Periodické signály – Fourierova řada

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

- Proč máme rádi exponenciály.
- Fourierova řada
- FŘ obdélníkového impulsu
- Příklad z reálného světa
- Poučky o FŘ
- Střední výkon a Parsevalův teorém.

Exponenciály a proč je máme rádi

Pomocí Fourierovy řady se budeme snažit rozdělit libovolný periodický signál do řady **komplexních exponenciál**. Proč máme exponenciály tak rádi?

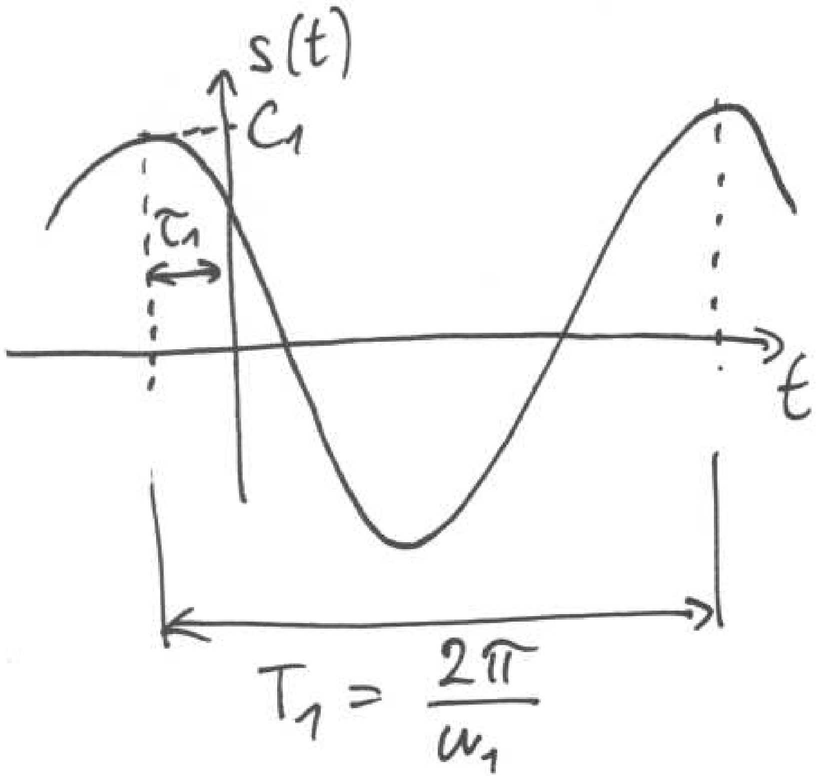
⇒ **Dá se jimi elegantně vyjádřit libovolná kosinusovka s libovolnou fází**: pomocí vzorce: $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$:

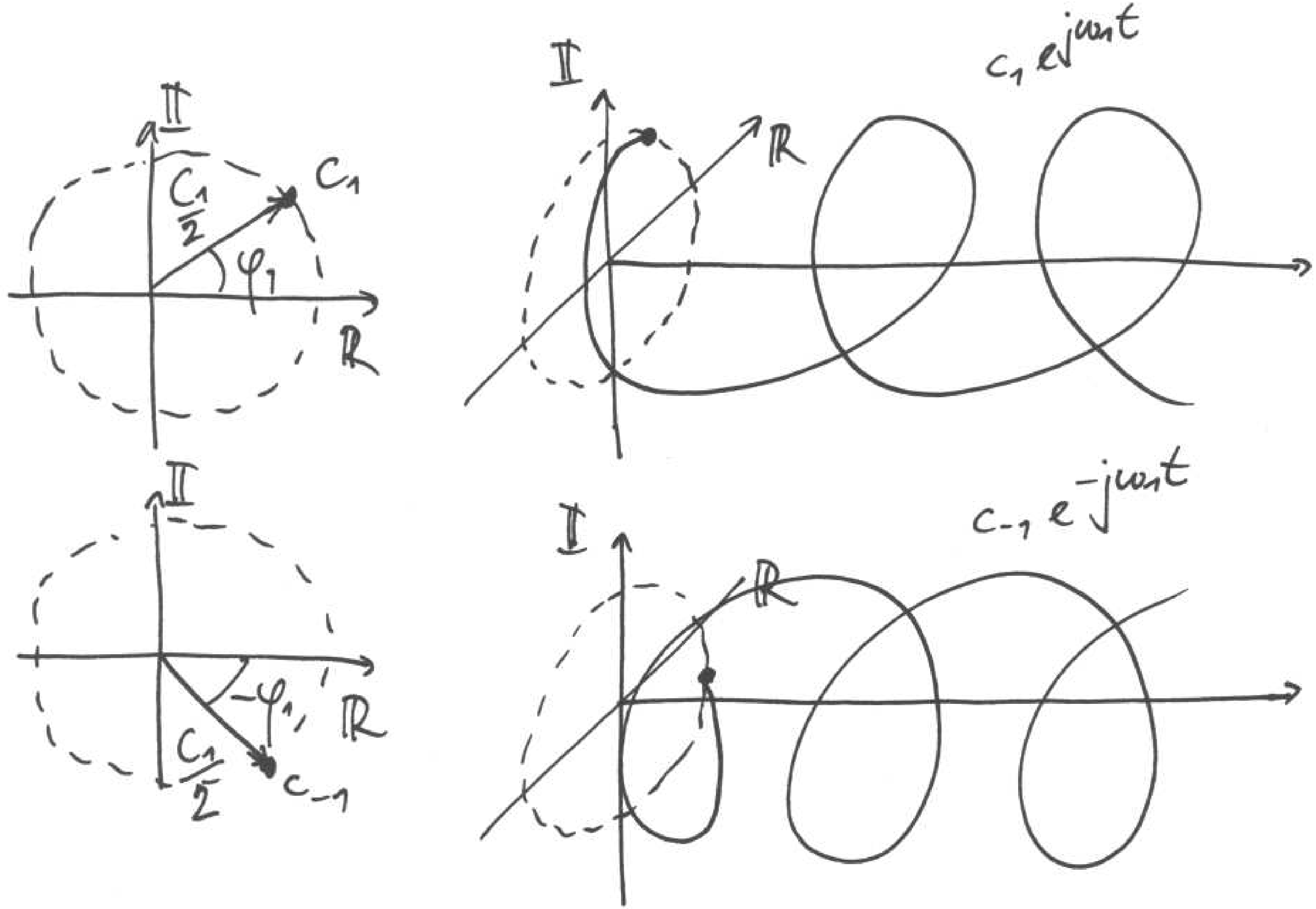
$$C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) =$$

$$= \frac{C_1}{2} e^{j(\omega_1 t + \phi_1)} + \frac{C_1}{2} e^{-j(\omega_1 t + \phi_1)} =$$

$$= \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1} e^{j\omega_1 t} + \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1} e^{-j\omega_1 t},$$

kde $c_1 = \frac{C_1}{2} e^{j\phi_1}$ a $c_{-1} = \frac{C_1}{2} e^{-j\phi_1}$ jsou komplexní konstanty.





⇒ **Průchod exponenciály LTI systémy dává opět tu samou exponenciálu, pouze násobenou nějakým komplexním číslem**: definujme vstupní signál jako $x(t) = e^{st}$, kde s je komplexní číslo. Nejvíce nás bude zajímat případ, kde s je čistě imaginární $s = j\omega$, ale ukažme si výpočet s obecným komplexním s.

Výstup LTI systému je dán konvolucí vstupu s impulsní odezvou systému:

$$y(t) = h(t) \star x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

Výraz $e^{s(t-\tau)}$ rozložíme pomocí známe poučky $e^{a+b} = e^a e^b$ a část nezávislou na τ vysuneme před integrál:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

Integrál je pouze funkcí komplexního čísla s a impulsní odezvy systému, nikoliv funkcí vstupu! Můžeme jej označit jako komplexní funkci $H(s)$. Před integrálem stojí e^{st}, což je ovšem vstup. Můžeme tedy psát:

$$y(t) = e^{st}H(s),$$

a zapamatujeme si, že výstupem je ta stejná exponenciála, avšak násobená komplexním číslem:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau.$$

... co se stane, když vynásobíme komplexní exp. $c_1 e^{j\omega_1 t}$ číslem $H(s)$?

Malé opakování:

- jako všechna komplexní čísla, můžeme $H(s)$ rozložit na modul a argument: $H(s) = |H(s)|e^{j \arg H(s)}$.
- pro násobení komplexních čísel platí: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$ (moduly se násobí, argumenty se sčítají).

Jak to tedy bude ? Začněme psát:

$$H(s) c_1 e^{j\omega_1 t} = \dots$$

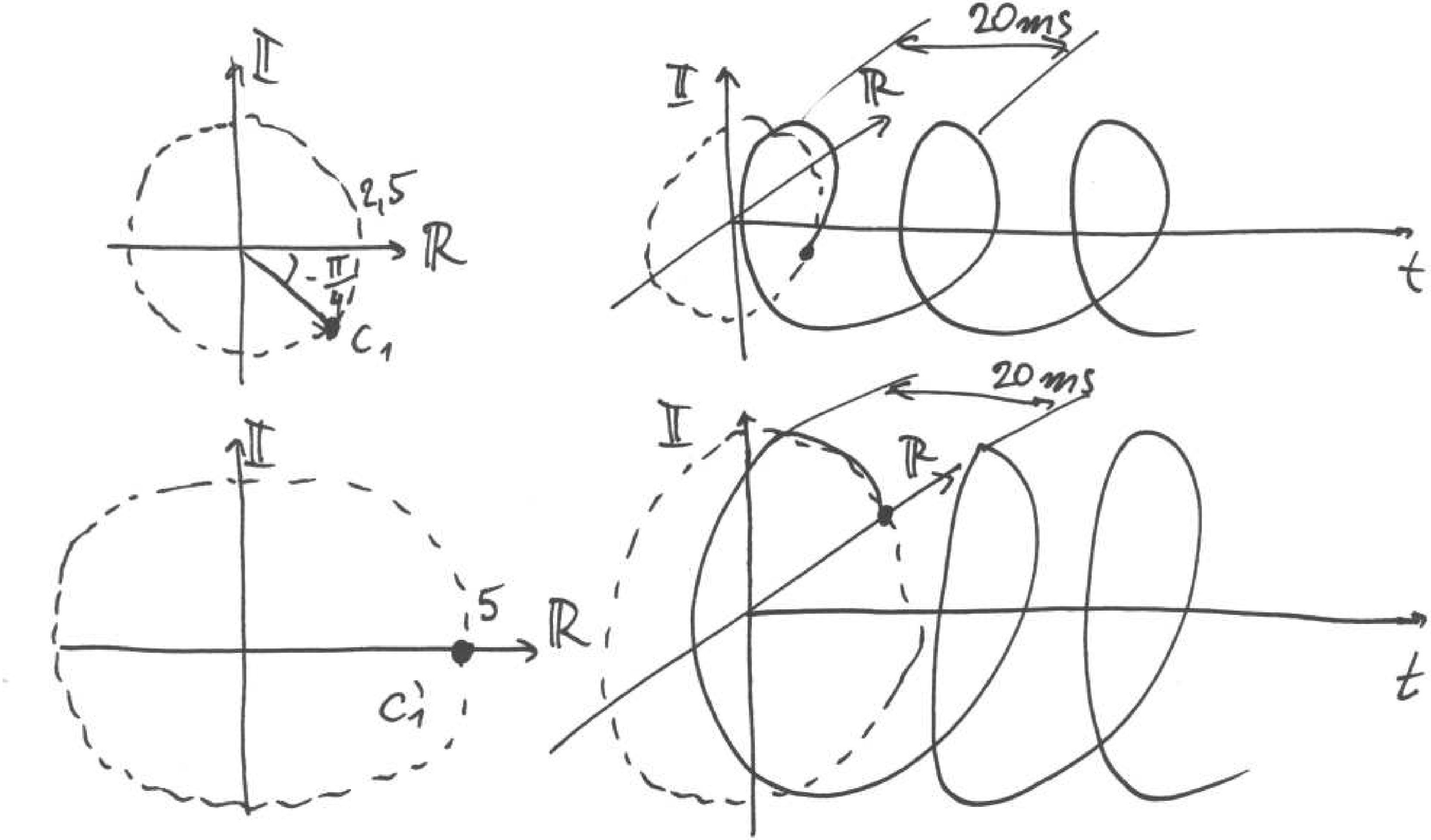
vidíme, že s vlastní exponenciálou nemusíme dělat **nic** a že se můžeme vyřádit na koeficientu c_1:

$$c_1' = H(s) c_1.$$

Jelikož obě jsou komplexní čísla, není násobení žádná tragédie: vynásobíme moduly, sečteme argumenty. Na výsledné funkci se to projeví tak, že "spirála" se bude točit po "jinak silném válci" a že bude jinak "předtočená".

