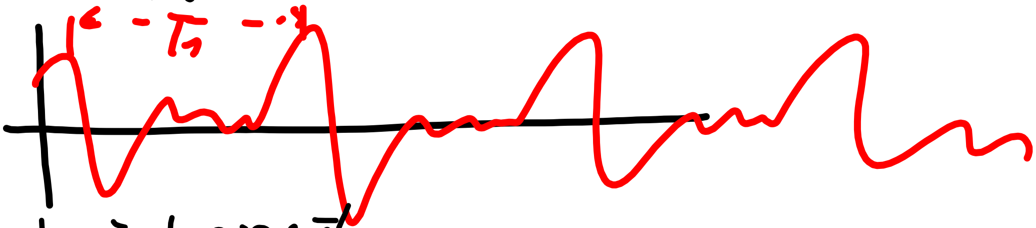
FŘ – spektrální analýza

$x(t)$ spojitý, periodický T_1, $f_1 = \frac{1}{T_1}$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$



Syntezační vzorec:

$$x(t) = \dots c_{-k} e^{-jk\omega_1 t} + \dots + c_{-2} e^{-j2\omega_1 t} + c_{-1} e^{-j\omega_1 t} + c_0 + c_1 e^{j\omega_1 t} + c_2 e^{j2\omega_1 t} + \dots \dots c_k e^{jk\omega_1 t} + \dots$$

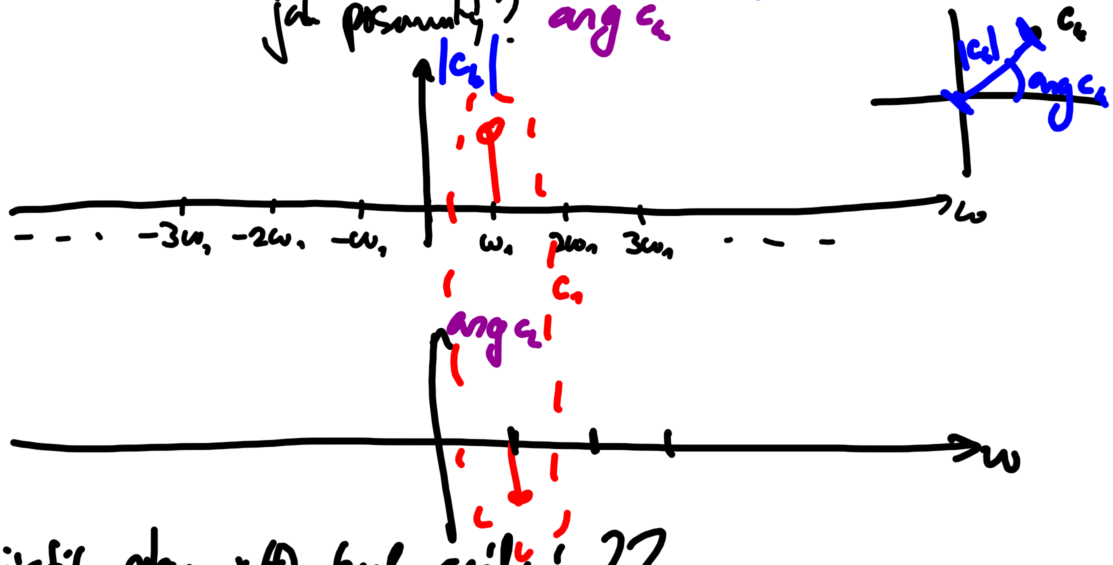
$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}}$$

c_k koeficienty FŘ ← spektrum

kde? ✓ na násobcích ω_1

kolik? $|c_k|$ moduly koeficientů

jak posunuty? $\arg c_k$



Jak zajistit, aby $x(t)$ byl reálný??

co musí platit pro $c_{-k} e^{-jk\omega_1 t}$ a $c_k e^{jk\omega_1 t}$

musí být komplexně sdružené

Analýza FŘ

máme vzorný signál $x(t)$
chci koeficient c_k

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_k}_{\text{koeficient}} \underbrace{e^{jk\omega_0 t}}_{\text{báze}}$$

analyzační vzorec

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_0 t}\, dt$$

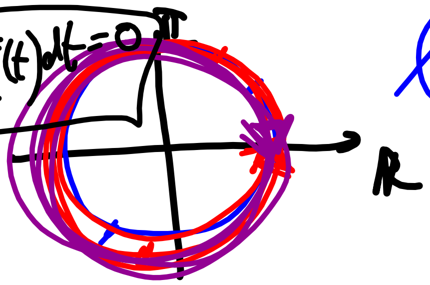
CHECK ortogonality

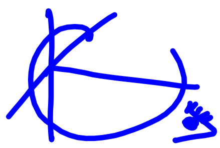
$e^a \cdot e^b = e^{a-b}$

$$\int_{T_1} e^{jk\omega_0 t} \cdot e^{-jl\omega_0 t}\, dt = \text{musí být } 0.$$

$$\int b_k(t) \cdot b_l^*(t)\, dt = 0$$

$$\boxed{\int_{T_1} e^{j(k-l)\omega_0 t}\, dt = 0}$$





$\int e^{j\omega_0 t} dt = 0$

$\int e^{j3\omega_0 t} dt = 0$

$\int e^{j4\omega_0 t} dt = 0$

máme ortogonální báze

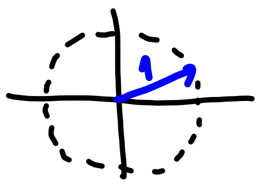
NORMALITA BÁZÍ (velikost 1)

