Základní moudra o komplexních číslech

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

Reálná čísla leží na 1-rozměrné reálné ($\Re$) **ose**. Komplexní čísla leží v komplexní **rovině** a mají 2 složky: reálnou a imaginární. K imaginární složce ($\Im$) píšeme i (matematici) nebo j (elektrotechnici a doufám, že také **informatici** :-)

Podivné vlastnosti komplexní jednotky:

$j = \sqrt{-1}, \quad jj = -1, \quad jjj = -j, \quad jjjj = +1.$

Složkový tvar komplexního čísla:

neboli zápis v pravoúhlých souřadnicích:

$$z = a + jb$$

Komplexní číslo jako vektor

Komplexní číslo si také můžeme představit jako **vektor**, který začíná v počátku komplexní roviny a končí v daném komplexním čísle. Polární souřadnice:

- **modul, absolutní hodnota nebo magnituda** r komplexního čísla je délka tohoto vektoru.
- **argument, úhel nebo fáze** ϕ komplexního čísla je úhel, který daný vektor svírá se $\Re$ osou.

Jak spolu a, b a r, ϕ souvisí ?

$$a = r\cos\phi \qquad b = r\sin\phi$$

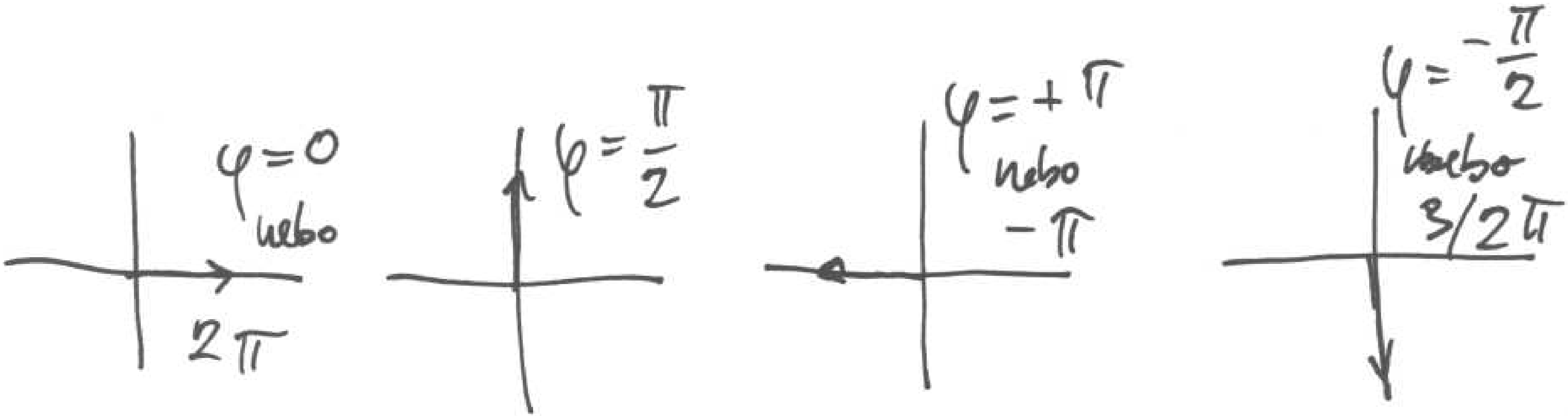
komplexní číslo tedy můžeme zapsat jako:

$$z = r\cos\phi + jr\sin\phi.$$

Převod pravoúhlé $\Rightarrow$ polární:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{b}{a}.$$

U posledního vzroce si ovšem dávejme **velký pozor!** Platí totiž pouze pro 1. kvadrant!



Příklad 1

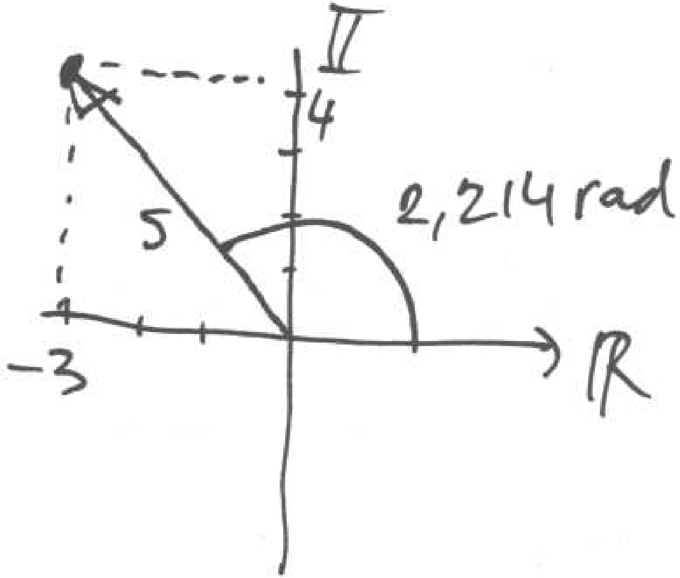
$$z = -3 + j4, \quad r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad \phi = \tan^{-1}\frac{4}{-3} = -0.92$$

