Y(\omega) = a\,X(\omega)e^{-j\omega\tau} \quad H(j\omega) = ae^{-j\omega\tau}$$



## Derivační článek

$y(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$. Přivedeme-li na vstup $x(t) = e^{j\omega t}$, výstupem je $y(t) = \dfrac{de^{j\omega t}}{dt} = e^{j\omega t} j\omega$

$H(j\omega) = j\omega.$



# LAPLACEOVA TRANSFORMACE

viděli jsme, že reakce LTI systému na komplexní exponenciálu tvaru $e^{st}$, kde $s$ je komplexní číslo, byla:

$$y(t) = e^{st}H(s), \quad \text{kde} \quad H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

Zatím nás zajímal jen případ $s = j\omega$, teď nás bude zajímat celá komplexní rovina "$s$".

**Laplaceova transformace:**

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt,$$

kde $s = \sigma + j\omega$ je komplexní proměnná. $X(s)$ je komplexní funkce nad komplexní rovinou, nazýváme ji **obraz**. Značíme $\mathcal{L}$, $x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} X(s)$. Všimněme si, že jdeme-li v rovině "$s$" po $\Im$-ose, dostaneme FT:

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}.$$

K čemu nám LT bude ? Nebudeme transformovat signály, ale budeme se zajímat o chování a stabilitu **systémů** popsaných diferenciálními rovnicemi (a to jsou všechny LTI :-).
Přeskočíme konvergenci, zpětnou LT, atd !

## Základní vlastnosti LT

- **konvoluce signálů v čase:** $x_1(t) \star x_2(t) \longrightarrow X_1(s)X_2(s)$
  Budou se nám dobře popisovat systémy, protože konvoluce přejde na součin:

$$x(t) \longrightarrow X(s), \quad h(t) \longrightarrow H(s)$$

$$y(t) = x(t) \star h(t) \longrightarrow Y(s) = X(s)H(s).$$

  $H(s)$ budeme nazývat **přenosová** nebo **systémová** funkce.

- **derivace** $\dfrac{dx(t)}{dt} \longrightarrow sX(s)$. Tato vlastnost se nám bude velmi hodit při popisu systémů.

## Systémy popsané diferenciálními rovnicemi

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Zajímá nás přenosová funkce – ta nám řekne, jak reaguje výstup na vstup:

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k s^k\right) X(s),$$

a sumy můžeme podělit:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k},$$

což je tzv. racionální nebo lomená funkce. Z ní můžeme přímo přejít ke kmitočtové charakteristice:

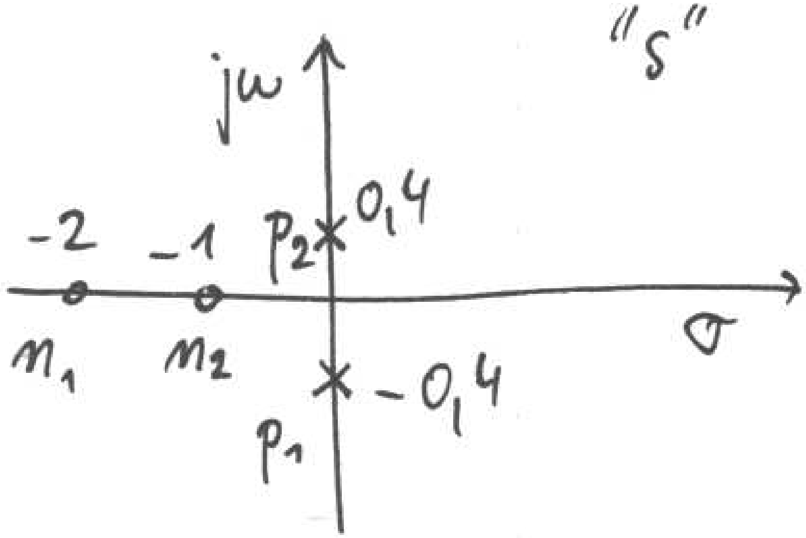
$$\boxed{H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}}$$

