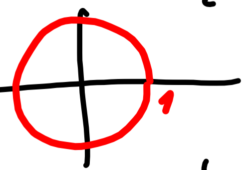
DTFT Discrete-time Fourier transform.

$x[n] \longrightarrow \boxed{\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}}$

klasická F.T. $X(j\omega)$ | č.T. DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega})$ "z"



I. DTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} \, d\omega$$

$$\frac{F_s/2}{F_s} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi = \pi$$

Vlastnosti

symetrie:

$$\tilde{X}(e^{-j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{j\omega})$$

$$|\tilde{X}(e^{-j\omega})| = |\tilde{X}(e^{j\omega})|$$

$$\arg \tilde{X}(e^{-j\omega}) = -\arg \tilde{X}(e^{j\omega})$$

periodicita: $\tilde{X}(e^{j(\omega+k2\pi)}) = \tilde{X}(e^{j\omega})$

odpovídá vzorkovací frekvenci v normovaných kruhových frekvencích

symetrie v rámci intervalu n.k. frekvencí $0 \dots 2\pi$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{j(2\pi-\omega)})$$

pro reálné signály je veškerá info od 0 do π ($\approx \frac{F_s}{2}$).

Frekv. analýza periodických signálů s disk. časem
DFŘ - Diskrétní Fourierova řada

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
$\tilde{x}[n]$	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0

N = 4 vzorky

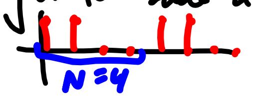
v čase	ve frekvenci
vzorkování $x(t) \to x[n]$	periodizace (na každém násobku F_s)
periodisace $x(t) \to \tilde{x}(t)$, $x[n] \to \tilde{x}[n]$	diskretisace (vzorkování, jen koeficienty) na násobcích základní frekv.

jak to bylo u FŘ (analog.):

$f_1 = \frac{1}{T_1}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

c_k "sedí" na násobcích ω_1

jak to bude u DFŘ:

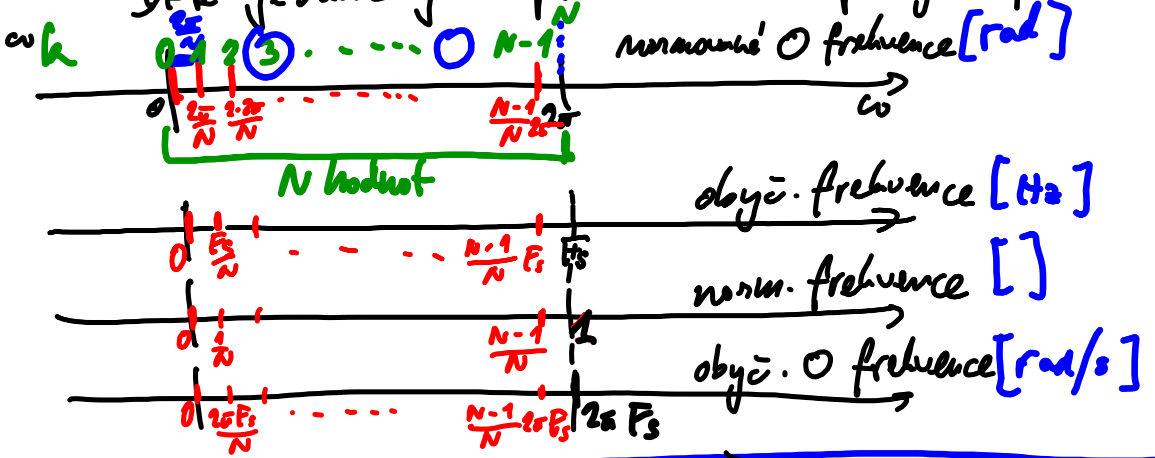


$f_1 = \frac{1}{N}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$

normované

$\tilde{X}[k]$ opět "sedí" na násobcích ω_1

DFŘ je navíc ještě periodická! Opakuje se po 2π !!!