Příklad: komplexní exponenciála $c_1 e^{j\omega_1 t} = 2.5e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j100\pi t}$ je násobena číslem $H(s) = 2e^{j\frac{\pi}{4}}$.

$$c_1' = c_1 H(s) = 2.5e^{-j\frac{\pi}{4}} 2e^{j\frac{\pi}{4}} = 2.5 \times 2e^{-j\frac{\pi}{4}+j\frac{\pi}{4}} = 5$$

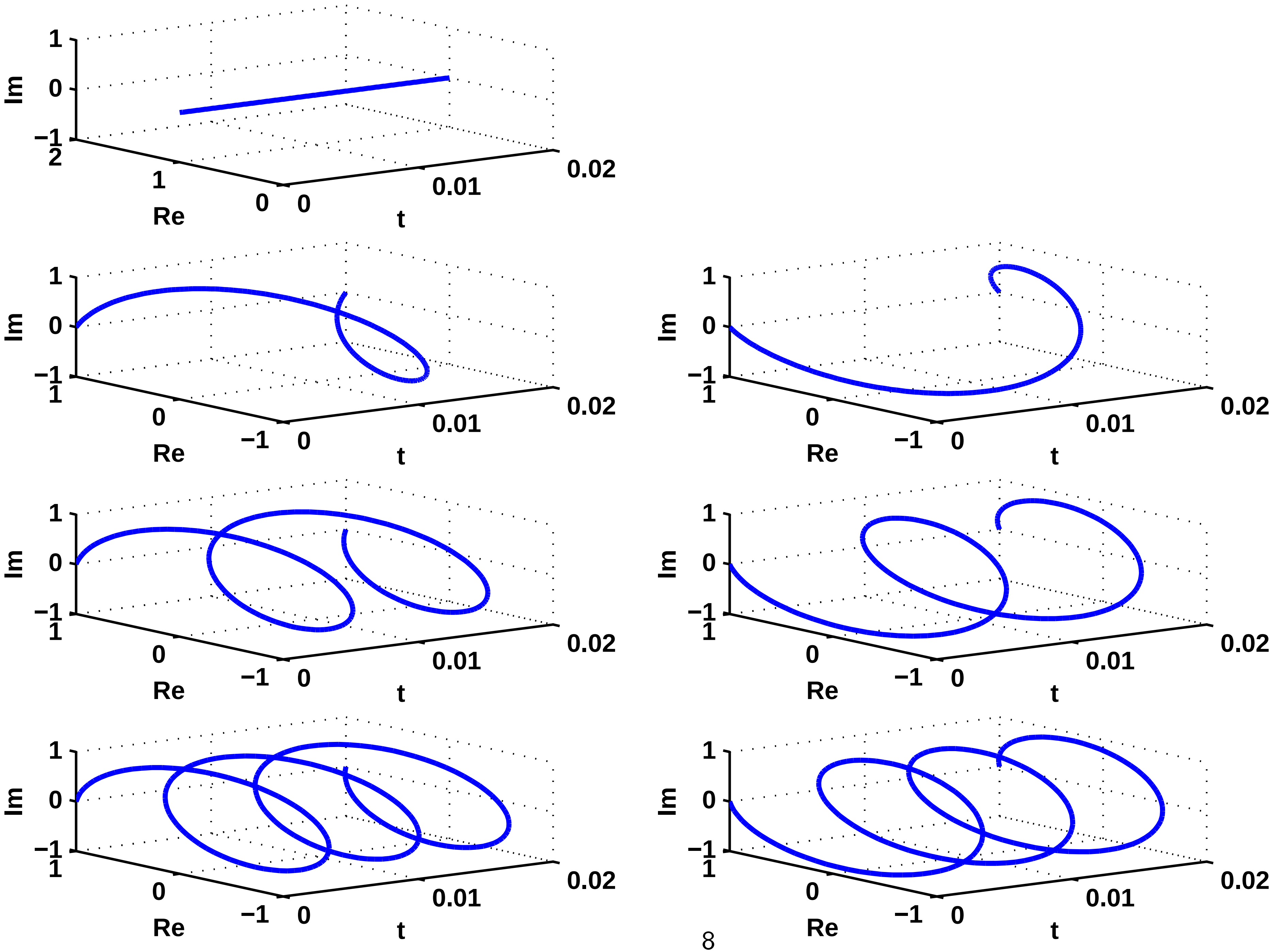


FOURIEROVA ŘADA

pro periodický signál $x(t) = x(t + T_1)$, kde T_1 je základní perioda, budeme hledat rozklad do tvaru:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}}$$

ω_1 je základní kruhová frekvence signálu $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ a funkce $e^{jk\omega_1 t}$ pro $k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$ nazýváme **harmonicky vztažené komplexní exponenciály**.


Im
1
0
−1
Re
2
1
0
t
0
0.01
0.02
Im
Re
t
1
0
−1

Základní vlastnosti koeficientů:

- Pro reálné signály $x(t)$ budou vždy koeficienty c_k a c_{-k} **komplexně sdružené**:

$$c_k = c_{-k}^{\star}$$

- c_0 musí být komplexně sdružený sám se sebou, takže musí být reálný: $c_0 \in \Re$. Jelikož $e^{jk\omega_1 t}$ je pro $k = 0$ stále 1, jedná se o **stejnosměrnou složku signálu**
- fyzikální význam koeficientů vyplývá z přepisu řady do tvaru:

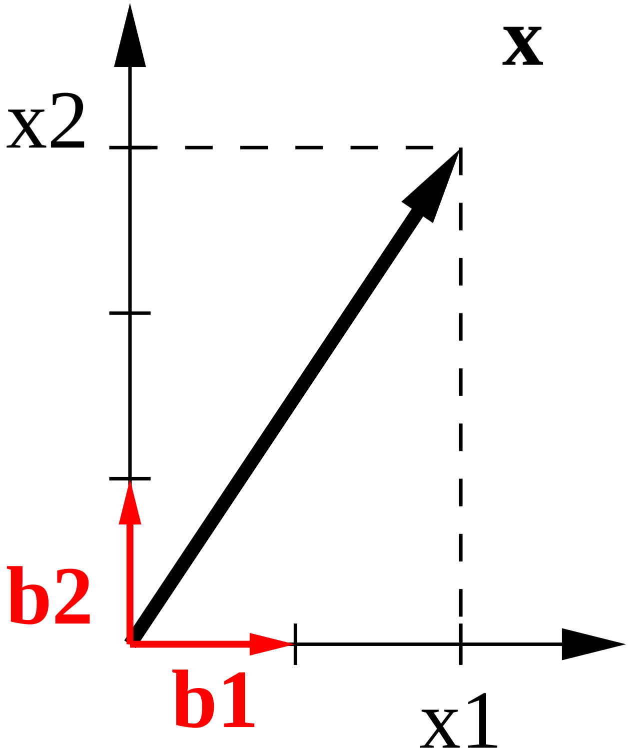
$$s(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left[c_k e^{jk\omega_1 t} + c_{-k} e^{-jk\omega_1 t}\right]}_{C_k \cos(k\omega_1 t + \phi_k)}$$

- c_0 je stejnosměrná složka signálu.
- pro $k > 0$
  - amplituda k-té harmonické složky: $C_k = 2|c_k|$.
  - počáteční fáze k-té harmonické složky je $\phi_k = \arg c_k$.

Malé opáčko - báze a promítání do nich

Báze

- jak se dá něco něčím popsat
- co je čemu podobné.



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = [1 \;\; 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \quad x_2 = [0 \;\; 1] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3$$

... **skalární součin**

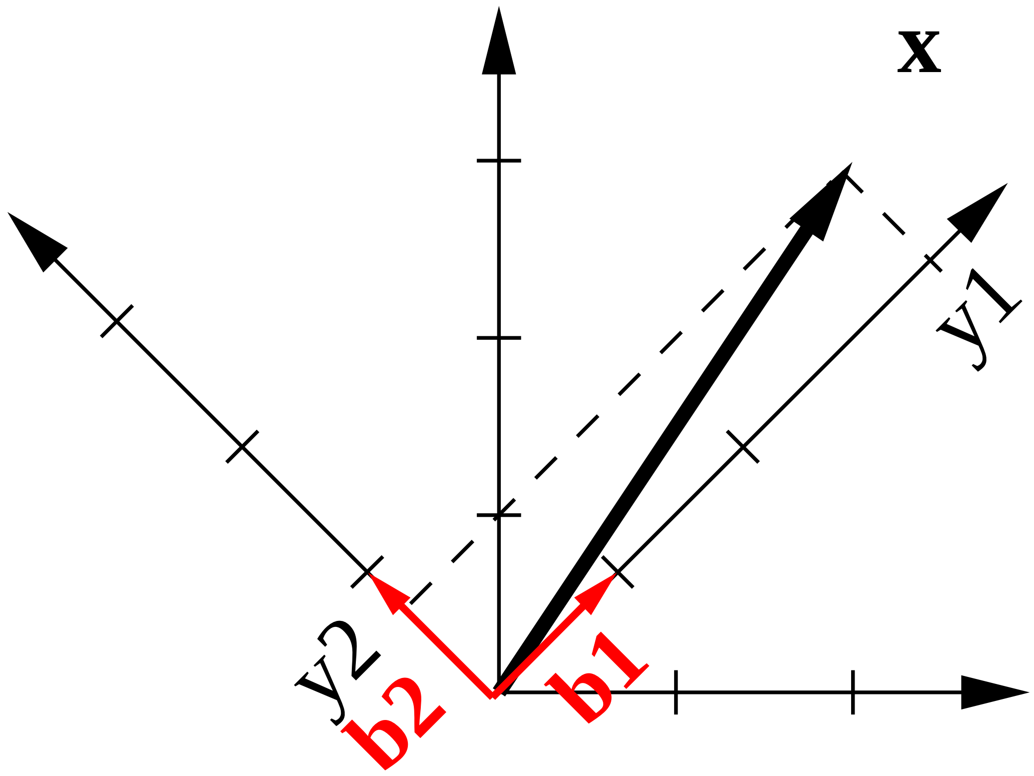
Otočené souřadnice

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$x_1 = [\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 3.53$$

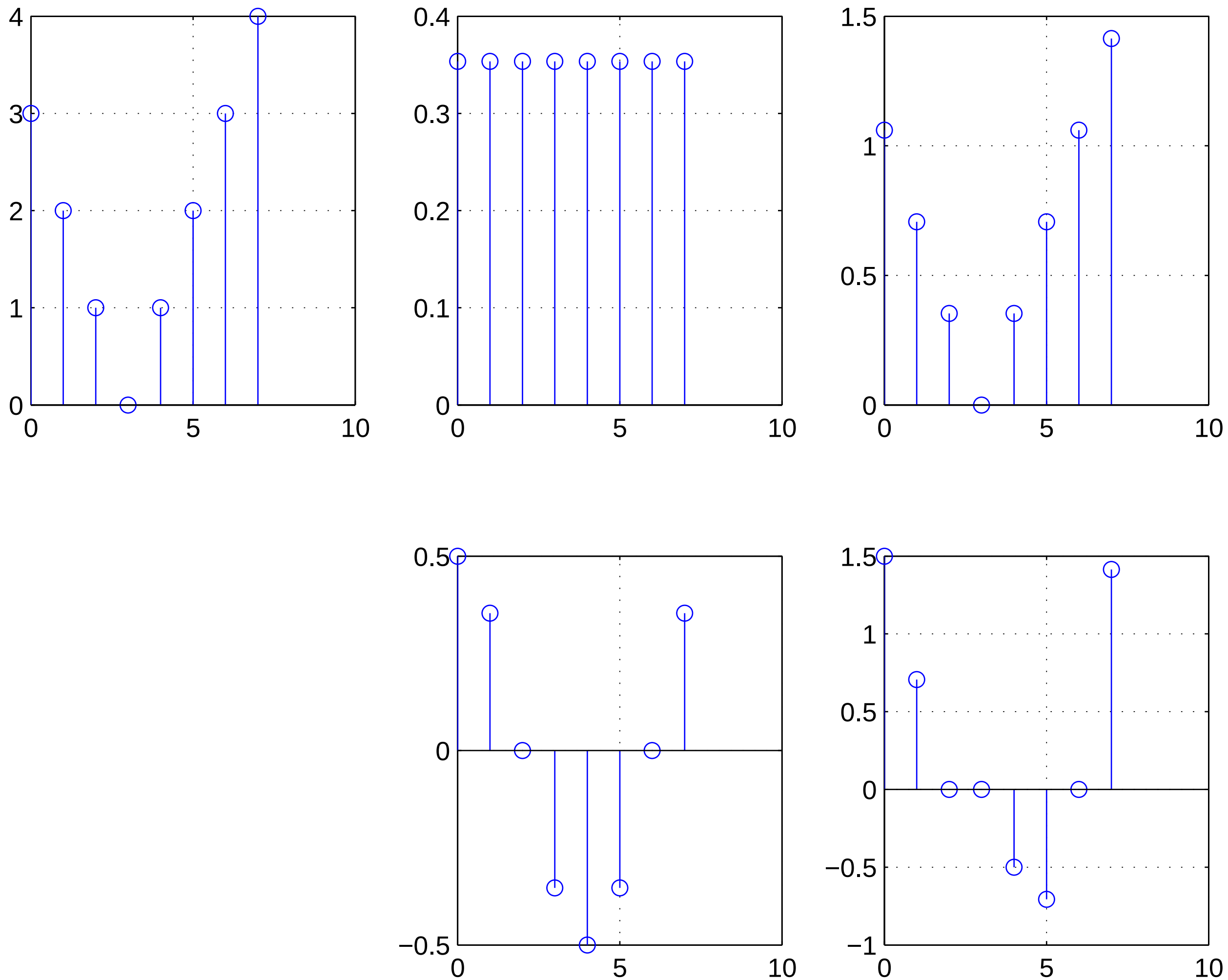
$$x_2 = [-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}] \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.707$$



Jak to zobrazit pro vícerozměrný prostor ?

$$\mathbf{x} = [3\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4],\quad \mathbf{b}_1 = \sqrt{\tfrac{1}{8}}[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1],\quad b_{2n} = \tfrac{1}{2}\cos(\tfrac{2\pi}{8}n)$$

$y_1 = 5.65$, podobné $y_2 = 2.41$ také podobné.



A obecně v jakkoliv rozměrném prostoru...

$y_n = \mathbf{b}_n^T \mathbf{x}$,

maticově $\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$

Jaké chceme báze

- Jeden koeficient by neměl záviset na druhém - kolmost / ortogonalita:

$$\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_j = 0$$

- Je dobré, pokud má velikost koeficientu stejný význam ve všech směrech - velikost báze rovna 1

$$|\mathbf{b}_i| = 1$$

- Pokud jsou náze kolmé a jednotkové - **ortonormální systém**

Ale signál a báze můžou být klidně funkce!

- jak se dá něco něčím popsat
- co je čemu podobné.

