ISS – Numerické cvičení / Numerical exercise 6.

Honza Černocký, FIT VUT Brno, December 2, 2022

Energie, výkon / Energy, power

1. Nakreslete periodický signál se spojitým časem s periodou $T_1 = 3$. / Draw a continuous-time periodic signal with period $T_1 = 3$. Jedna perioda je určena / One period is given as:

$$x(t) = \begin{cases} 3 & \text{pro/for } \; 0 < t \leq 1 \\ -1 & \text{pro/for } \; 1 < t \leq 3 \end{cases}$$

2. Určete jeho střední hodnotu / Determine its mean value.
3. Určete energii za jednu periodu / Determine the energy of one period.
4. Určete jeho střední výkon / Determine its mean power.
5. Určete efektivní hodnou / Determine its root-mean-square (RMS) value.
6. Nakreslete střední hodnotu a efektivní hodnotu do obrázku jako stejnosměrné signály a vysvětlete, proč je mezi nimi rozdíl. / Draw the mean value and RMS value to the signal as d.c. signals and explain, why they are different.

Fourierova řada / Fourier series

7. Nakreslete periodický signál / Draw periodic signal

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro/for } \; -1 \text{ ms} < t < 1 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde/otherwise} \end{cases}$$

s periodou / with period $T_1 = 6$ ms.

8. V následujících příkladech budeme pro výpočet a kreslení koeficientů využívat vzorec / In the following exercises, we'll use the following formula for computing and drawing the FS coefficients:

$$c_k = D\frac{\vartheta}{T_1}\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$$

Připravte si pod sebou dva grafy / Prepare, below each other, two graphs: ω vs. $|c_k|$ and ω vs. $\arg(c_k)$. Nakrelete do prvního z nich tečkovaně funkci sinc (zatím bez hodnot na osách). / To the first one, draw function sinc (for the moment, without values on the axes) as a dotted line.

9. Překreslete funkci sinc jako komplexní - převeďte ji na modulovou a argumentovou část. / Re-draw the sinc function as a complex one - split it into magnitude and angle parts.
10. Určete hodnoty významných bodů na všech osách. / Determine the values of important points on all axes.
11. Určete, na kterých kruhových frekvencích budou "sedět" koeficienty FŘ (násobky ω_1) a doplňte je do obou obrázků. / Determine, on which frequencies the FS coefficients will be "'sitting" (multiples of ω_1) and draw them.

Fourierova transformace / Fourier transform

Obdélníkový impuls je definován / Rectangular impulse is defined as:

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro/for } \; -1 \text{ ms} < t < 1 \text{ ms} \\ 0 & \text{jinde/otherwise} \end{cases}$$

takže je to jeden obdélník z předchozího periodického signálu. / so that it is one rectangle from the above periodic signal.

12. Nakreslete signál. / Draw the signal.

13. Určete a nakreslete jeho spektrální funkci $X(j\omega)$. / Determine and draw the spectral function $X(j\omega)$. Help: $X(j\omega) = D\vartheta \text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)$

14. Určete a nakreslete spektrální funkci signálu, který je oproti $x(t)$ o 1 ms předběhnutý (tedy trvá od -2 ms do nuly). / Determine and draw the spectral function of a signal that is 1 ms advanced compared to $x(t)$ (i.e. it is non-zero from -2 ms until zero). Help: $y(t) = x(t-\tau) \quad \Rightarrow \quad Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$.

Konvoluce se spojitým časem / Continuous-time convolution

Jsou dány spojité signály / continuous-time signals are given as:

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro/for} \quad -2 < t < 2 \\ 0 & \text{jinde/otherwise} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} -3 & \text{pro/for} \quad 0 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde/otherwise} \end{cases}$$

Budeme počítat a kreslit konvoluci / We will compute and draw convolution $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

15. Nakreslete oba signály / Draw both signals.

16. Dále využijeme jeden z definičních vzorců konvoluce. Bude dobré pokud jedna skupina studentů použije první variantu a druhá druhou. / Further, we will use one of the definitions of convolution. It would be nice if one group of students uses the first variant and the other the second.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau)d\tau$$

Nakreslete signály vevnitř integrálu pro $t = 0$. Draw the signals inside integral for $t = 0$.

17. Připravte si graf pro výsledek konvoluce $y(t)$. Spočítejte hodnotu konvoluce pro $t = 0$ a zakreslete do grafu. / Prepare a graph for the results of the convolution $y(t)$. Compute the value of convolution for $t = 0$ and draw it into the graph.

18. Dtto pro $t = -2$. / Dtto for $t = -2$.

19. Dtto pro $t = -1$. / Dtto for $t = -1$.

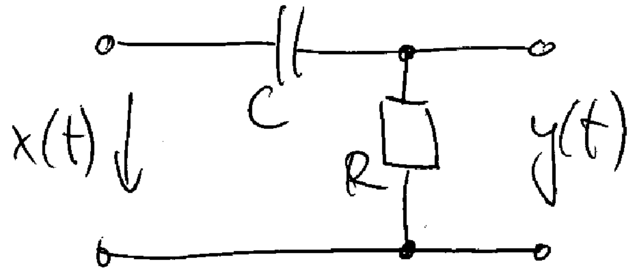
20. Dtto pro $t = 2$. / Dtto for $t = 2$.

21. Dtto pro $t = 3$. / Dtto for $t = 3$.

22. Doplňte graf tak, abyste dostali $y(t)$ pro všechny časy. / Complete the graph to have $y(t)$ for all times.

Systém se spojitým časem / Continuous-time system

Budeme studovat chování následujícího obvodu / we will study the behavior of the following circuit:



23. Napište rovnice, které obvod popisují. Pomůcka: Ohmův zákon: $u(t) = Ri(t)$. Proud kondenzátorem: $i_c(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$, kde $u_c(t)$ je napětí na kondenzátoru. / Write equations describing the behavior of this circuit. Help: Ohm's law: $u(t) = Ri(t)$, current in a capacitor: $i(t) = C\frac{du_c(t)}{dt}$, where $u_c(t)$ is the voltage on the capacitor.

24. Napište diferenciální rovnici popisující tento obvod. / Write differential equation describing this circuit.

25. Proveďte Laplacovu transformaci této rovnice. / Perform Laplace transform of this equation.

26. Najděte přenosovou funkci obvodu $H(s)$. / Find the transfer function of the circuit: $H(s)$.

27. Obecný systém se spojiýtm časem je dán následující rovnicí. Najděte koeficienty b_k, a_k / A general continuous-time system is defined by the following equation. Find the coefficients b_k, a_k.

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

28. Převeďte rovnici do tvaru obsahujícího nuly a póly / Convert the equation to the form including zeros and poles.

29. Zakreslete nuly a póly do roviny "s" a ověřte stabilitu obvodu. / Draw zeros and poles into the "s" plane and check the stability of the circuit.

30. Pomocí nul a pólů určete hodnotu frekvenční charakteristiky (modul i argument) pro $\omega_1 = 0.000001$. / With the zeros and poles, determine the value of frequency response (both magnitude and phase) for $\omega_1 = 0.000001$.

31. Dtto pro $\omega_1 = \frac{1}{RC}$. / Dtto for $\omega_1 = \frac{1}{RC}$.

32. Dtto pro $\omega_1 = \infty$. / Dtto for $\omega_1 = \infty$.

33. Nakreslete frekvenční charakteristiku a srovnejte ji s referencí vypočtenou pomocí Matlabu. / Draw the frequency response and compare it with reference computed by Matlab.