DTFT:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

DFŘ:

$$\boxed{\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

zpětná (inverzní) DFŘ

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{+jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

periodická

Vlastnosti Symetrie

$$\tilde{X}[-k] = \tilde{X}^*[k]$$

$$\tilde{X}[k + a_k N] = \tilde{X}[k]$$

libovolný násobek periody!

Symetrie v rámci intervalu $k \in 0 \dots N-1$

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[N-k]$$

DFŘ pro $\tilde{x}[n] = [2\ 2\ 0\ 0]$ $N=4$

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-j\frac{\pi}{2}kn}$$

n		0	1	2	3
$x[n]$		2	2	0	0
$k=0$	$e^{-j\frac{\pi}{2}0n} = 1$	1	1	1	1
1	$e^{-j\frac{\pi}{2}1n}$	1	$-j$	-1	j
2	$e^{-j\frac{\pi}{2}2n} = e^{-j\pi n}$	1	-1	1	-1
3	$e^{-j\frac{\pi}{2}3n}$	1	j	-1	$-j$

	modul	arg
$\tilde{X}[0] = 4$	4	0
$\tilde{X}[1] = 2-2j$	2,8	$-\frac{\pi}{4}$
$\tilde{X}[2] = 0$	0	0
$\tilde{X}[3] = 2+2j$	2,8	$\frac{\pi}{4}$

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[N-k]$$

jak je to s $\tilde{X}\left[\frac{N}{2}\right]$???

$$\tilde{X}\left[\frac{N}{2}\right] = \tilde{X}^*\left[N-\frac{N}{2}\right] = \tilde{X}^*\left[\frac{N}{2}\right]$$ → musí být reálný!

DFŘ vzorkuje DTFT na násobcích základní normované kruhové frekvence $\frac{2\pi}{N}$.

Diskrétní Fourierova Transformace DFT

$x[n]$ (N vzorků) $\longrightarrow$ $X[k]$ (N vzorků)

$x[n] \xrightarrow{\text{periodizace}} \cancel{\tilde{x}[n]} \Rightarrow \tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \Rightarrow \tilde{X}[k]$ periodické $\xrightarrow{\text{okénková funkce}} X[k] = R_N[k]\tilde{X}[k]$

DFT: $\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$ $k = 0 \dots N-1$

IDFT: $\boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}}$

invert. f. $k = np.range(N)$

k: 0 1 2 3 – – – N-1

$\frac{F_s}{N}$ $\frac{2F_s}{N}$ ... $\frac{N-1}{N}F_s$ F_s obyč. frekv. [Hz] $f = k/N * F_s$

$2\pi F_s$ obyč. ω frekv. $om = 2*np.pi*k/N*F_s$

1 norm. frekv. $f_n = k/N$

2π norm. ω frekv. $omn = 2*np.pi*k/N$

Vlastnosti

$X[k] = \cancel{\dots}$ NE! – k není!

$X[k] = X^*[N-k]$

Přidává DFT informaci ??

signál N: $x[0]$ … $x[N-1]$

spektrum N: 0, [1 … $\frac{N}{2}-1$], $\frac{N}{2}$, [$\frac{N}{2}+1$ … N-1] komplexní čísla!

$X[0] \in \mathbb{R}$ $X[\frac{N}{2}] \in \mathbb{R}$

$1 + \left(\frac{N}{2} - 1\right) \cdot 2 + 1 = \cancel{1} + N \cancel{-2} \cancel{+1} = \underline{N}$

DFT diskrétní cosinusovky s periodou N vzorků.

$$x[n] = C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} n + \varphi_1\right) \longleftrightarrow x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

$$x[n] = \frac{C_1 e^{j\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi_1\right)}}{2} + \frac{C_1 e^{-j\left(\frac{2\pi}{N} + \varphi_1\right)}}{2} = \frac{C_1}{2} e^{j\varphi_1} e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{C_1}{2} e^{-j\varphi_1} e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$k = 1$

$$e^a \cdot e^b = e^{a+b}$$

$$\frac{1}{N} X[1] = \frac{C_1}{2} e^{j\varphi_1}$$

$$X[1] = \frac{NC_1}{2} e^{j\varphi_1}$$

$$X[N-1] = \frac{NC_1}{2} e^{-j\varphi_1}$$

$$\frac{C_1}{2} e^{-j\varphi_1} e^{j\frac{2\pi n}{N}} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}n} = \frac{C_1}{2} e^{-j\varphi_1} e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n}$$

$k = N-1$

pouze 2 nenulové koeficienty.