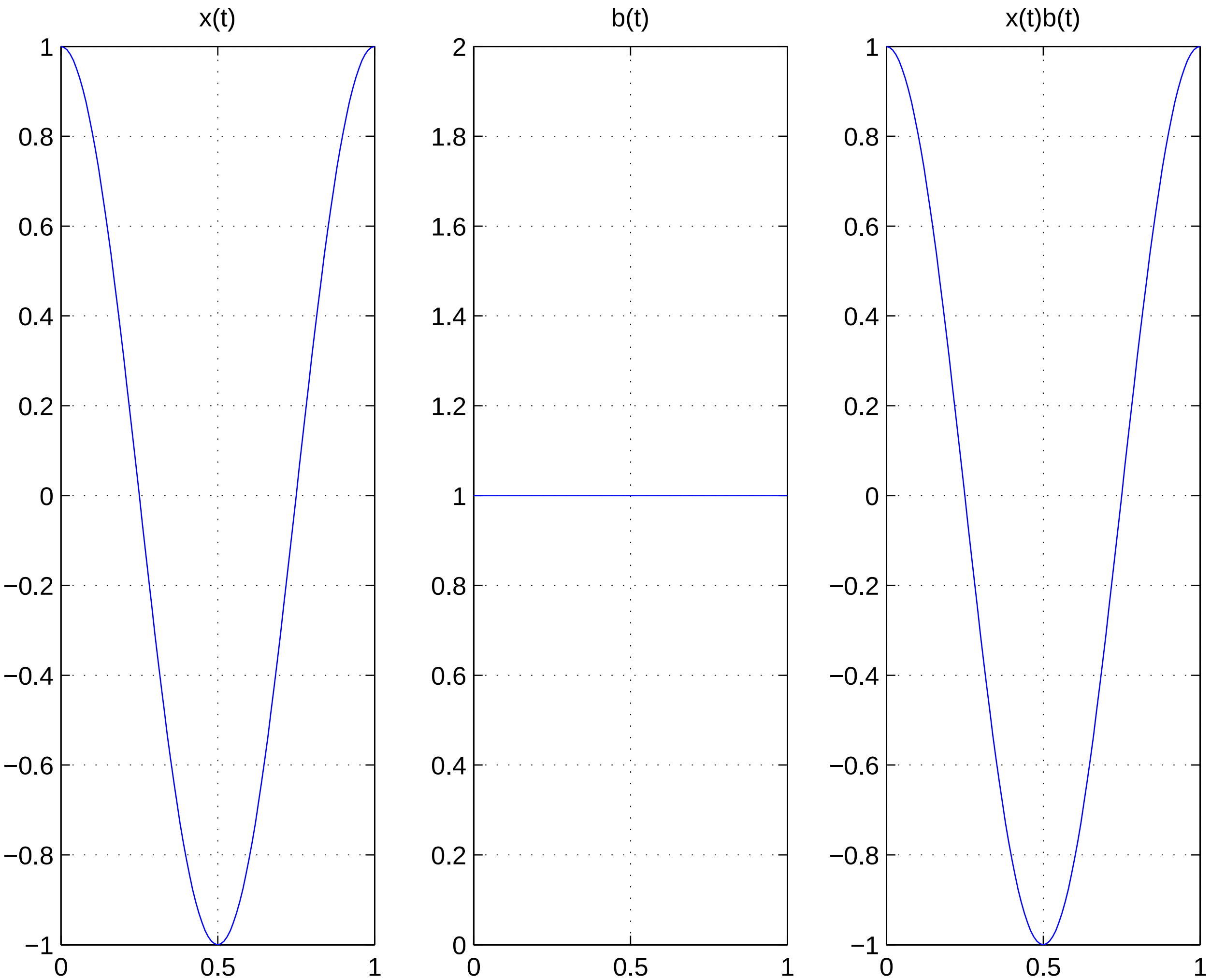
Ekvivalent skalárního součinu je

- **násobení s bází**
- **sčítání - podle charakteru integrál $\int$ nebo suma $\sum$**

Cvičení - čemu je podobný kus cosinusovky ?

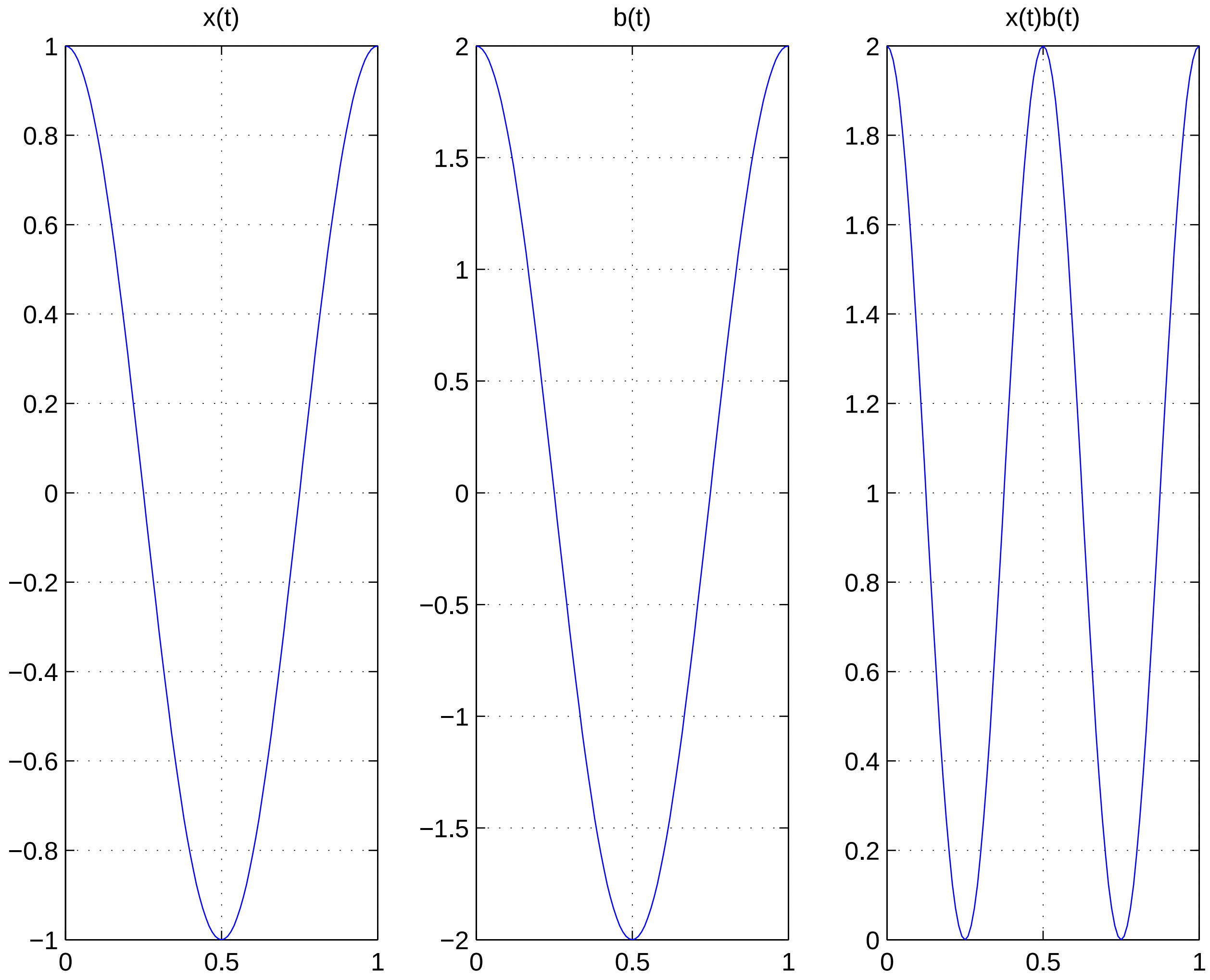
Stejnosměrnému signálu ?

$b(t) = 1 \quad \int_0^1 s(t)b(t)dt = 0$ ... není podobný



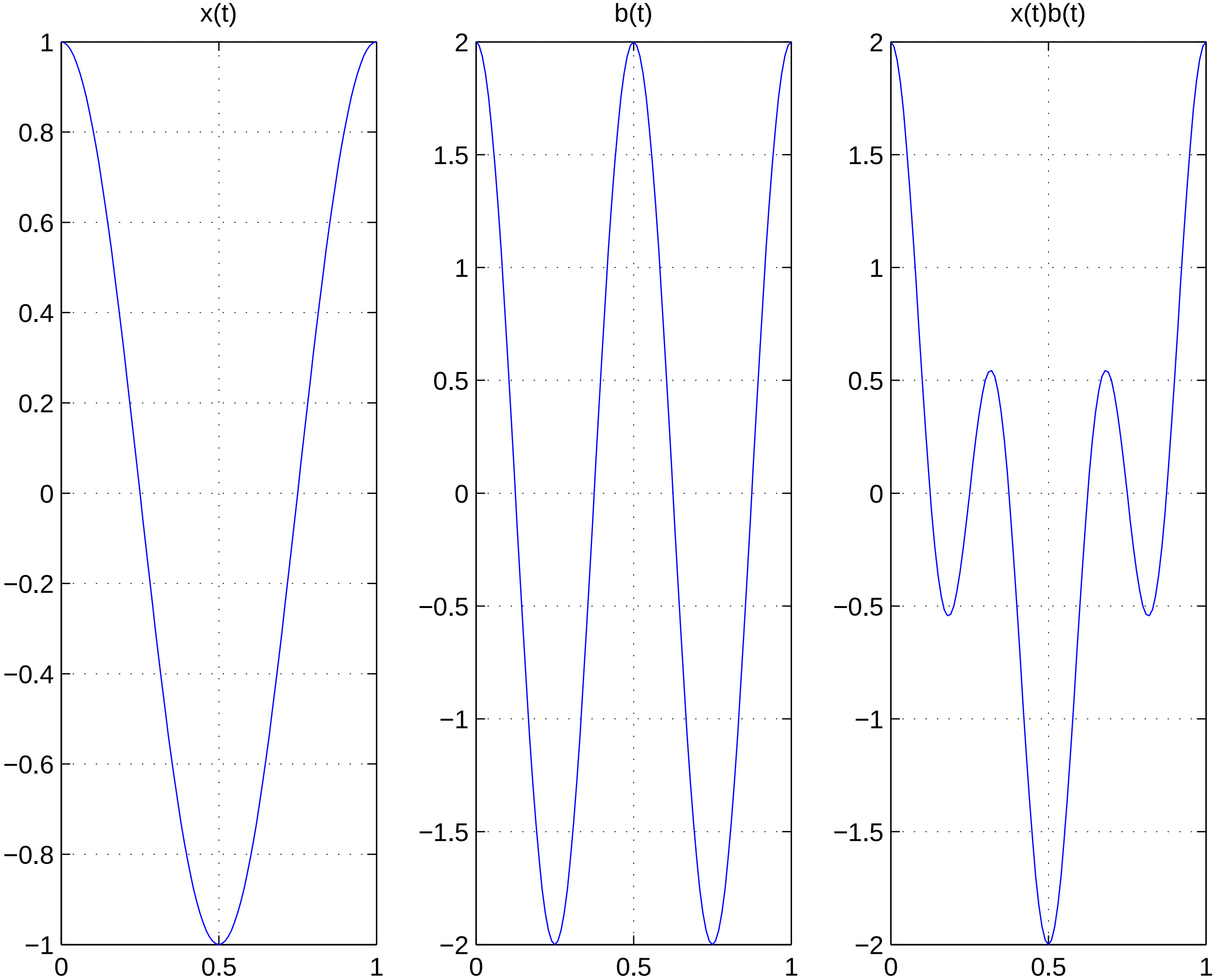
Cosinusovce ?

$b(t) = 2\cos(2\pi t) \quad \int_0^1 s(t)b(t)dt = 1$ ... je podobný

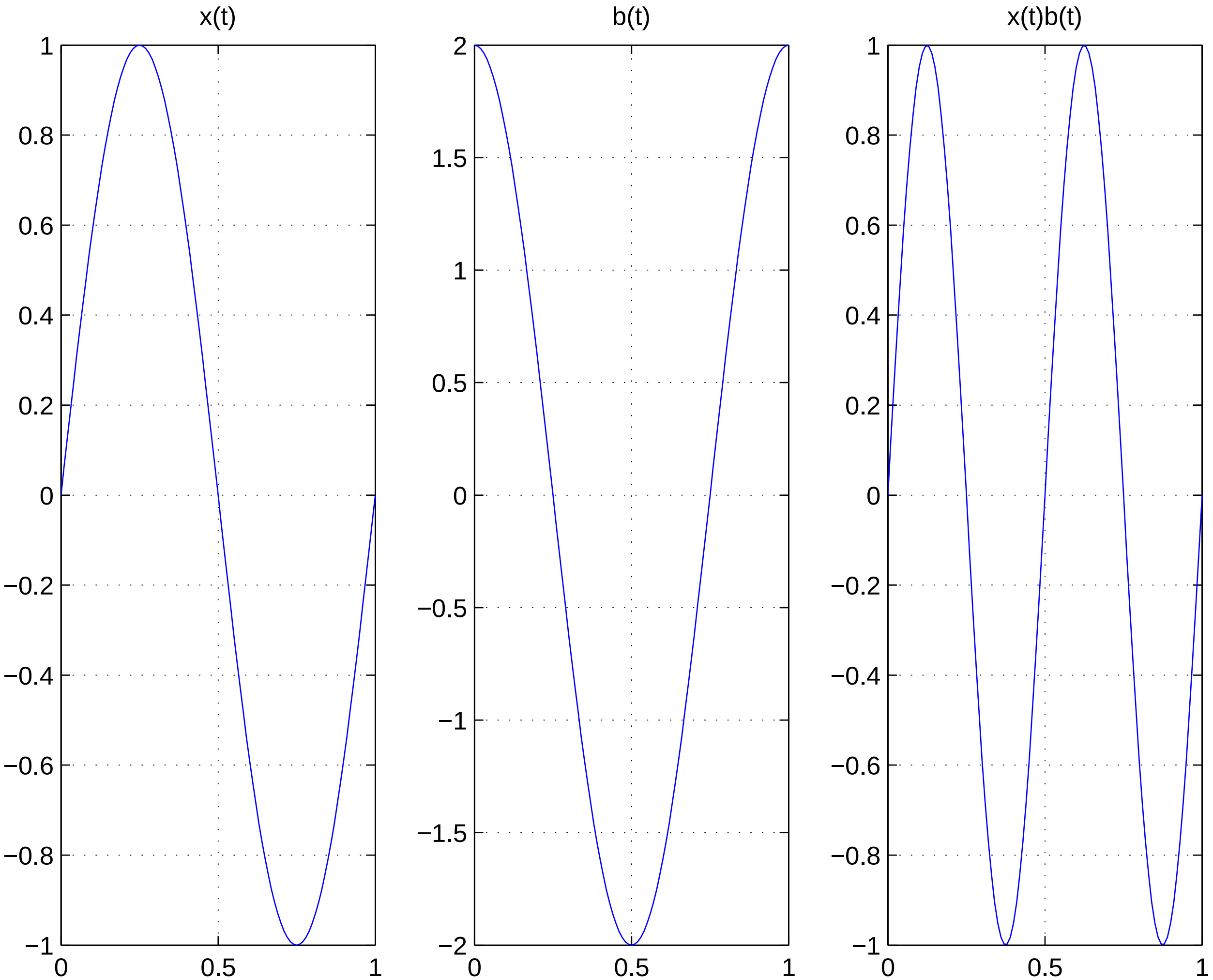


2x rychlejší cosinusovce ?