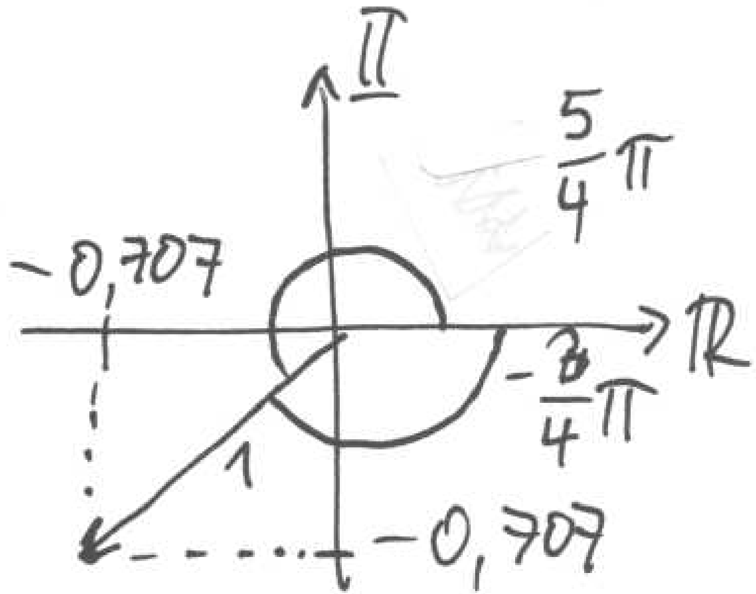
což je **špatně!**. Správný úhel je $\phi = \pi - 0.92 = 2.214$ rad.

Příklad 2

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad r = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}, \quad \phi = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$$

což je **také špatně!**. Správný úhel je $\phi = \frac{5}{4}\pi$ nebo $\phi = -\frac{3}{4}\pi$.





Exponenciální tvar komplexního čísla:

je druhý možný zápis:

$$z = re^{j\phi} \quad \text{nebo} \quad z = r \exp j\phi$$

Operace s komplexními čísly:

- komplexní sdružení: $z^\star = a - jb = re^{-j\phi}$.
- sčítání/odečítání: $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$.
- násobení/dělení: $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{j(\phi_1+\phi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\phi_1-\phi_2)}$.

Nejzajímavější komplexní čísla $e^{j\phi}$ leží na **jednotkové kružnici**: $r = 1$.

$$\boxed{e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi}$$

Pomocí tohoto vzorečku můžeme odvodit mnoho pouček o komplexních číslech a o goniometrických funkcích, nejvýznamnější je:

$$e^{j\phi} + e^{-j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi + \cos\phi - j\sin\phi = 2\cos\phi$$

$$\boxed{\cos\phi = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2},}$$

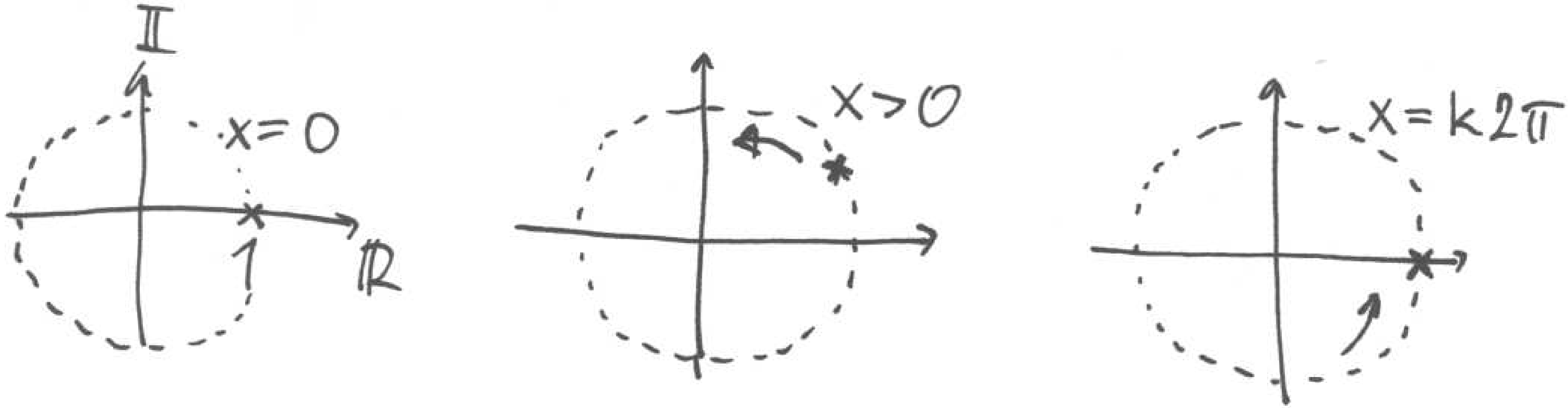
ale i jiné, třeba:

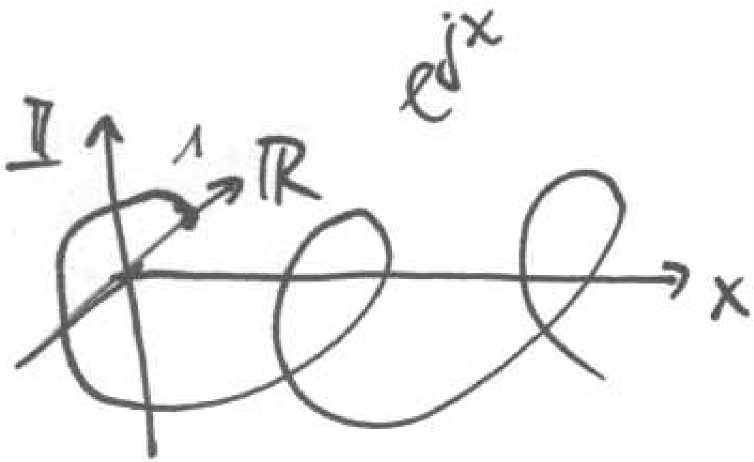
$$e^{j\phi} - e^{-j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi - \cos\phi - (-j\sin\phi) = 2j\sin\phi$$

$$\sin\phi = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}$$

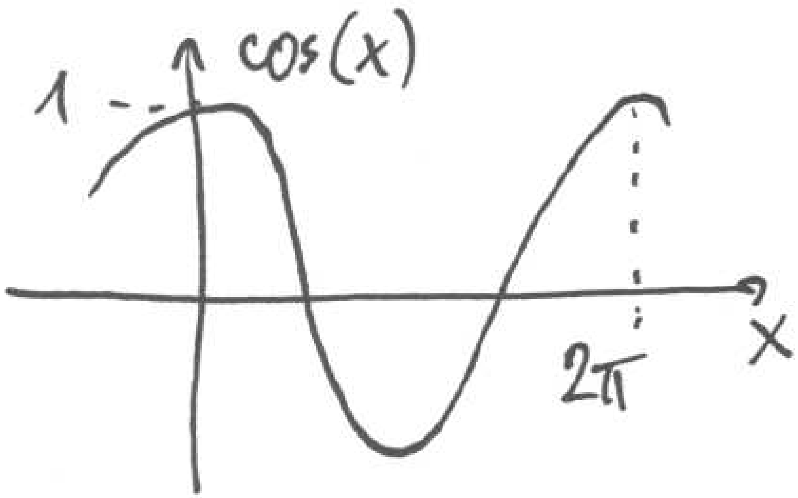
Funkce e^{jx}

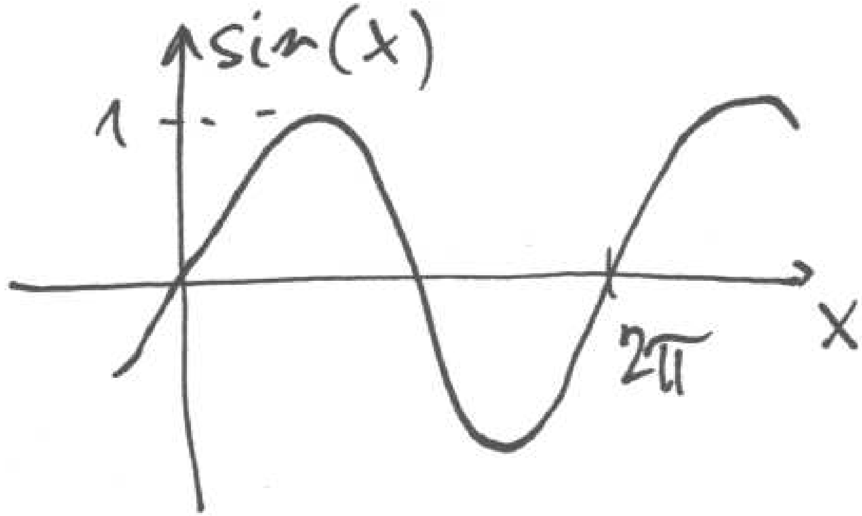
když se x mění:





$$\Re(e^{jx}) = \cos x \qquad \Im(e^{jx}) = \sin x$$

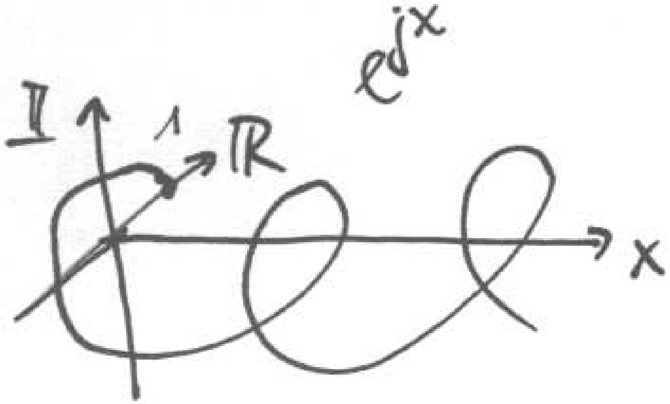


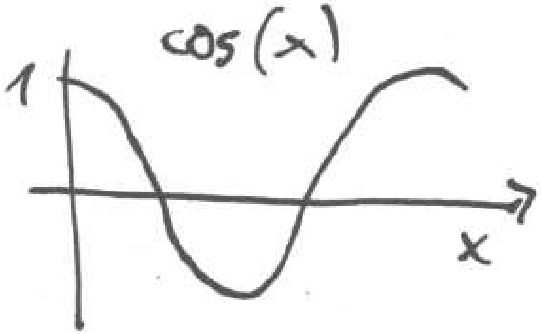


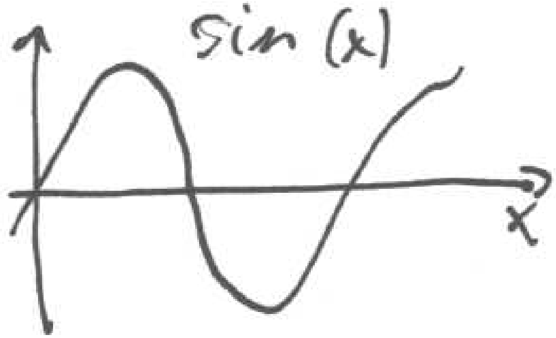
jsou to “průměty bodu” e^{jx} do $\Re$ a $\Im$ osy!

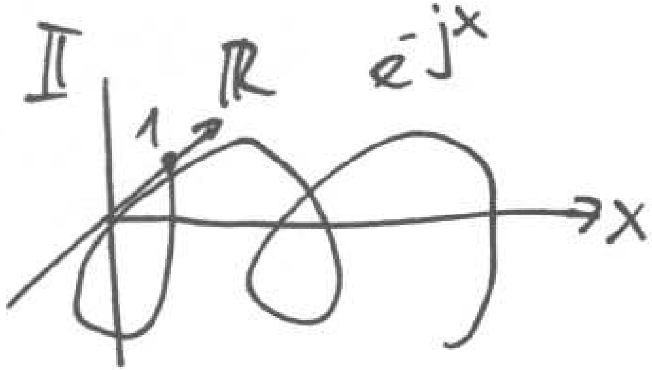
Vyjádření cosinusovky

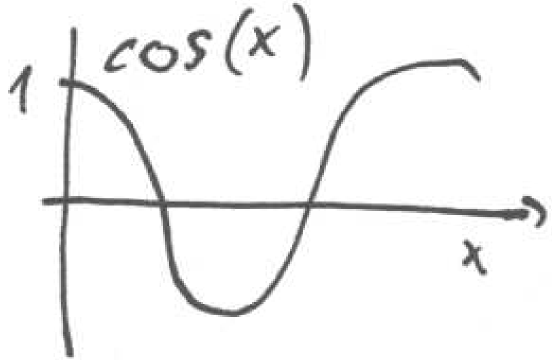
$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

