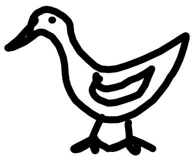


$$\boxed{2\omega_{max} < \Omega_s}$$

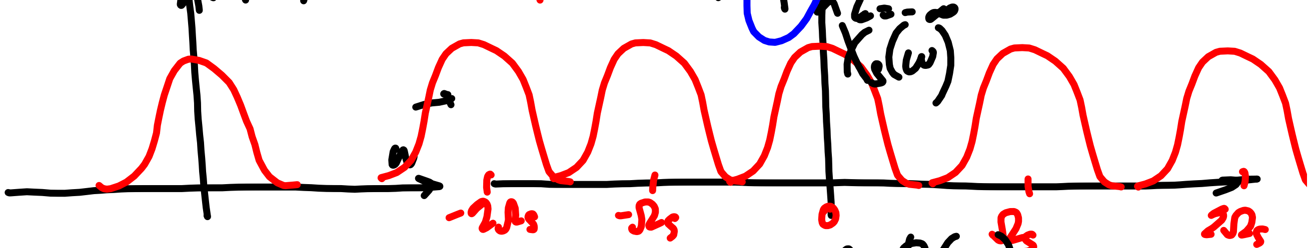
Shannon - Kotelnikov - Nyquist

Котельников

vzorkovací teorém

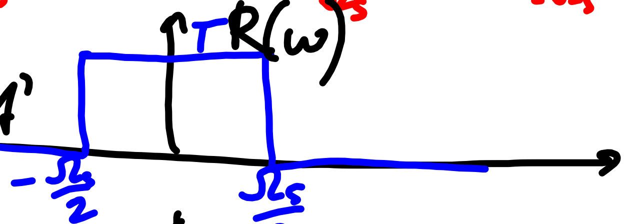
spektrum vzorkovaného signálu

$$X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\Omega_s)$$

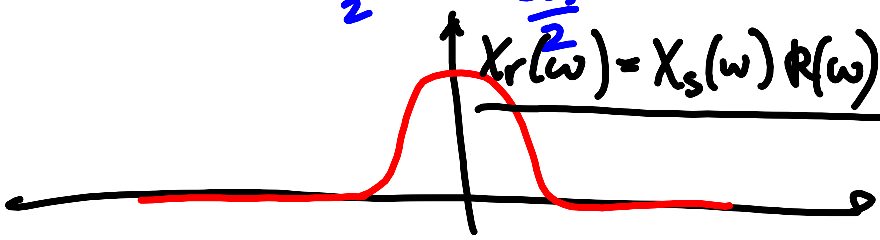


Rekonstrukce

rekonstrukční dolní propust



$$X_r(\omega) = X_s(\omega)\,R(\omega)$$



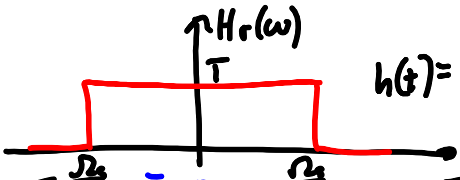
Rekonstrukce v časové oblasti

spektrum: $X_r(\omega) = X_s(\omega)\, R(\omega)$

rekonstruovaný vzorkovaný rekon. dolní propust

čas: $x_r(t) = x_s(t) * r(t)$ ← impulsní odezva

$H(\omega) = F.T.(h(t))$ $h(t) = I.F.T.(H(\omega))$



Š.P.:

$\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy}\, dy = 2b \operatorname{sinc} bx$

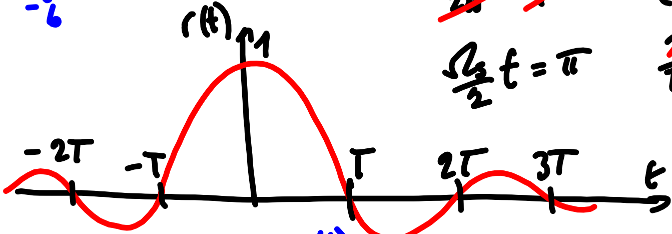
$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{+j\omega t}\, d\omega = \frac{T}{2\pi}\int_{-\frac{\Omega_s}{2}}^{\frac{\Omega_s}{2}} e^{j\omega t}\, d\omega =$$