$b(t) = 2\cos(4\pi t) \quad \int_0^1 s(t)b(t)dt = 0$ ... není podobný



Ale co sinusovka ? $s(t) = \sin(2\pi t), \quad b(t) = 2\cos(2\pi t) \quad \int_0^1 s(t)b(t)dt = 0$ ... hm hm



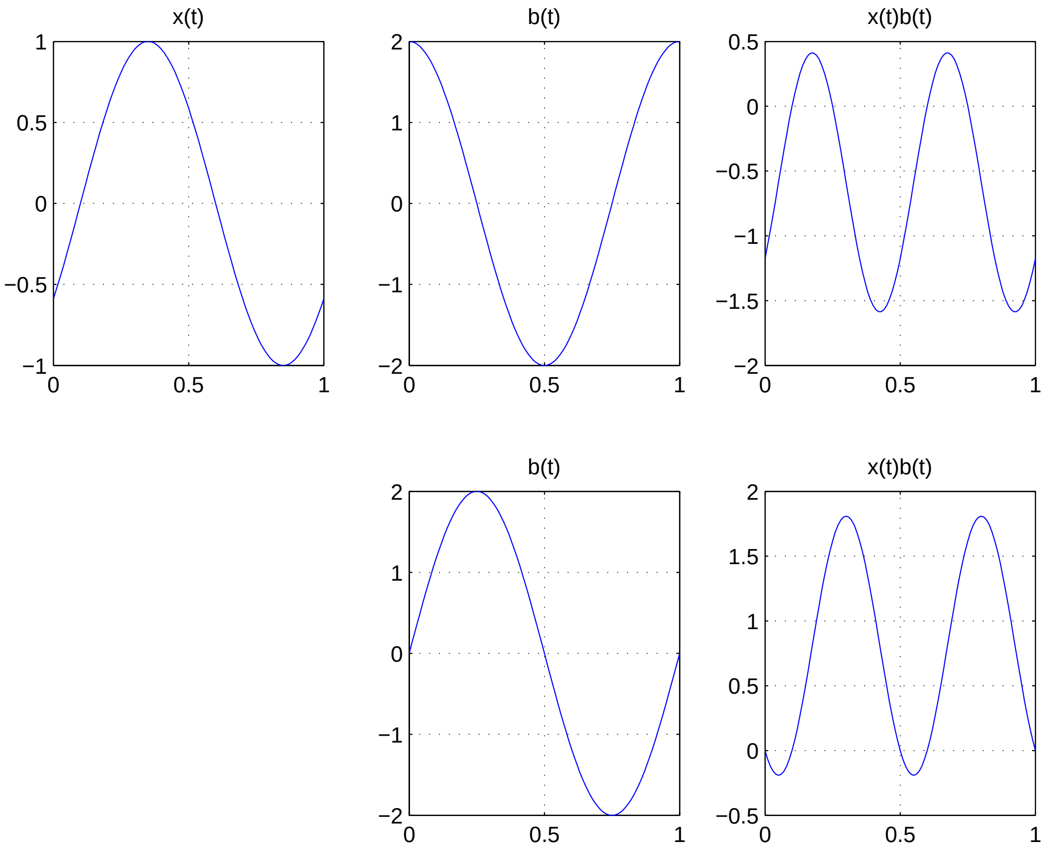
$\Rightarrow$ budeme potřebovat sinusovku I cosinusovku !!!

Tož s obojím ...

$$s(t) = \sin(2\pi t - \pi/5)$$

$$b_1(t) = 2\cos(2\pi t) \qquad \int_0^1 s(t)b_1(t)dt = -0.59$$

$$b_2(t) = 2\sin(2\pi t) \qquad \int_0^1 s(t)b_1(t)dt = 0.81$$



To už je dobré, ale my máme raději ... Komplexní exponenciály !

které v sobě sdružují cos i sin !

$b_1(t) = e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$

nalezení koeficientu: $c_1 = \int x(t) b_1^\star(t) dt$

hloupé je, že násobení koeficientu s bází je komplexní ... takže si přidáme ještě jednu komplexně sdruženou bázi:

$b_{-1}(t) = e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$

nalezení koeficientu: $c_{-1} = \int x(t) b^\star_{-1}(t) dt$

... a teď konečně ... Výpočet koeficientů FŘ

Koeficienty Fourierovy řady můžeme spočítat pomocí vzorce:

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt,}$$

kde $\int_{T_1}$ značí integraci přes libovolnou periodu (typicky od 0 do T_1 nebo od $-\frac{T_1}{2}$ do $\frac{T_1}{2}$, ale můžeme si klidně vymyslet integraci od $25T_1$ do $26T_1\ldots$).

Kreslení koeficientů FŘ

Koeficienty FŘ mají své indexy ($k = -\infty$ až ∞), ale uvědomme si, že jsou svázány i s frekvencemi: c_1 se základní kruhovou frekvencí signálu ω_1, c_2 s $2\omega_1$, atd. Koeficienty se zápornými indexy budou svázány se zápornými kruhovými frekvencemi: c_{-1} s $-\omega_1$, c_{-2} s $-2\omega_1$, atd. Nebojme se záporných kruhových frekvencí: jedná se pouze o to, že exponenciála $c_{-k}e^{-jk\omega_1 t}$ se otáčí opačně než $c_k e^{jk\omega_1 t}$. Obě dohromady pak dají rozumnou kosinusovku $C_k\cos(k\omega_1 t + \phi_k)$.

Jelikož jsou koeficienty **komplexní čísla**, budeme do jednoho obrázku zakreslovat jejich **modul** v závislosti na frekvenci, do druhého jejich **argument**.

Jelikož se jedná o vyjádření signálu ve frekvenční oblasti, budeme polohám a hodnotám koeficientů FŘ říkat **SPEKTRUM**. V případě periodických signálů to bude spektrum **čárové** (jednotlivé koeficienty $\approx$ čáry). Časem uvidíme i jiná spektra.

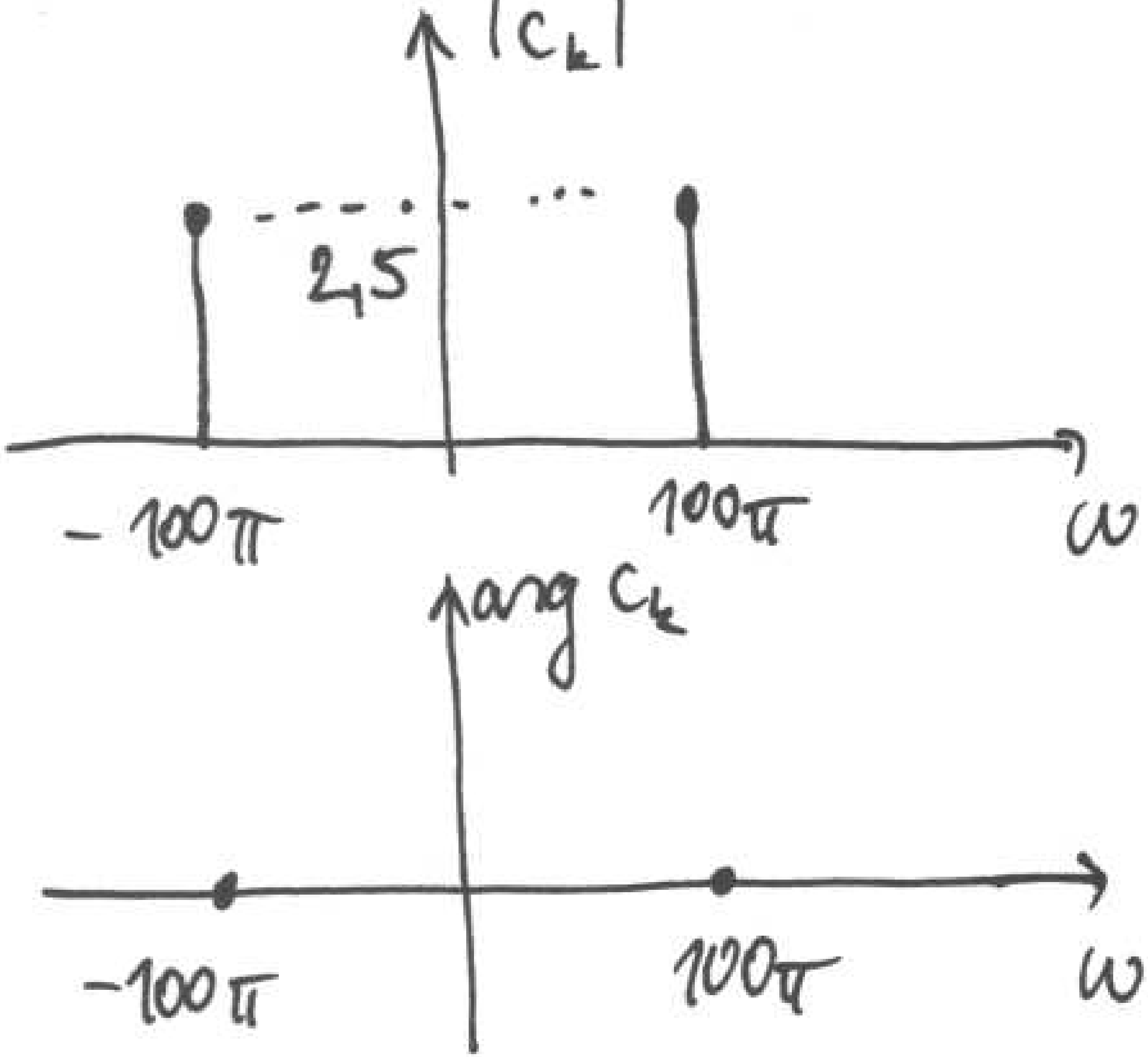
Příklad 1. Jaké jsou koeficienty Fourierovy řady signálu: $x(t) = 5\cos(100\pi t)$?

Základní kruhová frekvence je $\omega_1 = 100\pi$. Pro výpočet koeficientů nemusíme integrovat, protože exponenciálu kosinusovku rozepíšeme snadno jako:

$$x(t) = \frac{5}{2}e^{j100\pi t} + \frac{5}{2}e^{-j100\pi t},$$

takže hodnoty koeficientů střílíme od pasu:

$$c_1 = \frac{5}{2}, \qquad c_{-1} = \frac{5}{2}$$


|c_k|
2,5
- 100π
100π
ω
arg c_k
-100π
100π
ω

Příklad 2. Jaké jsou koeficienty Fourierovy řady signálu: $x(t) = 5\cos(100\pi t - \frac{\pi}{4})$?

Opět neintegrujeme. Buď využijeme toho, že tuto kosinusovku můžeme zapsat jako:

$$2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j100\pi t} + 2.5e^{+j\frac{\pi}{4}}e^{-j100\pi t},$$

z čehož vycházejí hodnoty c_1 a c_{-1}:

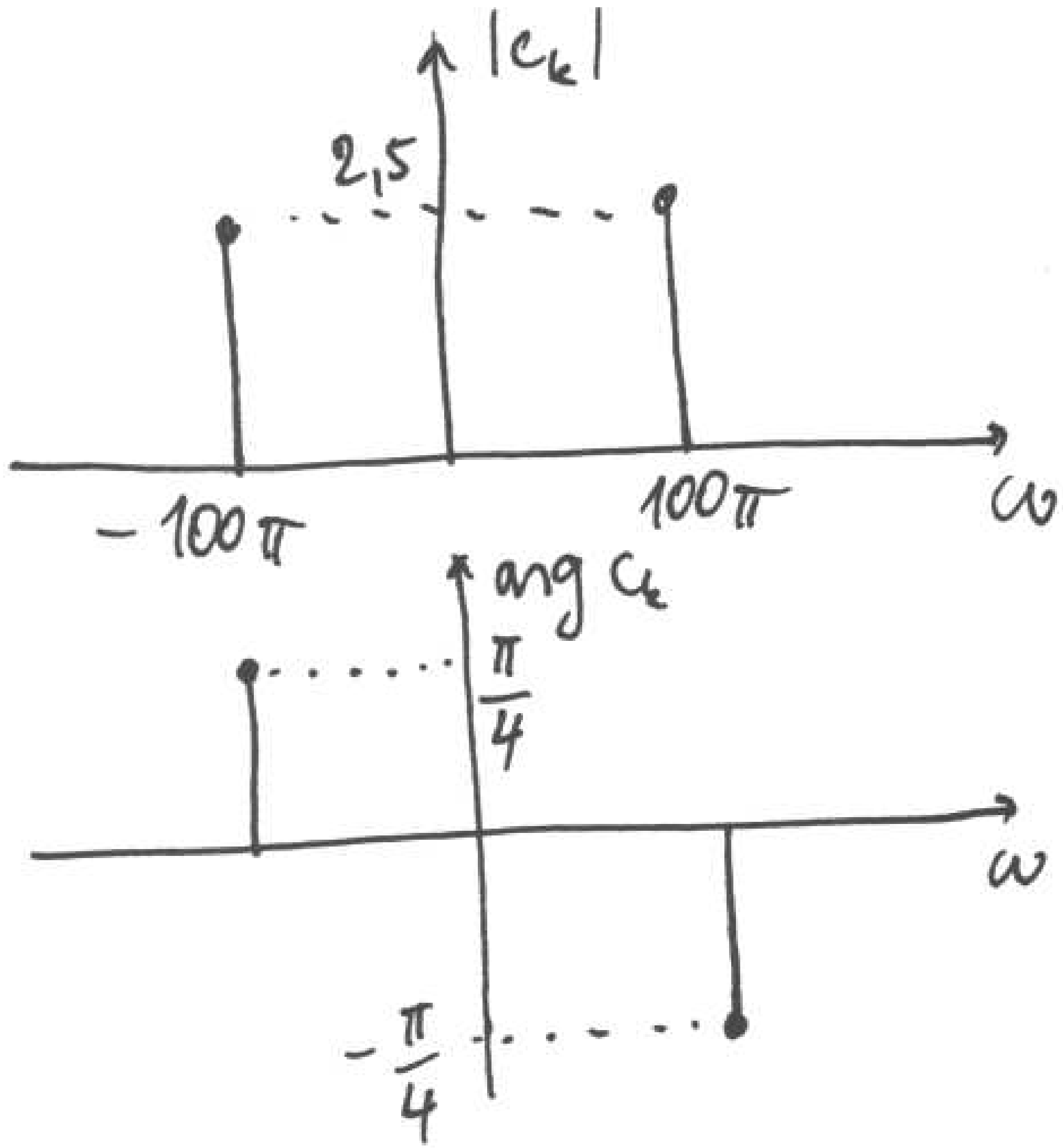
$$c_1 = 2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}, \qquad c_{-1} = 2.5e^{+j\frac{\pi}{4}}$$