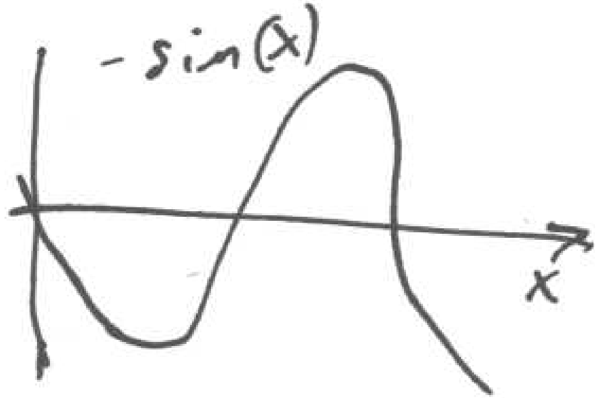




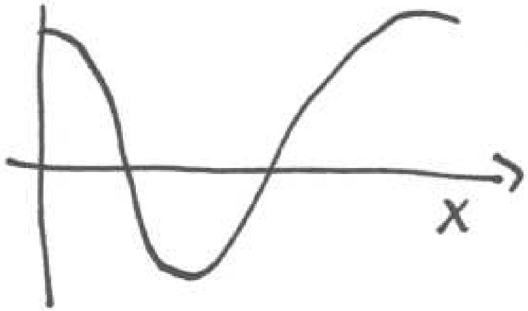


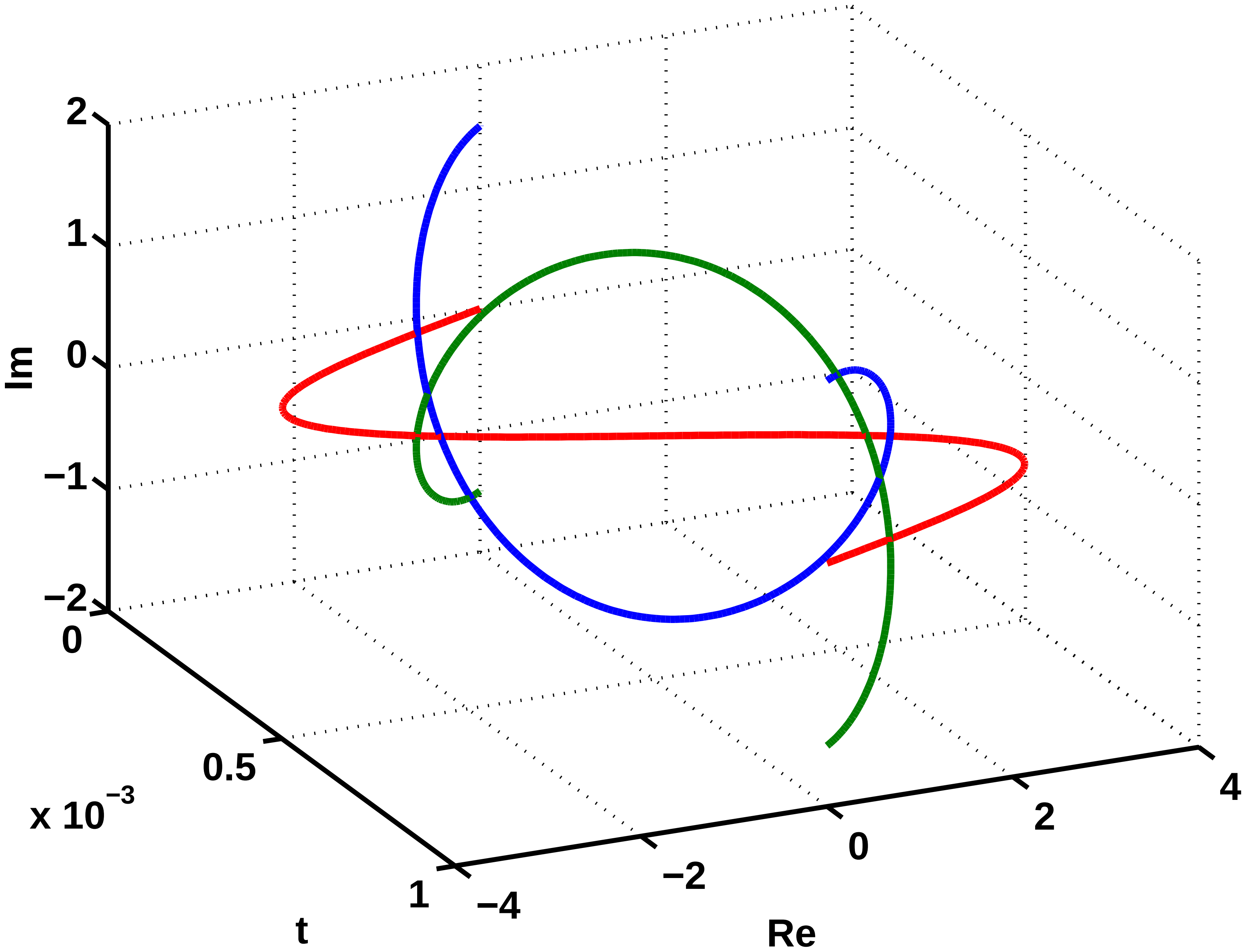






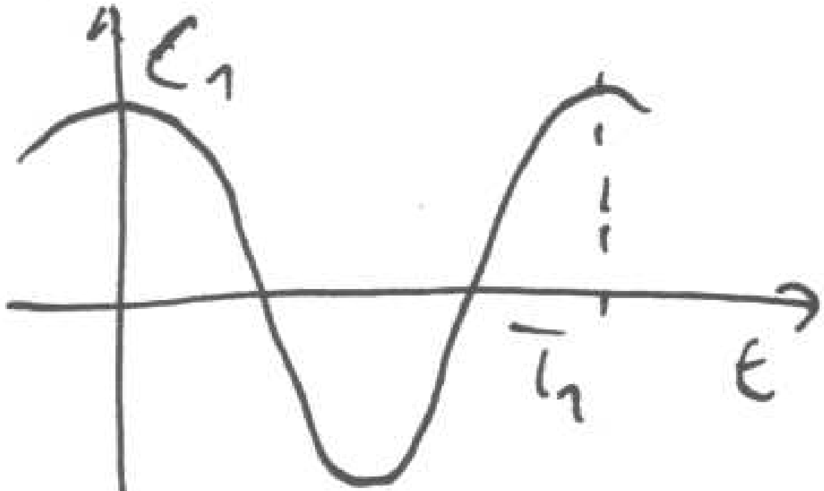
součet děleno 2:



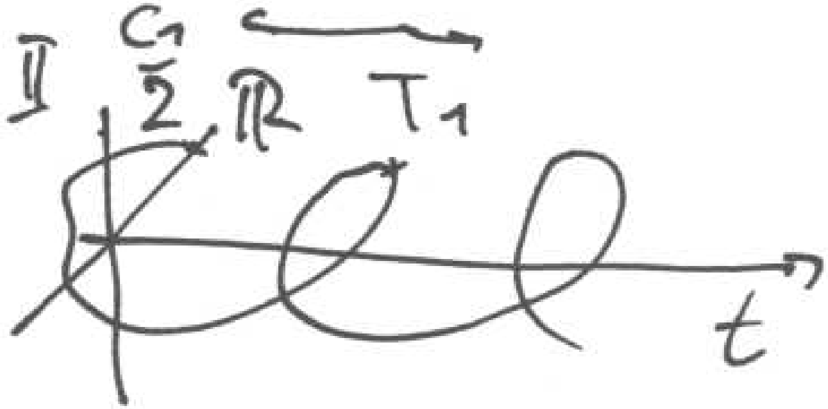