V čitateli i jmenovateli $H(s)$ jsou **polynomy**. Základní vyjádření je pomocí koeficientů, ale můžeme je také vyjádřit pomocí **kořenů**:

$$H(s) = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{k=1}^{M} (s - n_k)}{\prod_{k=1}^{N} (s - p_k)}.$$

Kořeny jsou hodnoty $s$, pro které je polynom roven 0. Kořeny čitatele $n_k$ "stahují" hodnotu zlomku do 0, nazýváme **nulové body** nebo **nuly**. Kořeny jmenovatele $p_k$ "vytlačují" hodnotu zlomku do $\infty$, nazýváme je **póly**.

**Příklad:** $H(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+0.16} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+j0.4)(s-j0.4)}$
$n_1 = -2, n_2 = -1, p_1 = -j0.4, p_2 = +j0.4$



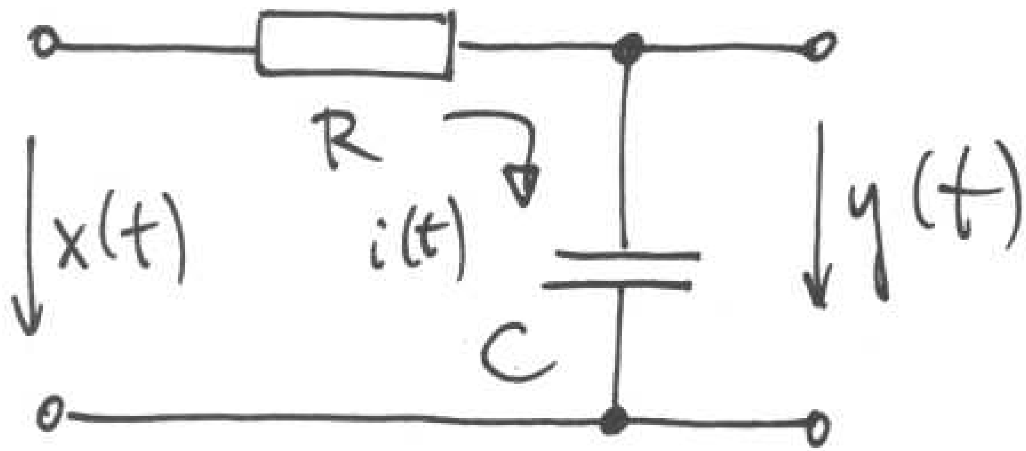

Z poloh nul a pólů se dá také graficky zjistit, jak vypadá $H(j\omega)$.

## Stabilita

Kauzální systém je stabilní, pokud všechny póly leží v levé polorovině komplexní roviny, tedy $\Re\{p_k\} < 0$.

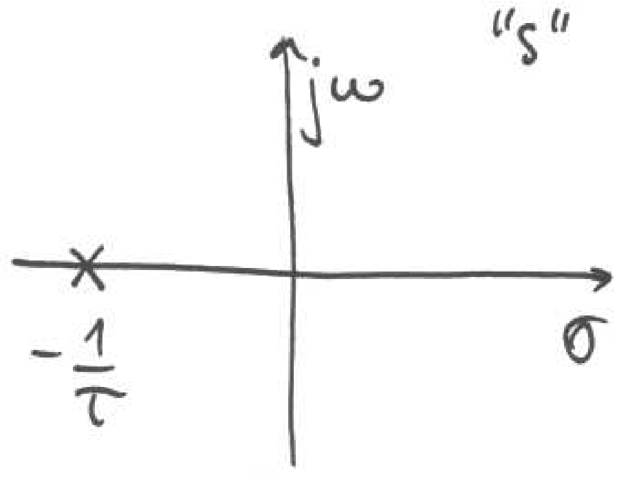
**Příklad:** z přednášky o základech systémů: Jak se bude chovat napětí na kondenzátoru $y(t)$ v závislosti na napětí zdroje $x(t)$ ?