Nebo se podíváme, jak jsou vztaženy modul a argument koeficientů c_k s amplitudou a počáteční fází harmonických složek (zde je jen jedna – ta základní – s $C_1 = 5$ a $\phi_1 = -\frac{\pi}{4}$):

$$|c_1| = \frac{C_1}{2} = 2.5, \quad \arg c_1 = \phi_1 = -\frac{\pi}{4}, \quad \text{takže} \quad c_1 = 2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Koeficient c_{-1} musí být komplexně sdružený (stejný modul, opačný argument):

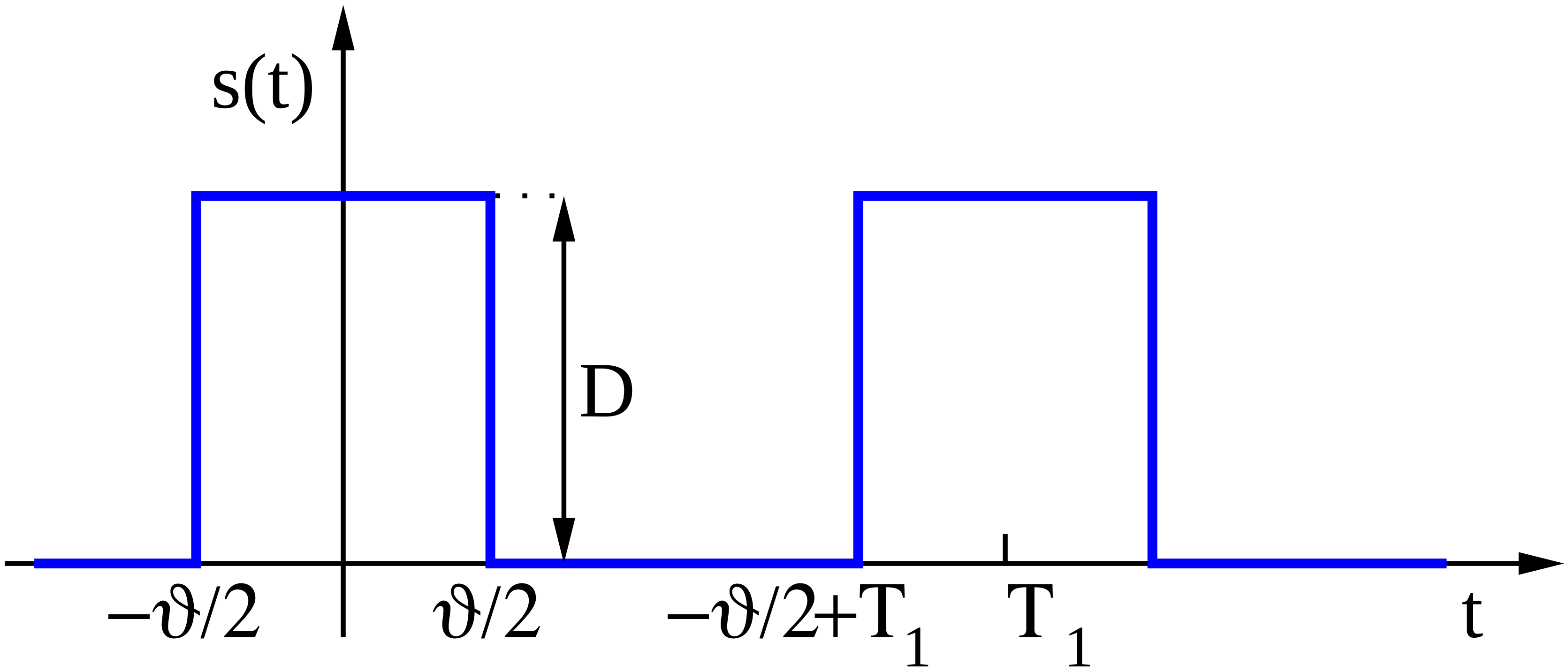
$$|c_{-1}| = \frac{C_1}{2} = 2.5, \quad \arg c_{-1} = -\phi_1 = \frac{\pi}{4}, \quad \text{takže} \quad c_{-1} = 2.5e^{j\frac{\pi}{4}}.$$


|c_k|
2,5
-100π
100π
ω
ang c_k
π/4
ω
-π/4

Příklad 3. . . . ve kterém si konečně trochu zaintegrujeme! Jaké jsou koeficienty Fourierovy řady periodického sledu obdélníkových impulsů:

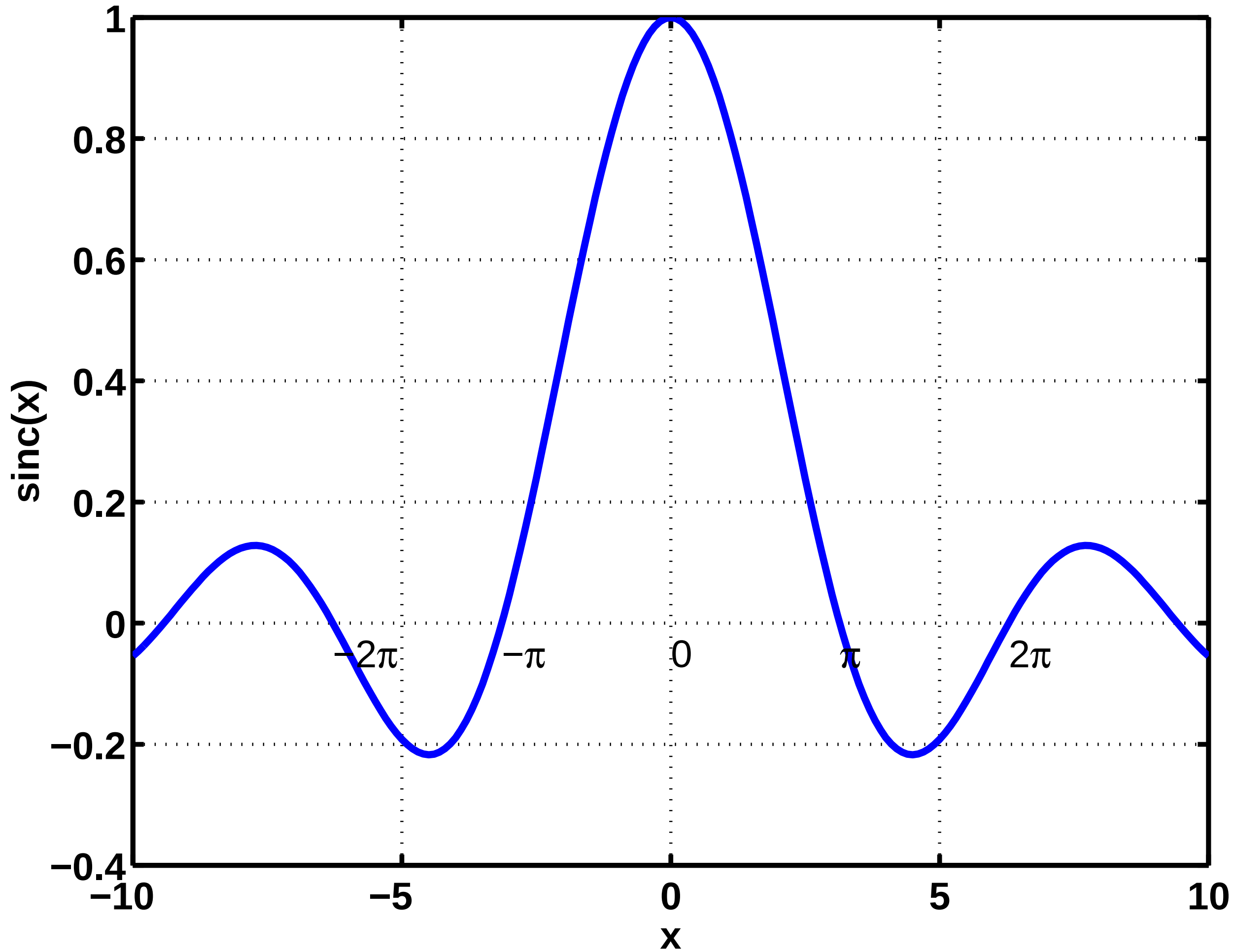
$$x(t) = \begin{cases} D & \text{pro} \quad -\frac{\vartheta}{2} \le t \le \frac{\vartheta}{2} \\ 0 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{2} \le t < -\frac{\vartheta}{2} \quad \text{a} \quad \frac{\vartheta}{2} < t \le \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

s periodou T_1?



Příprava 1. — Zavedení funkce sinc$(\cdot)$

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{pro} \quad x \neq 0 \\[2ex] 1 & \text{pro} \quad x = 0 \end{cases}$$



... Pozor na Matlab! Definuje sinc jako $\frac{sin(\pi x)}{\pi x}$!!!

Příprava 2. — Výpočet integrálu z e^{jxy} aneb "Šebestova pomůcka — ŠP"

$$I(x) = \int_{-b}^{b} e^{\pm jxy} dy$$

a) pro $x = 0$ je:

$$I(0) = 2b$$

b) pro $x \neq 0$ je:

$$I(x) = \left[\frac{e^{\pm jxy}}{\pm jx}\right]_{-b}^{b} = \frac{e^{jxb} - e^{-jxb}}{jx} =$$

$$= \frac{2}{x}\frac{e^{jxb} - e^{-jxb}}{2j} = 2b\frac{\sin bx}{bx}.$$

Dílčí výsledky lze souhrnně zapsat vztahem:

$$\boxed{\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy} dy = 2b\,\mathrm{sinc}(bx).}$$

Spektrum periodického sledu obd. impulsů — návrat

Impulsy mají šířku ϑ, výšku D a opakují se s periodou T_1.

Koeficienty Fourierovy řady c_k vypočteme pomocí základního vztahu:

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt \\
&= \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} De^{-jk\omega_1 t}dt = \frac{D}{T_1}\int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} e^{-jk\omega_1 t}dt.
\end{aligned}
$$

Pro výpočet integrálu použijeme dříve odvozený vztah – “ŠP”, kde bude $t = y$, $b = \vartheta/2$ a $x = k\omega_1$. Díky tomu můžeme pro k-tý koeficient Fourierovy řady c_k psát:

$$c_k = \frac{D}{T_1}2\frac{\vartheta}{2}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right) = D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right).$$

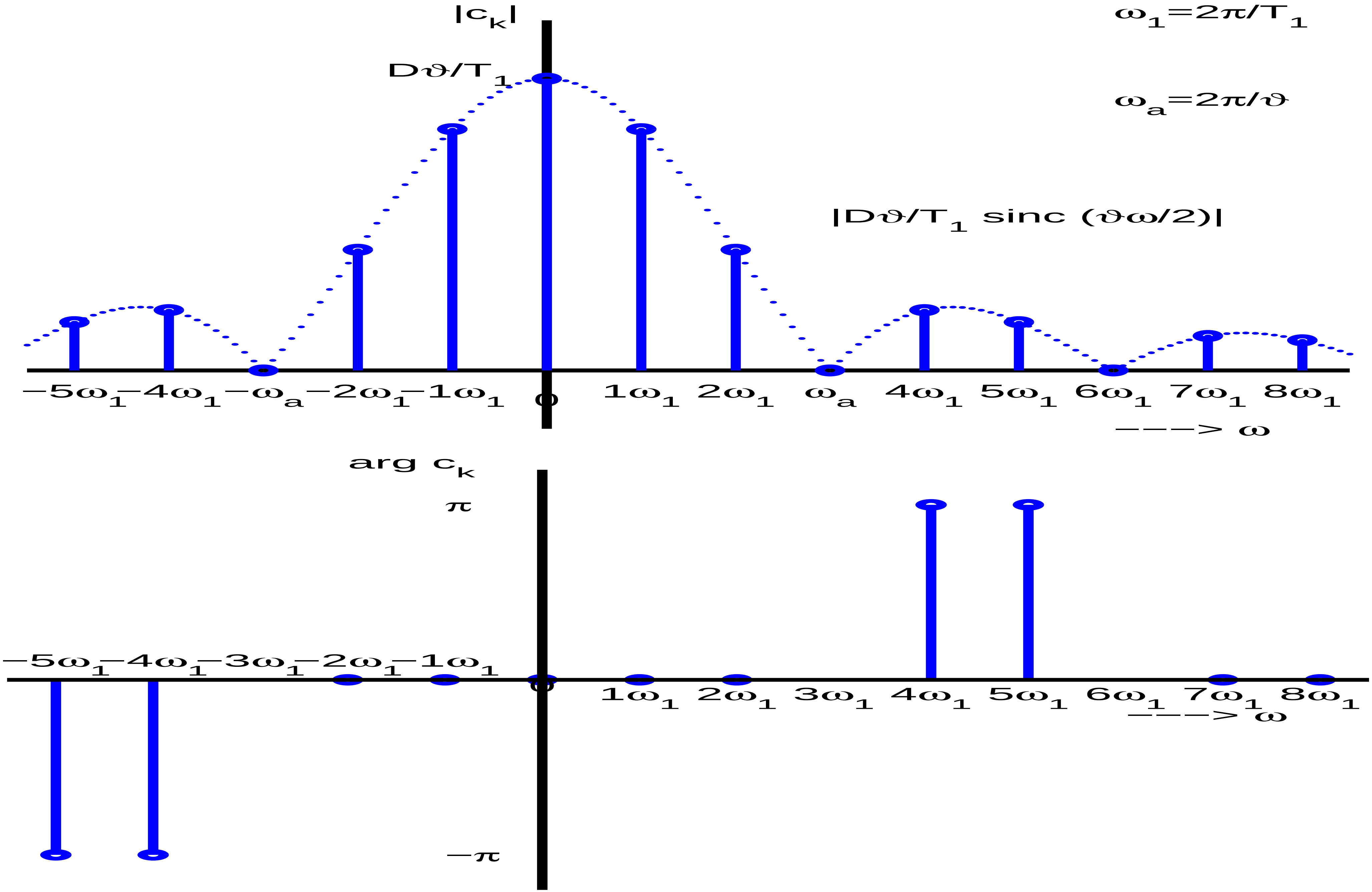
Kreslení výsledku nebude triviální :-(

- Připravíme si grafy ω-$|c_k|$ a ω-$\arg(c_k)$.