2
1
0
−1
−2
Im
0
0.5
1
x 10−3
t
−4
−2
0
2
4
Re

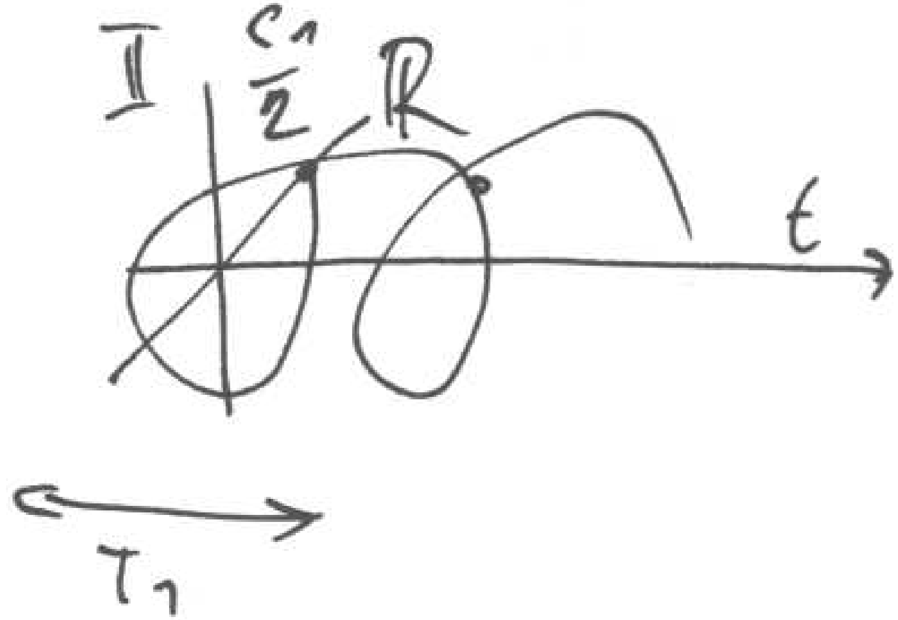
Obecná cosinusovka bez počáteční fáze

$$C_1 \cos(\omega_1 t) = \frac{C_1}{2} e^{j\omega_1 t} + \frac{C_1}{2} e^{-j\omega_1 t}.$$