$i(t) = \frac{x(t)-y(t)}{R}$
proud kondenzátorem: $i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$
dohromady: $RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$




$\tau = RC$ je tzv. **časová konstanta** systému. Koeficienty diferenciální rovnice jsou:
$a_1 = \tau, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 1.$

Nuly přenosová funkce nemá, ale má jeden pól pro $(s\tau + 1) = 0$, tedy $p_1 = -\frac{1}{\tau}$.




$\Rightarrow$ z toho plyne, že systém je **stabilní**.

Kreslíme-li kmitočtovou charakteristiku, pohybujeme bodem $s = j\omega$ po $\Im$-ose. Nulo-pólový zápis:

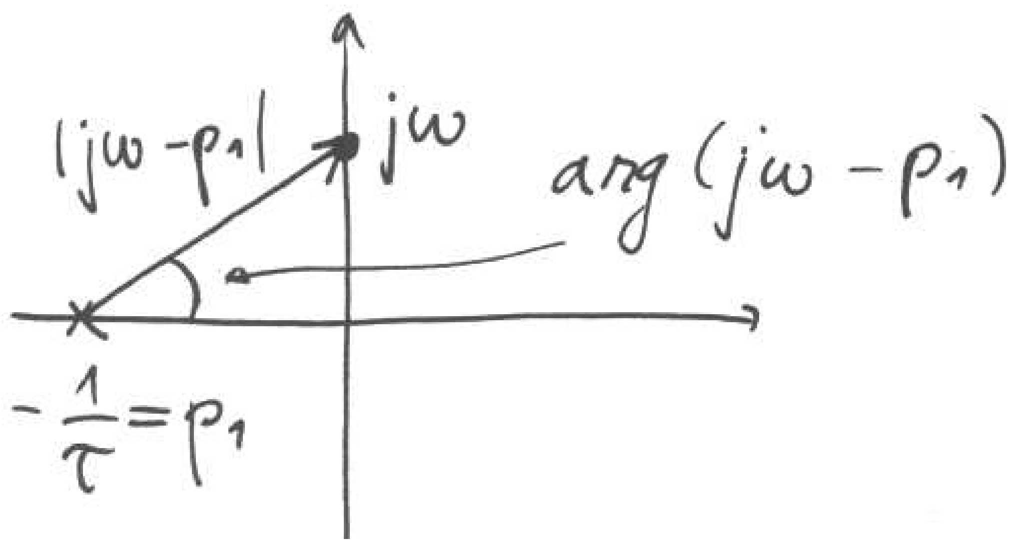
$$H(j\omega) = \frac{b_M}{a_N} \frac{\prod_{k=1}^{M} (j\omega - n_k)}{\prod_{k=1}^{N} (j\omega - p_k)}.$$

Pro dané $j\omega$ je každá závorka komplexním číslem, které si můžeme představit jako vektor.

Abychom dostali hodnotu kmitočtové charakteristiky pro frekvenci $\omega$,

- moduly všech čísel z čitatele násobíme. Argumenty přičítáme.
- moduly všech čísel ze jmenovatele dělíme. Argumenty odečítáme.

**Zpět k příkladu:** $H(s) = \frac{1}{\tau}\frac{1}{s-(-\frac{1}{\tau})}$.




- začínáme pro $j\omega = 0$: $|H(0)| = 1$, $\arg H(0) = 0$.
- zvyšujeme $\omega$: $|s - (-\frac{1}{\tau})|$ se prodlužuje, ale je ve jmenovateli. Proto se zlomek zmenšuje. Úhel se zvětšuje, ale do výsledku se bere se záporným znaménkem.
- končíme pro $j\omega = \infty$: $|H(j\infty)| = 0$, $\arg H(0) = -\frac{\pi}{2}$ (vektor jde kolmo nahoru).

**Příklad:** $R = 1\ k\Omega$, $C = 1\ \mu$F, $\tau = RC = 1$ ms.