- Uvědomme si, že výsledkem jsou reálná čísla - buď kladná nebo záporná, podle toho, jaké znaménko má funkce sinc.
- Připravme si pomocnou funkci (tečkovaně) pro obecné ω (pod ni pak budeme "sázet" koeficienty): $\left|D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)\right|$. Uvědomme si, že hlavní lalok funkce sinc je dvakrát širší než postranní laloky. Velmi důležitým bude bod ω_a, kde se funkce poprvé dostane do nuly. Tento bod zjistíme tak, že argument funkce sinc položíme rovný π:

$$\frac{\vartheta}{2}\omega_a = \pi \quad \longrightarrow \quad \omega_a = \frac{2\pi}{\vartheta}.$$

- pod pomocnou funkci nasázíme koeficienty na každý násobek ω_1.
- argument pro kladné koeficienty (sinc$(\cdot) > 0$) je 0. Argument pro záporné koeficienty (sinc$(\cdot) < 0$) musí být $\pm\pi$. Dohoda: pro kladné ω to bude $+\pi$ a pro záporné $-\pi$, ale když to bude naopak, není to špatně.


|c_k|
Dϑ/T_1
ω_1=2π/T_1
ω_a=2π/ϑ
|Dϑ/T_1 sinc (ϑω/2)|
−5ω_1 −4ω_1 −ω_a −2ω_1 −1ω_1 0 1ω_1 2ω_1 ω_a 4ω_1 5ω_1 6ω_1 7ω_1 8ω_1
−−−> ω
arg c_k
π
−π
−5ω_1 −4ω_1 −3ω_1 −2ω_1 −1ω_1 0 1ω_1 2ω_1 3ω_1 4ω_1 5ω_1 6ω_1 7ω_1 8ω_1
−−−> ω

c_0 a střední hodnota

Koeficient c_0 leží v maximu pomocné funkce $\left| D\frac{\vartheta}{T_1}\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)\right|$ pro $\omega = 0$. Jeho hodnota je tedy

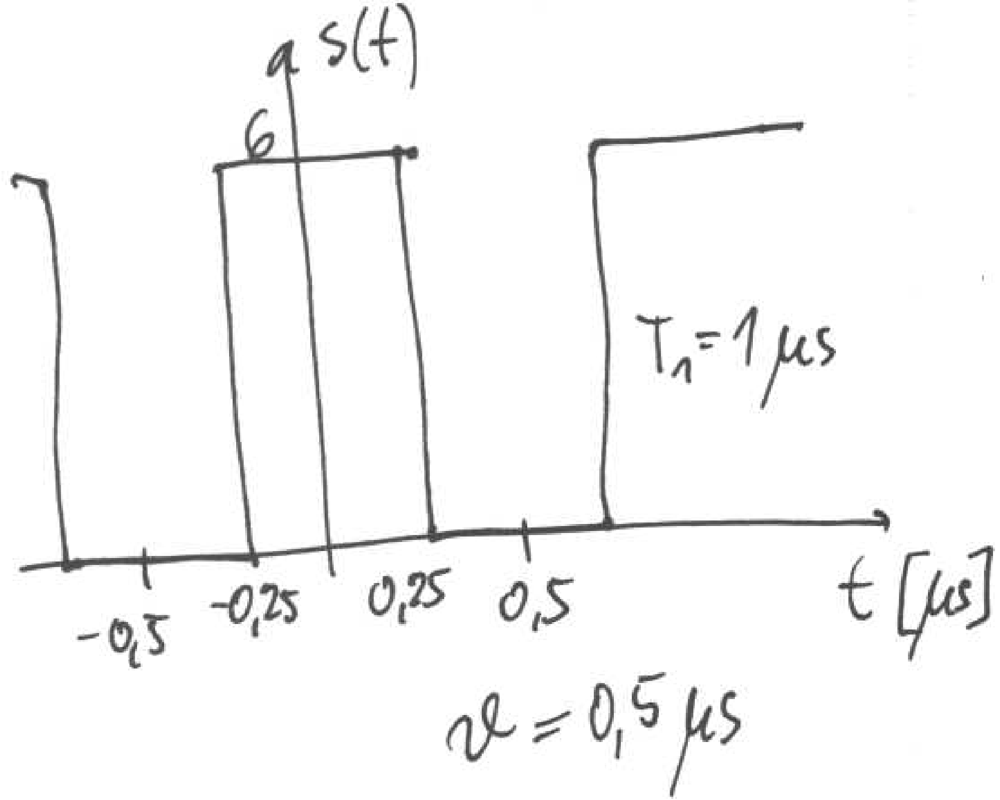
$$c_0 = D\frac{\vartheta}{T_1}.$$

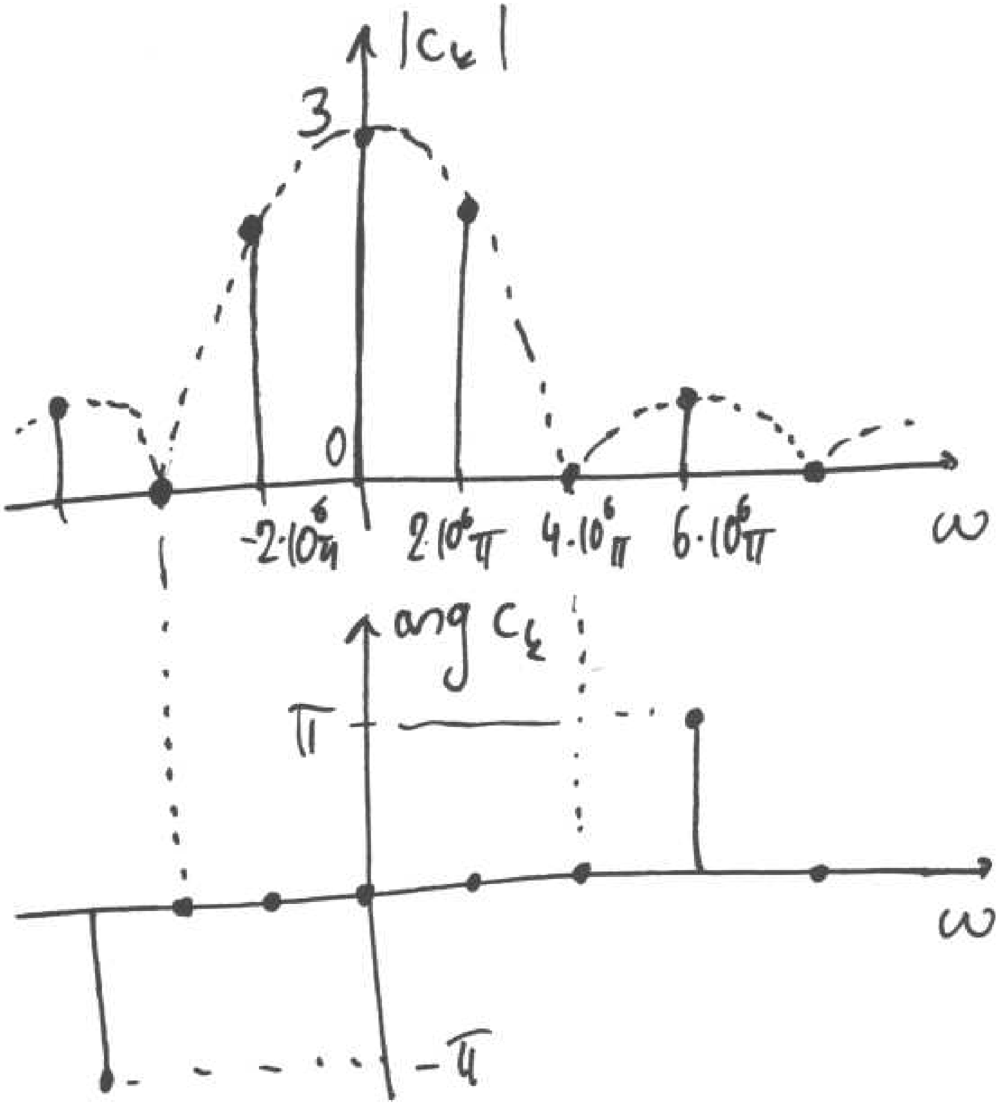
Víme ale také, že hodnota c_0 by měla být rovna stejnosměrné složce signálu, což je střední hodnota $x(t)$. Pro náš signál:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} x(t)dt = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} Ddt = \frac{1}{T_1}\left[Dt\right]_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} = \frac{D\vartheta}{T_1}.$$

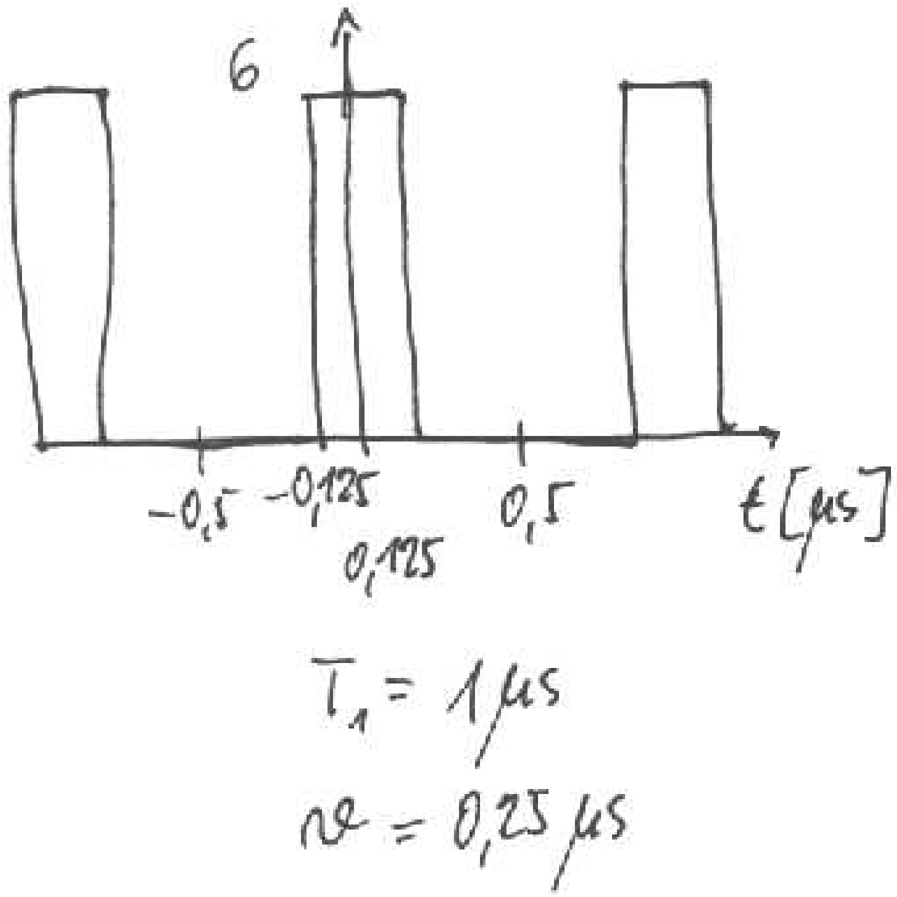
Dokázáno!

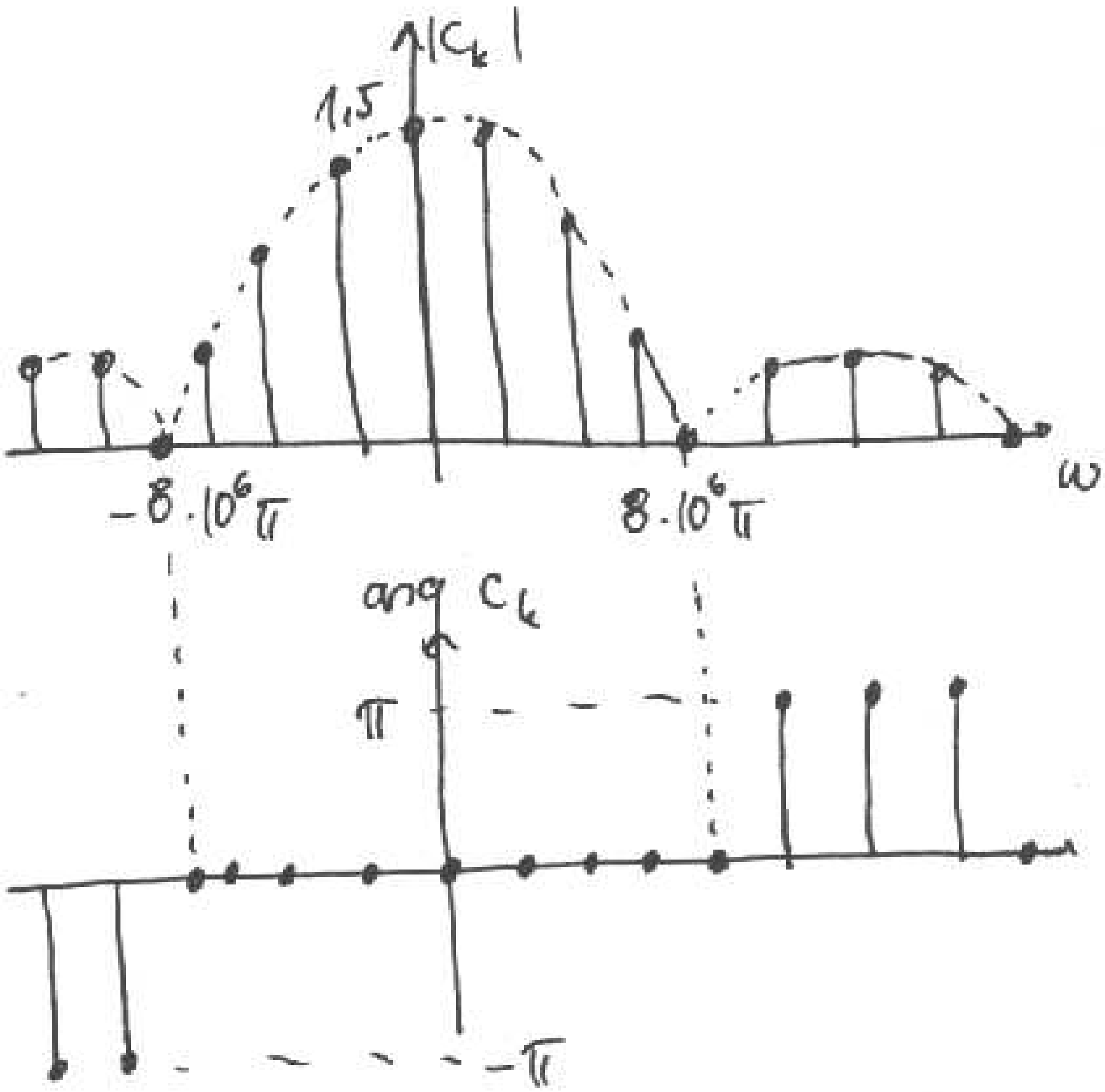
Příklad 1. $D = 6$, $T_1 = 1\ \mu$s, $\vartheta = 0.5\ \mu$s. **Řešení:** $f_1 = 1$ MHz, $\omega_1 = 2 \times 10^6 \pi$ rad/s, pomocná funkce: $\left| D \frac{\vartheta}{T_1} \mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) \right| = |3\mathrm{sinc}(0.25 \times 10^{-6}\omega)|$. Nuly se dotýká pro $0.25 \times 10^{-6}\omega = k\pi$, tedy pro $\omega = k4 \times 10^6 \pi$.