$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$





... nebojte se záporné kruhové frekvence $-\omega_1$, komplexní exponenciála se prostě točí naopak (šrouby můžou mít také závit naopak :-). Hodnotu $\frac{C_1}{2}$ mají obě komplexní exponenciály pro čas $t=0$ a pak vždy pro $t=kT_1$.

Obecná cosinusovka i s počáteční fází

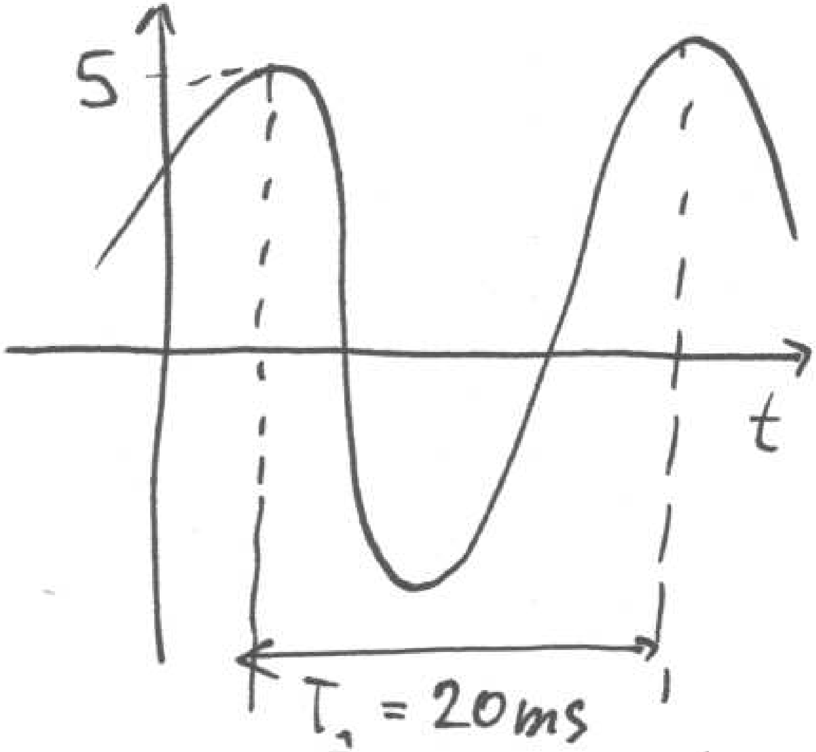
$$C_1\cos(\omega_1 t+\phi_1)=\frac{C_1}{2}e^{j(\omega_1 t+\phi_1)}+\frac{C_1}{2}e^{-j(\omega_1 t+\phi_1)}=\frac{C_1}{2}e^{j\phi_1}e^{j\omega_1 t}+\frac{C_1}{2}e^{-j\phi_1}e^{-j\omega_1 t}$$

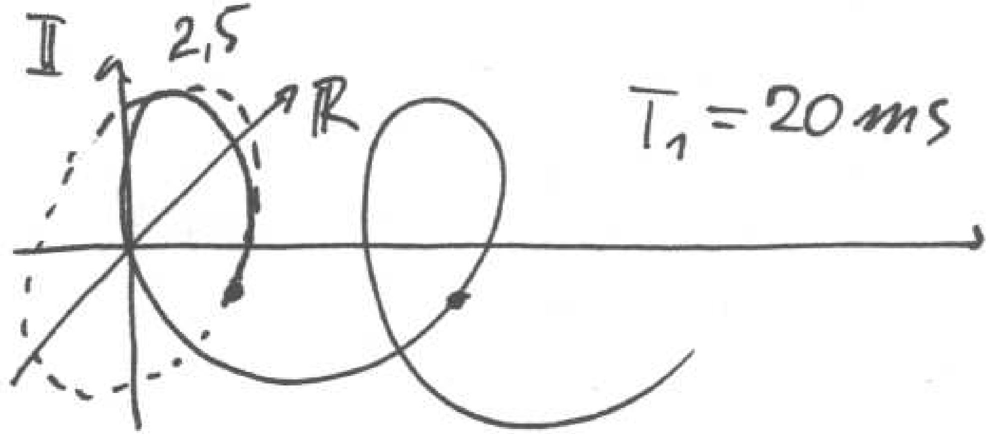
Čísla $c_1=\frac{C_1}{2}e^{j\phi_1}$ a $c_{-1}=\frac{C_1}{2}e^{-j\phi_1}$ jsou komplexní konstanty (nemění se s časem). Výrazy $\frac{C_1}{2}e^{j(\omega_1 t+\phi_1)}$ a $\frac{C_1}{2}e^{-j(\omega_1 t+\phi_1)}$ mají jejich hodnoty pro $t=0$ a pak vždy pro $t=kT_1$. Jejich argumenty bychom mohli nazvat "předtočení komplexních exponenciál".