Vztah DFT a konvoluce

$x_1[n] \longrightarrow X_1[k]$

$x_2[n] \longrightarrow X_2[k]$

$$\boxed{X[k] = X_1[k] X_2[k]}$$

násobení

$$\boxed{x[n] = x_1[n] \, (N) \, x_2[n]}$$

kruhová konvoluce!

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	2	2	0	0
$x_2[n]$	1	−1	0	0
$x_1[n] * x_2[n]$	2	0	−2	0

	$X_1[k]$	$X_2[k]$	$X[k]$	$X_1[k] X_2[k]$
k = 0	4	0	0	0
1	2−2j	1+j	4	4
2	0	2	0	0
3	2+2j	1−j	4 ...	4

Spek. analýza signálů se spojitým časem pomocí DFT.

Periodický $T_1 = NT$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

FŘ

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)e^{-jk\omega_1 t} = \frac{1}{N\cancel{T}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N\cancel{T}}n\cancel{T}}\cdot\cancel{T} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}X[k]$$

DFT!

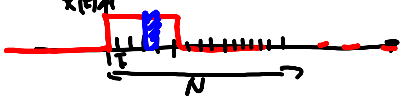
ALE .....

1) která c_k dokážu spočítat ??? NE! jen $k \in 0 \dots \frac{N}{2}$ můžu vyrobit: $k \in -\frac{N}{2} \dots 0$

2) musí být $f_{max} < \frac{F_s}{2}$

3) $T_1 = NT$ většinou nejde! Pracuji s dvojkovým $N = 512, 1024, \dots$

Neperiodický - FT.



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$X\left(jk\frac{\Omega_s}{N}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{k2\pi}{NT}nT}\cdot T = T\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = T\cdot X[k]$$

DFT

ALE ...

1) celé spektrum od $-\infty$ do $+\infty$? NE! jen od $-\frac{\Omega_s}{2}$ do $\frac{\Omega_s}{2}$

2) musí být $f_{max} < \frac{F_s}{2}$

3) jen N bodů

4) Pokud signál nezačíná od $t=0$ posunu si ho!
- moduly budou OK.
- argumenty musím opravit přidáním nebo ubráním $\omega\tau$ posunutí.

$y(t) = x(t-\tau)$
$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$

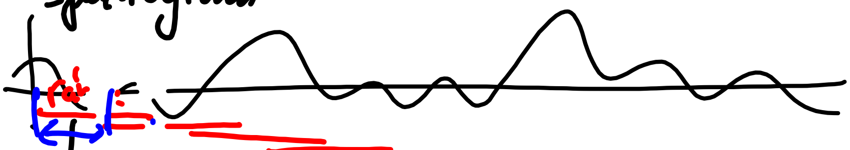
DFT vs. FFT (Fast F. transform)

pouze pro $N = 2^b$ 256, 512, 1024, 2048

numericky totéž jako DFT ale rychleji!

$O(N^2)$ $O(N\log_2 N)$ np.fft.fft ...

Spektrogram



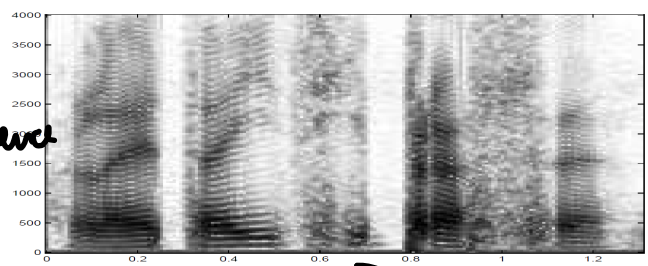
FFT FFT

kolik F_s jen od $0 \dots \frac{N}{2}$

$|\cdot|$

log

frekvence



čas