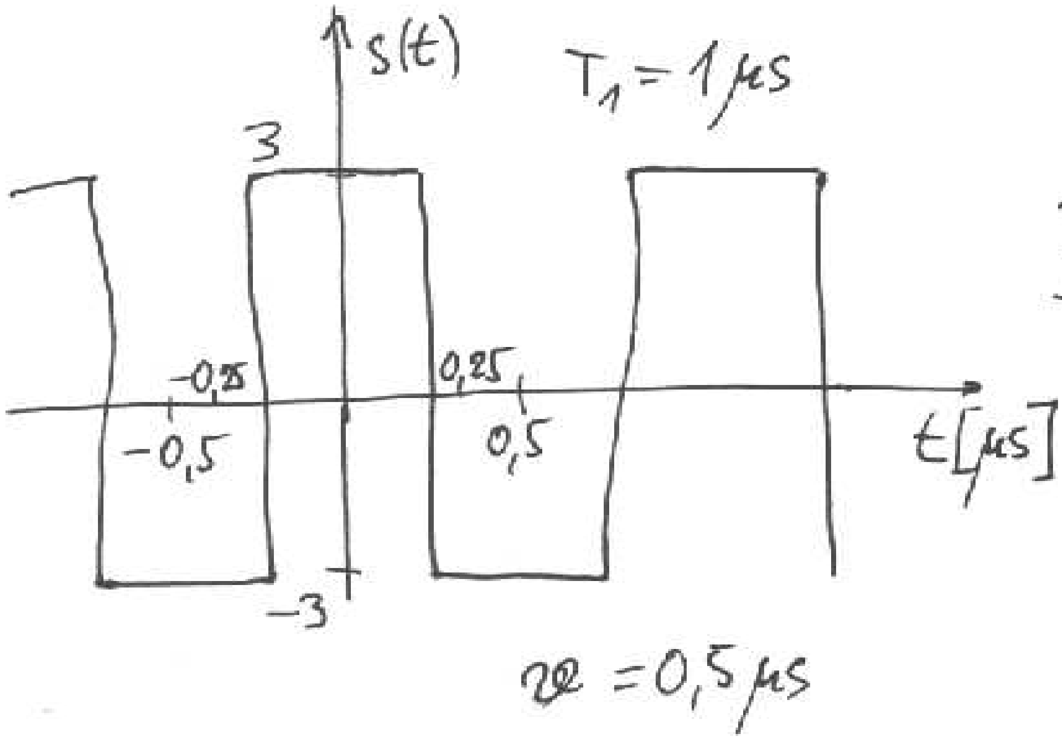


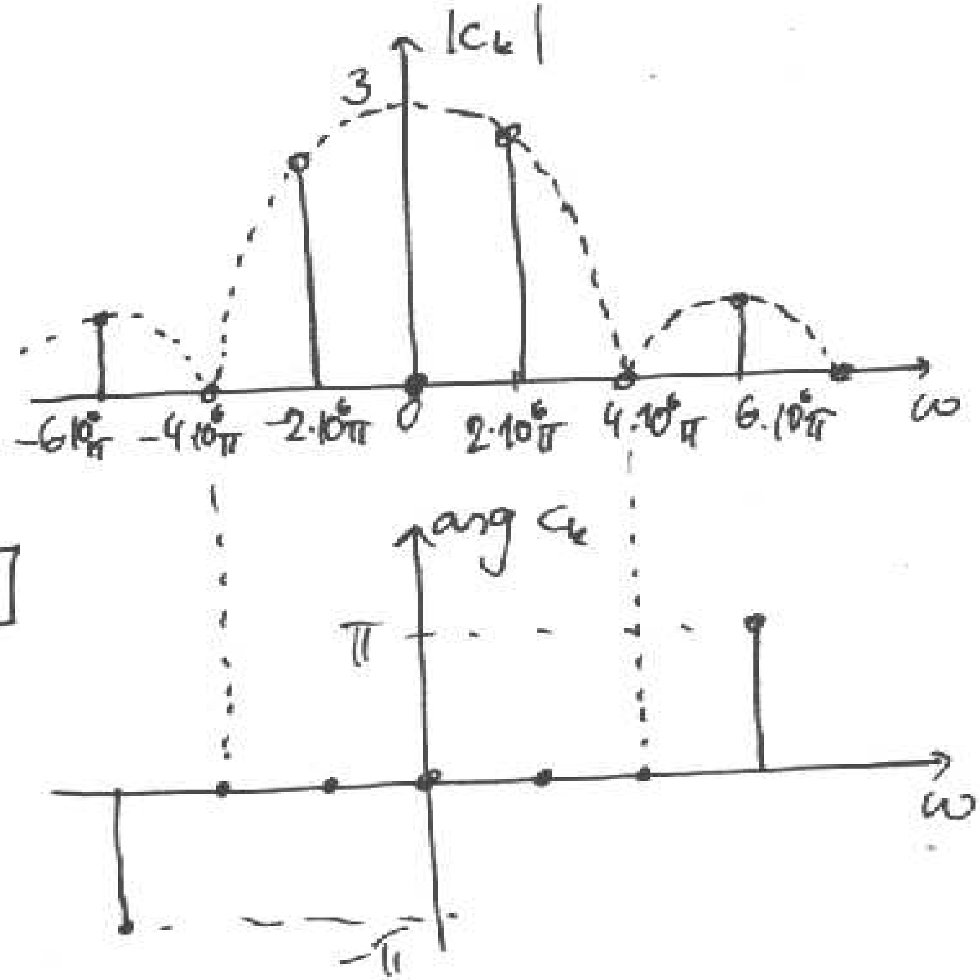
Příklad 2. $D = 6$, $T_1 = 1\ \mu$s, $\vartheta = 0.25\ \mu$s. **Řešení:** $f_1 = 1$ MHz, $\omega_1 = 2 \times 10^6\pi$ rad/s, pomocná funkce: $\left|D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)\right| = |1.5\text{sinc}(0.125 \times 10^{-6}\omega)|$. Nuly se dotýká pro $0.125 \times 10^{-6}\omega = k\pi$, tedy pro $\omega = k8 \times 10^6\pi$.



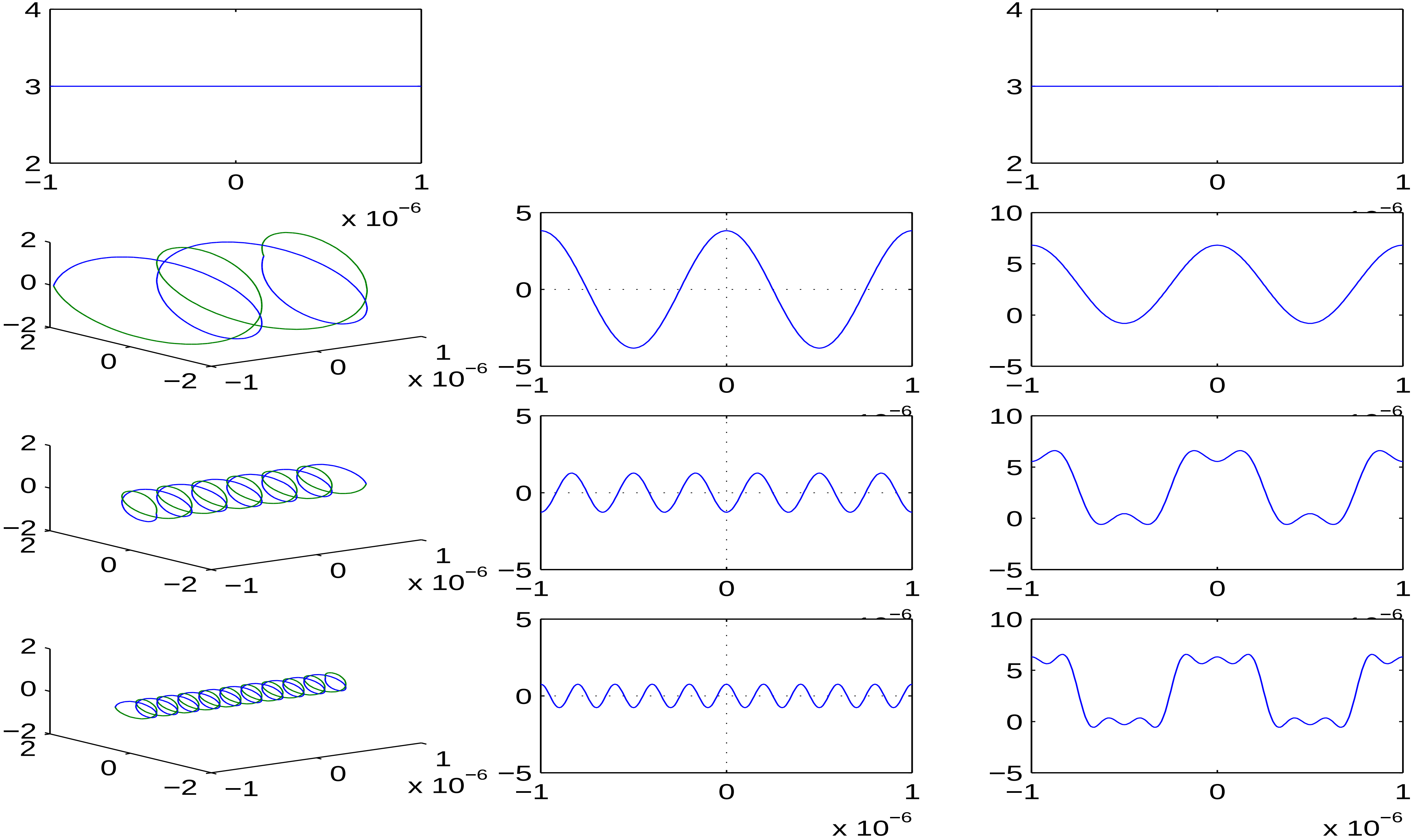


Příklad 3. ... totéž, co příklad 1., ale signál je centrovaný okolo 0. Změní se pouze c_0. který bude 0, protože střední hodnota je 0.

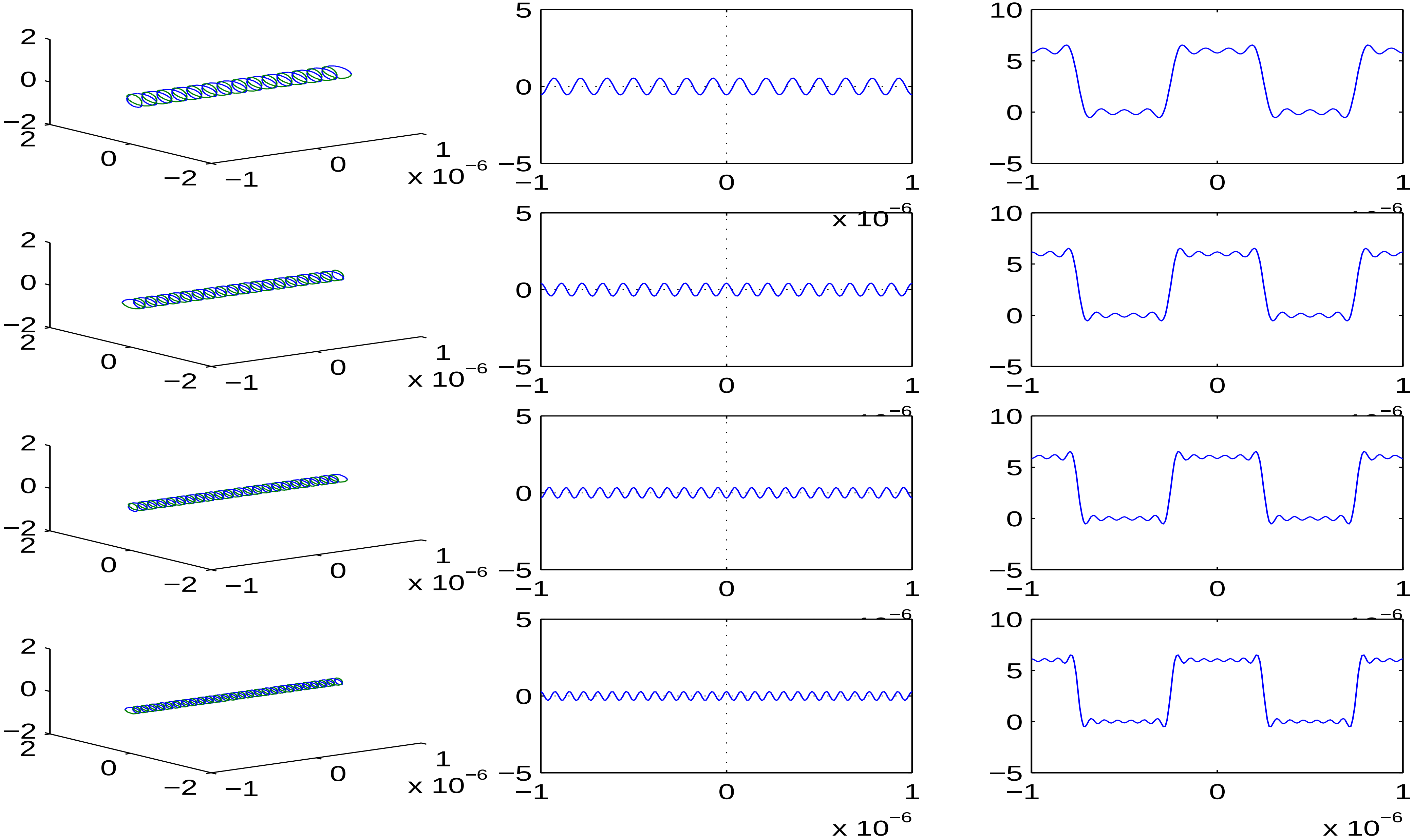




Ještě příklad 1. – jak se to skládá: $k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5$