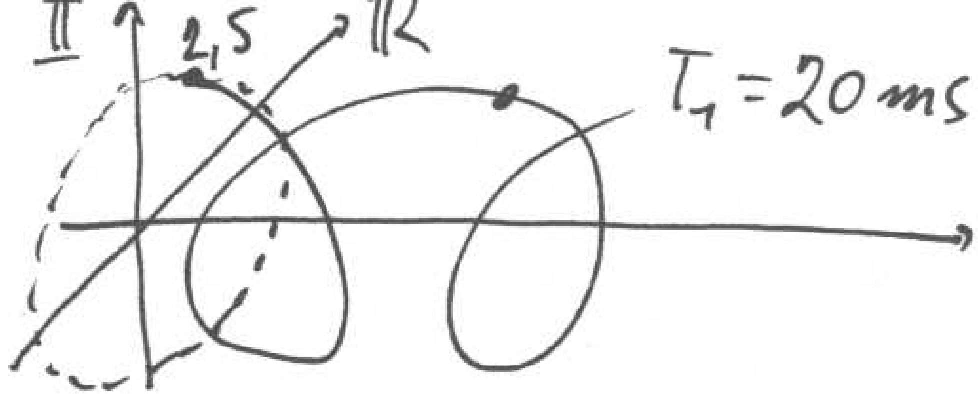
Příklad:

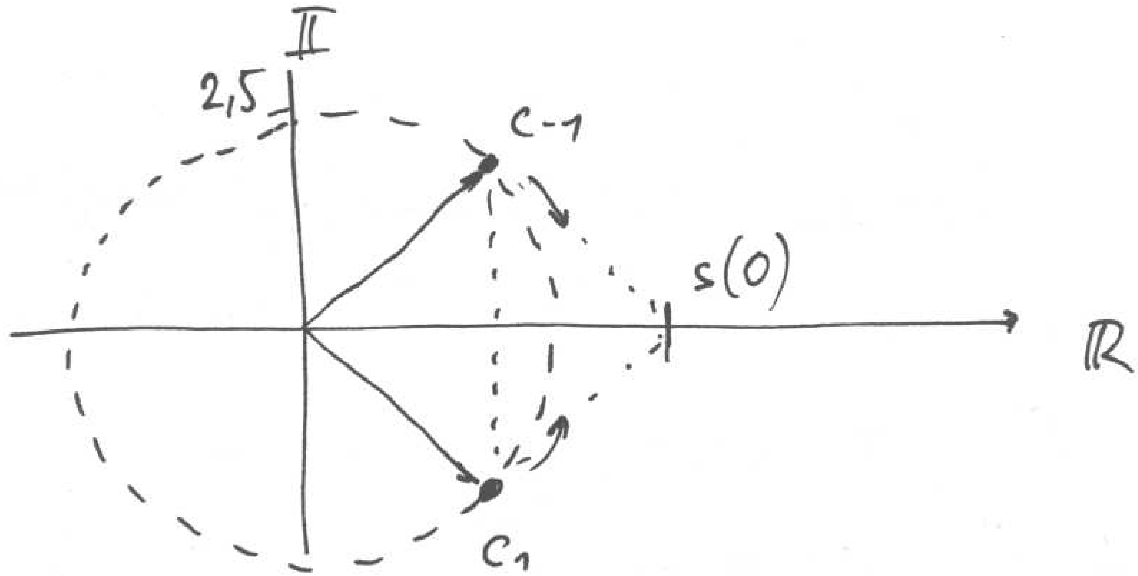
$$x(t)=5\cos(100\pi t-\frac{\pi}{4})=2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j100\pi t}+2.5e^{+j\frac{\pi}{4}}e^{-j100\pi t}$$

Koeficienty: $c_1=2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}$, $c_{-1}=2.5e^{+j\frac{\pi}{4}}$.


5
t
T1 = 20ms


II
2,5
R
T1 = 20ms


II
2,5
R
T1 = 20ms



I
2,5
c-1
s(0)
R
c1