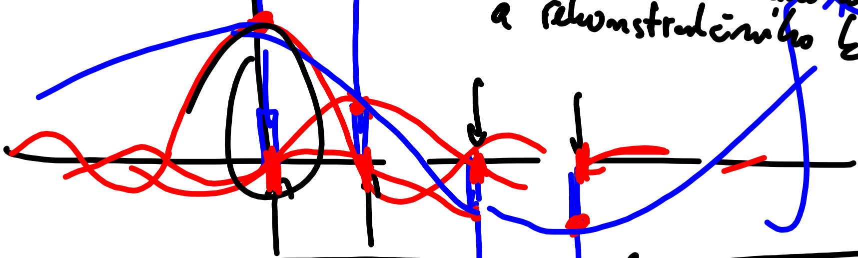
$$= \frac{T}{2\pi}\, \cancel{2} \cdot \frac{\Omega_s}{\cancel{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2} t\right) =$$

$$= \frac{\cancel{T}}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{T}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Omega_s}{2} t\right)$$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$

$\frac{\Omega_s}{2} t = \pi$ $\frac{\cancel{2}\pi}{T\cancel{2}} t = \cancel{\pi}$, $t = T$





$x_s(t)$ → konvolace navzorkovaného sig. a rekonstrukčního kard. sinu.

Zápis vzorkovaného signálu

$x(t) \to x_s(t)$ $\boxed{x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)}$

spojitý čas

$x[n]$ diskrétní čas

$nT \longrightarrow n = \frac{nT}{T}$

normování času $s \longrightarrow [\,]$

frekvence? $\boxed{f' = \frac{f}{F_s} \; \frac{[\cancel{Hz}]}{[\cancel{Hz}]} \; [\,]}$ $\boxed{\omega' = \frac{\omega}{F_s} \; \frac{[rad/\cancel{s}]}{[\cancel{Hz}]} \; [rad]}$

normovaná frekvence normovaná kruhová frekvence

$X(j\omega) = \int x(t)\, e^{-j\omega t}$ rad/s, s ... skutečná

$X[\dots] = \sum x[n]\, e^{-j\omega n}$ rad, [ ] ... normovaná

Diskrétní signály - perioda ?

Diskrétní čas

$x[n] = C_1 \cos(\omega n + \varphi_1)$

~~$N_1 = 16$ vzorků~~

$\omega = \frac{2\pi}{N_1}$

zadaná ω, spočítat periodu N:

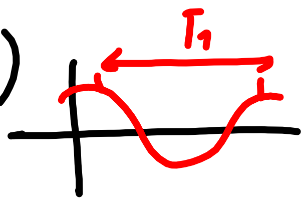
$\cancel{N_1 = \frac{2\pi}{\omega}}$ protože N_1 musí být celé číslo!

$\omega N_1 = k\, 2\pi$

$\boxed{N_1 = \frac{k\, 2\pi}{\omega}}$ hledám k dokud N_1 nevyjde celé

Spojitý čas

$x(t) = C_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$



$f_1 = \frac{1}{T_1}$ $\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ - hotovo.

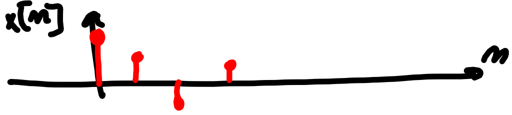
$\omega = \frac{\pi}{8} \qquad N_1 = \frac{k\, 2\pi}{\frac{\pi}{8}} = k\, 16 \qquad k = 1 \quad N_1 = 16$

$\omega = \frac{8\pi}{31} \qquad N_1 = \frac{k\, 2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = \frac{k\, 31}{4} \qquad k = 4 \quad N_1 = 31$

$\omega = \frac{1}{6} \qquad N_1 = \frac{k\, 2\pi}{\frac{1}{6}} = k\, 12\pi$ nejde !!!!

není periodický.

Operace s diskrétními signály



$N=4$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$	6	-3	2	1	3	2	0	-1	5	.	-	-	—	
$w[n]$	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

omezení signálu na délku N vzorků: $0 \dots N-1$

$y[n] = x[n] \cdot w[n]$ okénková funkce

$y[n] = x[n] \cdot R_N[n]$ $\quad R_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \in 0..N-1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

		-	-	0	1	2	3	
$y[n]$		$\emptyset$		3	2	0	-1	$\emptyset$

Periodisace 0 -1 3 2

$\tilde{f}[n] = y[\mathrm{mod}_N(n)]$

3 2 0 -1 3 2 0 -1 3 2 0 -1

Kruhové posunutí

buffer N vzorků, zpoždění o k vzorků, "přepadávání" opět na začátek bufferu.