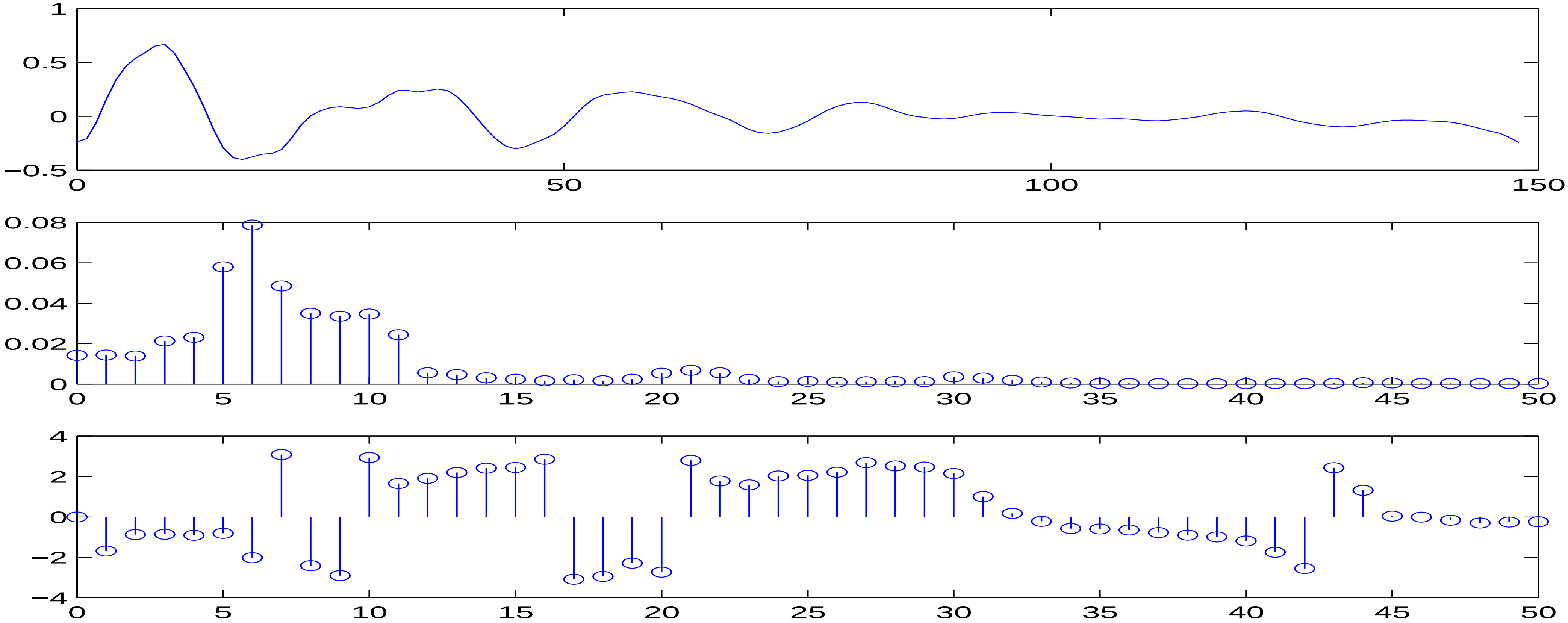


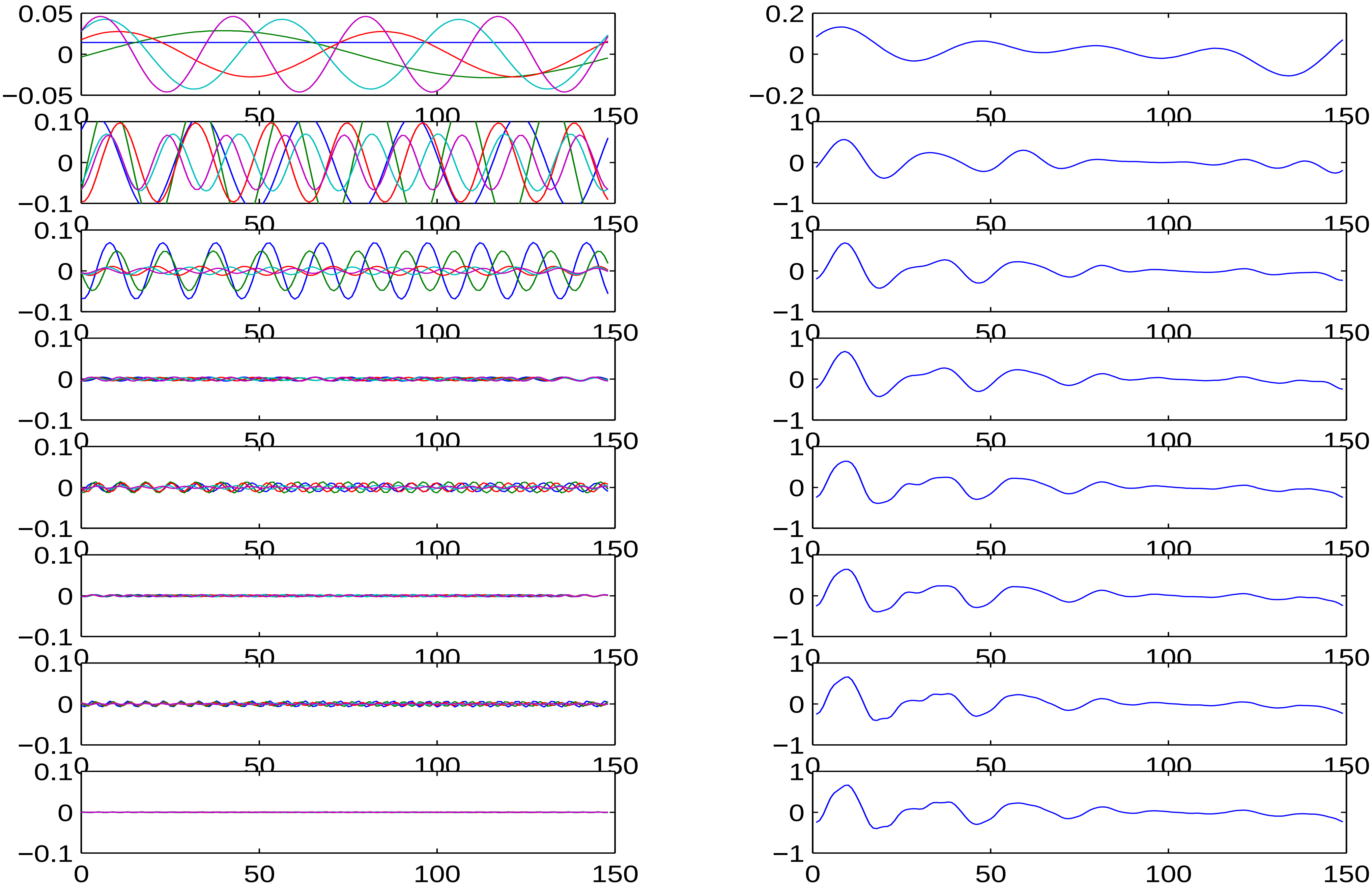
$k = \pm 7, \pm 9, \pm 11, \pm 13$



Můžeme také rozkládat něco jiného ?

Příklad na řečovém signálu: úsek 'a', $F_s = 16$ kHz,
vybrána 1 perioda, opakování 50× ⇒ `xx.wav`.
Výpočet koeficientů FŘ, postupné sčítání po 5-ti kosinusovkách:
`yytill14.wav` – $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4$.
`yytill19.wav` – $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, \pm6, \pm7, \pm8, \pm9$. atd...




0.05
0
−0.05
0.2
−0.2
0.1
−0.1
1
−1
0
50
100
150

Poučky o spektrech periodických signálů

	$x(t)$	c_k
linearita	$a\,x_a(t) + b\,x_b(t)$	$a\,c_{a,k} + b\,c_{b,k}$
posunutí v sig. v čase	$x(t-\tau)$	$c_k e^{-jk\omega_1\tau}$
změna časového měřítka	$x(mt)$	c_k

Trochu více o posunutí v čase

koeficienty FŘ se počítají $c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)e^{-jk\omega_1 t}dt$, koeficienty posunutého signálu $x(t-\tau)$ jsou pak:

$$c_{k,\tau} = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t-\tau)e^{-jk\omega_1 t}dt = \left| \begin{array}{c} r = t-\tau \\ t = r+\tau \\ dr = dt \end{array} \right| = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(r)e^{-jk\omega_1 (r+\tau)}dr =$$

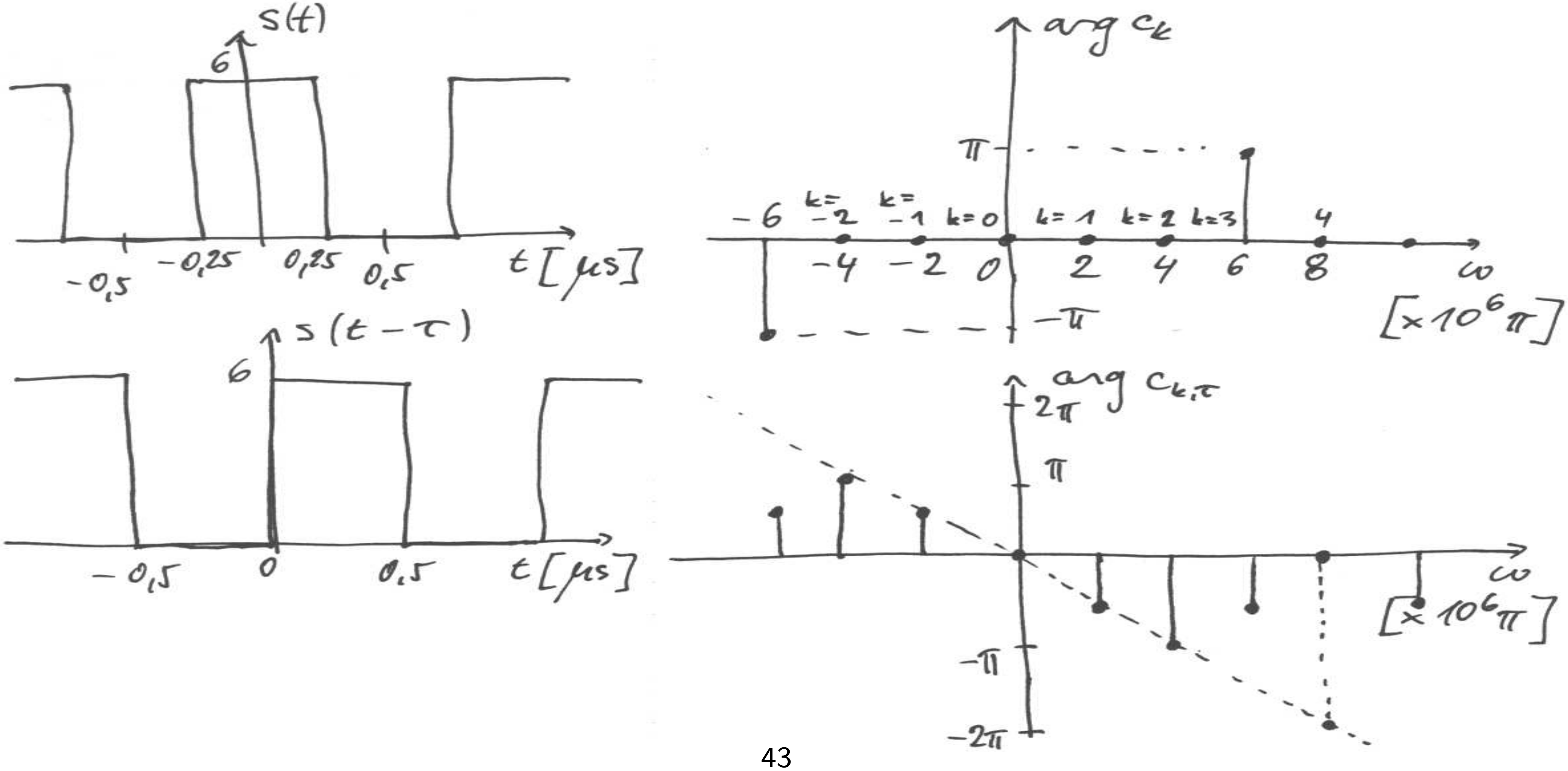
$$= \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(r)e^{-jk\omega_1 r}e^{-jk\omega_1 \tau}dr = e^{-jk\omega_1 \tau}c_k$$

Jak se tedy vlastně koeficienty c_k změní ? Vzpomeňme si, jak se násobí komplexní čísla...

- amplituda NE, protože $|e^{-jk\omega_1\tau}| = 1$: $|c_{k,\tau}| = c_k$.
- fáze ANO - posune se o násobek $-k\omega_1\tau$: $\arg c_{k,\tau} = \arg c_k - k\omega_1\tau$.

Posunutí – příklad

signál $x(t)$ z př. 1.: $D = 6$, $T_1 = 1$ μs, $\vartheta = 0.5$ μs. Posunutý signál $x(t - 0.25 \times 10^{-6})$: koeficienty jsou násobeny $-k\omega_1\tau = -k\frac{2\pi}{T_1}\tau = -k\frac{2\pi}{1\times 10^{-6}}(0.25 \times 10^{-6}) = -k\frac{\pi}{2}$. Sčítáme s původní fází, a když se dostaneme do 2π, "překlopíme se zpět" do 0.



Střední výkon periodických signálů – Parsevalův teorém

$$P_s = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Výkon signálu tak můžeme spočítat nejen integrací $|\cdot|^2$ v čase, ale také **součtem** druhých mocnin abs. hodnot všech koeficientů FŘ. Součet je většinou jednodušší než integrál.

Proč? Jaký je výkon k-té komplexní exponenciály:

$$\frac{1}{T_1}\int_{T_1} |c_k e^{jk\omega_1 t}|^2 dt = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} |c_k|^2 dt = |c_k|^2$$

Její výkon je tedy $|c_k|^2$, pokud všechny výkony všech exponenciál sečteme, dostaneme celkový střední výkon P_s.

Konvergence FŘ

3 Dirichletovy podmínky:

1. $x(t)$ musí být absolutně integrovatelný:

$$\int_{T_1} |x(t)| < \infty$$

   ... porušuje například: $x(t) = 1/t$ pro $0 < t \leq 1$, periodický s $T_1 = 1$.

2. $x(t)$ musí být omezeně variabilní – na každém konečném intervalu musí mít konečný počet maxim a minim.
   ... porušuje například: $x(t) = \sin \frac{2\pi}{t}$ pro $0 < t \leq 1$, periodický s $T_1 = 1$.

3. musí mít na každém konečném intervalu konečný počet nespojitostí.

Pro signály, se kterými se budeme setkávat, jsou tyto podmínky **splněny**.

SHRNUTÍ

- **Spektrum periodického signálu je čárové.**
- **Když se signál zúží, spektrum se roztáhne.**
- **Když se signál zpozdí, fáze se naklopí z kopce, když se předběhne, naklopí se do kopce.**