

ISS – Numerické cvičení / Numerical exercise 5.

Honza Černocký, FIT VUT Brno, November 21, 2016

Operace s diskretními signály / Operations over discrete signals

1. Je dán diskretní signál o délce $N = 5$ vzorků: pro $n = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$ je $y[n] = [4 \ 3 \ 5 \ 2 \ -5]$. Napište lineárně posunutý signál $y_s[n] = y[n - 3]$. / We have a discrete signal of length $N = 5$ samples: for $n = 0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4$, its values are $y[n] = [4 \ 3 \ 5 \ 2 \ -5]$. Write a linearly shifted signal $y_s[n] = y[n - 3]$.
2. Napište periodizovaný signál $y_p[n] = y[\text{mod}_N(n)]$. / Write periodized signal $y_p[n] = y[\text{mod}_N(n)]$.
3. Napište periodizovaný a posunutý signál $y_{ps}[n] = y[\text{mod}_N(n - 3)]$ / Write periodized and shifted signal $y_{ps}[n] = y[\text{mod}_N(n - 3)]$.
4. Napište tentýž signál násobený okénkovou funkcí $y_{psw}[n] = R_N[n]y[\text{mod}_N(n - 3)]$ / Write this same signal multiplied by windowing function $y_{psw}[n] = R_N[n]y[\text{mod}_N(n - 3)]$.

Konvoluce / Convolutions

Jsou dány signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ o délce $N = 5$ vzorků. / Signals $x_1[n]$ and $x_2[n]$, each $N = 5$ samples long, are defined as:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	1	1	0	0
$x_2[n]$	4	3	5	2	-5

5. Spočítejte jejich lineární konvoluci $y[n] = X_1[n] \star x_2[n]$. / Compute their linear convolution $y[n] = X_1[n] \star x_2[n]$.
6. Spočítejte jejich kruhovou konvoluci $y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$ / Compute their circular convolution $y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n]$
7. Rozšířte kruhovou konvoluci na periodickou na $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$ / Enlarge the circular convolution to periodic one $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$.

Fourierova transformace s diskretním časem (DTFT) / Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

Mějme diskretní signál o délce $N = 4$ / discrete signal of length $N = 4$ is given as:

n	0	1	2	3
$x[n]$	1	-1	0	0

8. Spočítejte jeho Fourierovu transformaci s diskretním časem (DTFT) / Compute its Discrete Time Fourier Transform (DTFT).
9. Upravte ji tak, aby se dala jednoduše nakreslit její modulová a argumentová část. / Modify it in such a way that the magnitude and angle parts can be easily drawn.
10. Nakreslete průběh její modulové části pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega \in \langle 0, 2\pi \rangle$ / Draw its magnitudes for interval of normalized angular frequencies $\omega \in \langle 0, 2\pi \rangle$.
11. Nakreslete průběh její argumentové části pro tentýž interval normovaných kruhových frekvencí. / Draw its angles for the same interval of normalized angular frequencies.

Diskrétní Fourierova transformace (DFT) / Discrete Fourier Transform (DFT)

12. Napište pro ten samý signál DFT a zjednodušte výraz pro $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. / Write DFT for the same signal and simplify the expression $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.
13. Do tabulky napište hodnoty tohoto výrazu pro všechny kombinace n a k . / In a table, write values of this expression for all combinations of n and k .
14. Spočítejte $X[0]$ / Compute $X[0]$.
15. Spočítejte $X[1]$ / Compute $X[1]$.
16. Spočítejte $X[2]$ / Compute $X[2]$.
17. Spočítejte $X[3]$ / Compute $X[3]$.
18. Nakreslete hodnoty modulu a argumentu do grafů s koeficientem k na vodorovné ose. / Draw magnitudes and angles in graphs with the values of k on the horizontal axis.
19. Změňte vodorovnou osu na normované frekvence / Change the horizontal axis to normalized frequencies.
20. Změňte vodorovnou osu na normované kruhové frekvence / Change the horizontal axis to normalized angular frequencies.
21. Změňte vodorovnou osu na frekvence v Hz. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8000$ Hz. / Change the horizontal axis to frequencies in Hz. The sampling frequency is $F_s = 8000$ Hz.
22. Změňte vodorovnou osu na kruhové frekvence v rad/s. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8000$ Hz. / Change the horizontal axis to angular frequencies in rad/s. The sampling frequency is $F_s = 8000$ Hz.
23. Ověřte, že DFT skutečně vzorkuje DTFT na frekvencích $\omega = k\frac{2\pi}{N}$ / Check, that DFT actually samples the DTFT at frequencies $\omega = k\frac{2\pi}{N}$.

DFT posunutého signálu / DFT of a shifted signal

Je dán signál, který je zpožděnou verzí předchozího: / A signal, that is a delayed version of the previous one, is given:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} n & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline x'[n] & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

24. Ověřte, zda se jedná o kruhové zpoždění a určete, jaké je zpoždění d . / Verify, that the delay is indeed circular, and determine the delay d .
25. Vypočítejte hodnoty koeficientů e^i ve výrazu $X'[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kd}$ / Determine the values of coefficients e^i in expression $X'[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}kd}$
26. Určete hodnoty koeficientů DFT $X'[k]$. / Determine the values of coefficients DFT $X'[k]$.

Symetrie DFT / Symmetry of DFT

$$X[k] = X^*[N - k]$$

27. Pro $N = 256$ je dán koeficient DFT $X[17] = 2 + j$. Určete, který další koeficient z něj můžeme odvodit a jakou bude mít hodnotu. / For $N = 256$, the DFT coefficient $X[17] = 2 + j$. In case we can determine another coefficient of DFT, what will be its index and its value ?
28. Určete počet reálných čísel nutných pro vyjádření DFT reálného signálu o délce N , pro sudé N . / Determine the amount of real numbers we'll need for expressing DFT of a real signal of length N , for even N .
29. Dtto pro liché N . / Dtto for odd N .

Ještě více DFT / Even more DFT

30. Vypočtete a vhodně zaokrouhlete hodnoty signálu $x[n] = 5 \cos(\frac{2\pi}{8}n + \frac{\pi}{2})$ o délce $N = 8$ pro $n = 0 \dots 7$. / Compute and suitably round values of signal $x[n] = 5 \cos(\frac{2\pi}{8}n + \frac{\pi}{2})$ of length $N = 8$ for $n = 0 \dots 7$.
31. Vypočtete jeho DFT. Je vhodné se rozdělit do osmi skupin, každá bude počítat jedno $X[k]$. Help: je vhodné si označit hodnotu $\frac{1}{\sqrt{2}}$ nějak šikovně, například jako a . / Compute its DFT. It is advisable to split into 8 groups, each computes one $X[k]$. Help: simplify writing of $\frac{1}{\sqrt{2}}$ by some short-hand, for example a .
32. Srovnejte výsledek s teoretickými hodnotami DFT pro harmonický signál. / Compare the result with theoretical values for harmonic signal.

$$|X[1]| = |X[N - 1]| = \frac{NC_1}{2}, \quad \arg X[1] = -\arg X[N - 1] = \phi_1$$