$w_k[n] = R_N[n]\, y[\mathrm{mod}_N(n-k)]$

Konvoluce s disk. časem. 2 posloupnosti délky N

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_1[n]$	1	2	3	4	$\emptyset$		
$x_2[n]$	1	1	-1	-1	$\emptyset$		

filtrování

std. (lineární) konvoluce: $y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$

délka $2N-1 = 7$

$(x^3+2x^2+3x+4)(x^3+x^2-x-1) =$ koef. pomocí konvoluce!

Cyklická konvoluce (periodická)

$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[\mathrm{mod}_N(n-k)]$

Výsledek nikdy nekončí, perioda N.

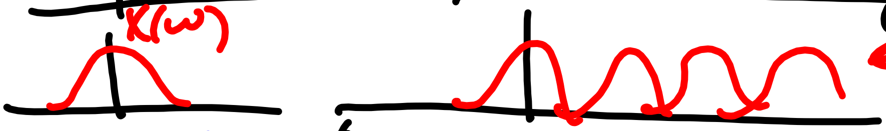
Kruhová konvoluce

$y[n] = x_1[n] \, Ⓝ \, x_2[n] = R_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[\mathrm{mod}_N(n-k)]$

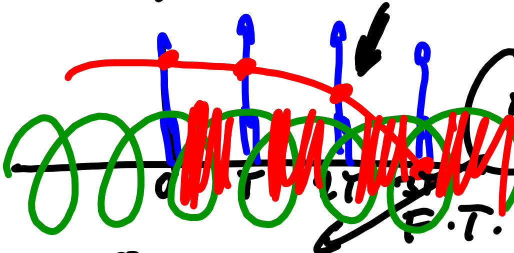
výstup má délku N, 1 perioda z cyklické konvoluce pro vzorky $n = 0 \dots N-1$

$\approx$ násobením spekter disk. signálů.

Spektrální analýza diskrétních signálů



výsledek :(



$x_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT)\,\delta(t-mT)$

klasická F.T.
$X(j\omega)$

F.T.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(mT) \cdot e^{-j\omega mT} \cdot \delta(t-mT)\, dt =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(\cancel{mT})\, e^{-j\omega mT} = \sum x[m]\, e^{-j\frac{\omega m}{F_s}}$$

std. kruh. frekv.

normované kruhová frekvence.

$$\boxed{\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, e^{-j\omega m}}$$

F.T. s diskrétním časem

DTFT discrete-time Fourier transform

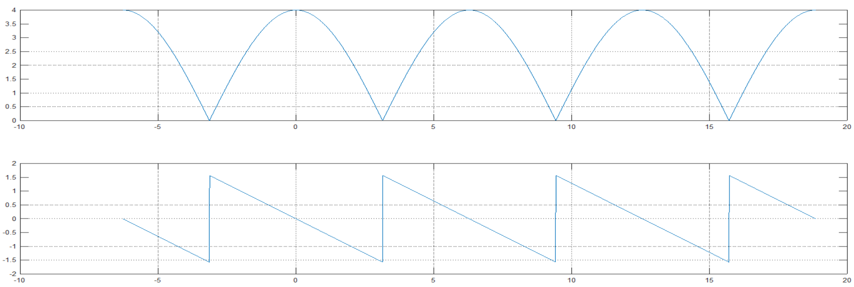
$\neq$ DFT!

libovolné norm. kruh. frekvence ω! \tilde{X}(e^{j\omega})

Příklad:

n	0	1	2	3
$x[n]$	2	2	0	0

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \underbrace{2e^{-j\omega 0}}_{2} + 2e^{-j\omega 1} = 2 + 2e^{-j\omega}$$



↑ vidíme periodicitu se 2π!

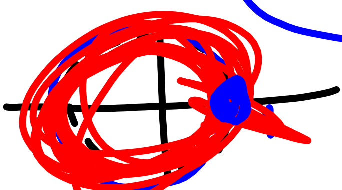
$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$

Důkaz, že to platí vždy:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum x[n]\, e^{-j\omega n}$$

$$\tilde{X}(e^{j(\omega+k2\pi)}) = \sum x[n]\, e^{-j(\omega+k2\pi)n} = \sum x[n]\left(e^{-j\omega n}\cdot \underbrace{e^{-jk2\pi n}}_{1}\right) =$$

$$= \sum x[n]\, e^{-j\omega n} = \tilde{X}(e^{j\omega})$$



je to periodické s násobky 2π!