ISS numerical exercise 3 — Operations with discrete signals and filtering basics

Honza Černocký, October 2022

Nejprve si procvičíme základní operace s diskrétním signálem. Mějme diskrétní signál o délce $N = 4$ vzorky / Let us first exercise basic operations with discrete signals. Let us have a discrete signal with $N = 4$ samples: $x[n] = [3, \quad 2, \quad 1, \quad -1]$.

1. Napište signál / Write down signal $y[n] = x[n-2]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

2. Napište signál / Write down signal $y[n] = x[n+3]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

3. Napište signál / Write down signal $y[n] = x[-n]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

4. Napište signál / Write down signal $y[n] = x[-n-1]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

5. Napište signál / Write down signal $y[n] = x[-n+3]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

Pokud si u otočených a posunutých signálů nejte jisti, proveďte kontrolu / In case you are not sure about flipped and shifted signals, run a check:

- vyberte v posunutém signálu vzorek / select a sample in the modified signal.
- proveďte pro jeho čas časovou modifikaci / evaluate the time modification for its time.
- podívejte se do originálního signálu, zda na tomto čase "sedí" ten samý vzorek / look in the original signal, whether you'll see the same sample at the resulting time.

V dalších cvičeních prozkoušíme kruhové posunutí v rámci bufferu o délce $N = 4$ vzorky. Okénková funkce $R_4[n]$ ořezává výsledek opět pouze na 4 vzorky. / In the following exercises, we will examine circular shifts within a buffer of $N = 4$ samples. The window function $R_4[n]$ truncates the result again to only 4 samples.

6. Napište signál / Write down signal $y[n] = R_4[n]x[\text{mod}_4(n-2)]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

7. Napište signál / Write down signal $y[n] = R_4[n]x[\text{mod}_4(n+3)]$.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$						3	2	1	-1		
$y[n]$											

V další části cvičení se zaměříme na filrování pomocí konvoluce. Je dán signál vstupní (stejný jako v minulém cvičení) o délce $N = 8$ vzorků a impulsní odezva filtru / In the next part, we will focus on filtering using convolution. We are given the input signal (the same as in the previous exercise) and the impulse response of a filter:
$x[n] = [1;\ \ 1;\ \ 1;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0.5;\ \ 0.5;\ \ 0]$.
$h[n] = [1;\ \ -1;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0;\ \ 0]$.

8. Proveďte konvoluci / perform convolution

$$x[n] \star h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

Využijte metodu posouvání proužku papíru s otočenou impulsní odezvou. / Use the paper strip shifting method, making use of a paper strip with flipped impulse resposne.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$			1	1	1	0	0	0.5	0.5	0		
$h[n]$			1	-1								
$y[n]$												

9. Ověřte komutativitu konvoluce / verify the commutativity of convolution

$$h[n] \star x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

Využijte metodu posouvání proužku papíru s otočeným signálem. / Use the paper strip shifting method, making use of a paper strip with flipped signal.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$			1	1	1	0	0	0.5	0.5	0		
$h[n]$			1	-1								
$y[n]$												

10. Komentujte výsledek filtrace - funguje filtr jako detektor hran? / Comment the result of the filtering - is the filter working as an edge detector?

V poslední části cvičení ověříme vztah mezi filtrací a DFT spektry. Pokud se v čase konvoluuje, ve spektru se má násobit. Ověříme, zda platí / In the last part, we will verify the relationship between filtering and DFT spectra. If we convolve in time, we should multiply in the spectrum. We will verify whether it works:

$$y[n] = x[n] \star h[n] \quad \longrightarrow \quad Y[k] = X[k]H[k]$$

11. Vzpomeňte si na výpočet DFT signálu $x[n]$ v minulém cvičení - výsledky jsou v tabulce níže. / Remeber computation of DFT of signal $x[n]$ at the last exercise - the results are given in the table below.

12. Výpočtěte ručně spektum $H[k]$ impulsní odezvy $h[n]$ - pozor, počítejte DFT s $N = 8$ vzorky. Výsledky napište také do tabulky níže. / Compute spectrum $H[k]$ of impulse reponse $h[n]$ by hand - attention, use DFT with $N = 8$ samples. Write the results also to the table below.

$$H[k] = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	
$h[n]$	1	-1	0	0	0	0	0	0	$H[k]$
$e^{-j2\pi \frac{0}{N} n}$									
$h[n]e^{-j2\pi \frac{0}{N} n}$									
$e^{-j2\pi \frac{1}{N} n}$									
$h[n]e^{-j2\pi \frac{1}{N} n}$									
$e^{-j2\pi \frac{2}{N} n}$									
$h[n]e^{-j2\pi \frac{2}{N} n}$									
$e^{-j2\pi \frac{3}{N} n}$									
$h[n]e^{-j2\pi \frac{3}{N} n}$									
$e^{-j2\pi \frac{4}{N} n}$									
$h[n]e^{-j2\pi \frac{4}{N} n}$									

13. Výpočtěte spektum $Y[k]$ výstupního signálu $y[n]$ - pozor, počítejte DFT s $N = 8$ vzorky. Tady už použíjte programovatlenou kalkulačku nebo Python NB. Výsledky také napište do tabulky níže. / Compute spectrum $Y[k]$ of output signal $y[n]$ - attention, use DFT with $N = 8$ samples. Here, use a programmable calculator. Write the results also to the table below.

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} y[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

14. Ověřte / Verify that $Y[k] = X[k]H[k]$. Opět použijte programovatelnou kalkulačku nebo Python NB. / Again, use a programmable calculator or Python NB.

k	0	1	2	3	4
$X[k]$	4	$1.35 - 0.85j$	$-0.5 - 1.5j$	$0.65 + 0.15j$	1
$H[k]$					
$Y[k]$					
$X[k]H[k]$					

15. Jak se situace změní, pokud bude impulsní odezva vypadat takto / How does the situation change in case the impulse response is:
$h[n] = [1; \quad 0; \quad -1; \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad 0; \quad 0]$.