$b_k(t)$ – k-tá báze

$b = [a, b, c, \dots\dots h]$

$\|b\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots h^2}$

$$\|b_k(t)\| = \int_{T_1} |b_k(t)|^2 dt = \int_{T_1} |\underbrace{e^{jk\omega_0 t}}_{1}|^2 dt = \int_{T_1} 1\, dt = T_1$$



fuj! chci 1! => dělím T_1

VŠECHNY Four. transformace / řady / atd. se řídí jediným vzorem:

$$\boxed{\text{VÝSTUP} = \begin{matrix}\text{možná}\\ \text{nějaká}\\ \text{konstanta}\end{matrix}\ \begin{matrix}\text{sumační}\\ \text{operátor}\end{matrix}\ \text{vstup}\ e^{\mp j\,\text{čas}\,\text{frekvence}}}$$

$-$ čas $\to$ frekvence (analýza)

$+$ frekvence $\to$ čas (syntéza)

FŘ:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_1}$$

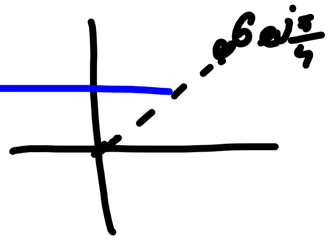
analýza

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\, e^{-jtk\omega_0}\, dt$$

syntéza

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{+jtk\omega_0}$$

Příklad 1: $x(t) = \underline{6e^{j\pi/4}} \cdot \underline{e^{j1000\pi t}}$

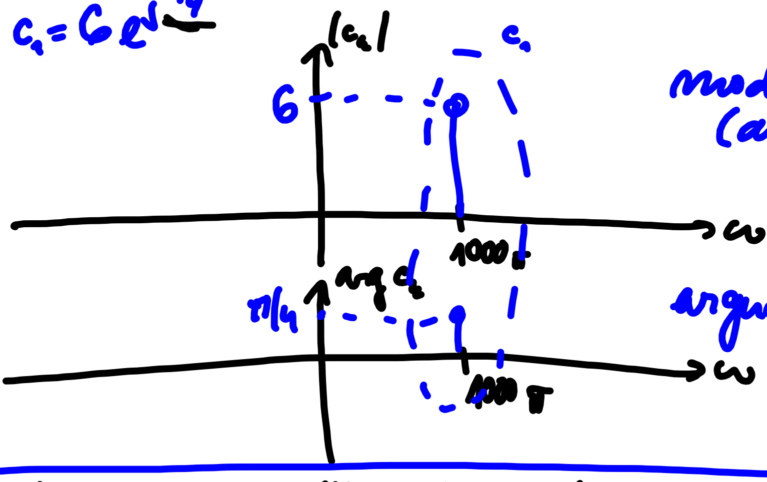


$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

$\omega_1 = 1000\pi$ rad/s

$f_1 = 500$ Hz

$c_1 = 6e^{j\pi/4}$



modulové spektrum (amplitudy) magnitudes

argumentové spektrum (fáze) phase shifts.

Příklad 2: $x(t) = 4\cos(1000\pi t + \pi/4) =$

$$= \frac{4}{2}e^{j(1000\pi t+\pi/4)} + \frac{4}{2}e^{-j(1000\pi t+\pi/4)} =$$

$$= 2e^{j\pi/4} e^{j1000\pi t} + 2e^{-j\pi/4} e^{-j1000\pi t}$$

$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

match!

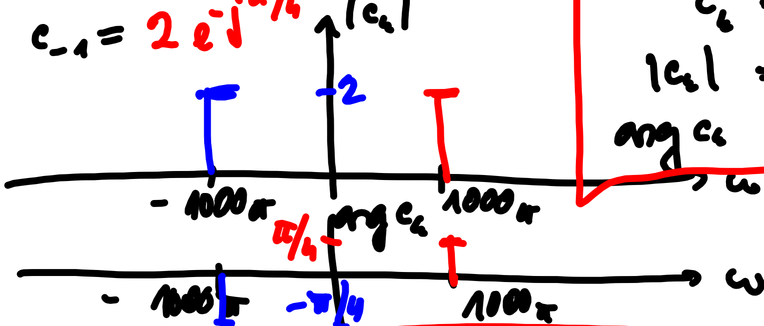
$\omega_1 = 1000\pi$ rad/s

Pokud $x(t)$ reálné, pak

$$c_k = c_{-k}^*$$
$$|c_k| = |c_{-k}|$$
$$\arg c_k = -\arg c_{-k}$$

$k=1 \quad c_1 = 2e^{j\pi/4}$

$k=-1 \quad c_{-1} = 2e^{-j\pi/4}$



$$\boxed{\begin{array}{l}\text{amplituda cosinusovky} = 2|c_k| = 2|c_{-k}| \\ \text{fáze cosinusovky} = \arg c_k = -\arg c_{-k}\end{array}}$$

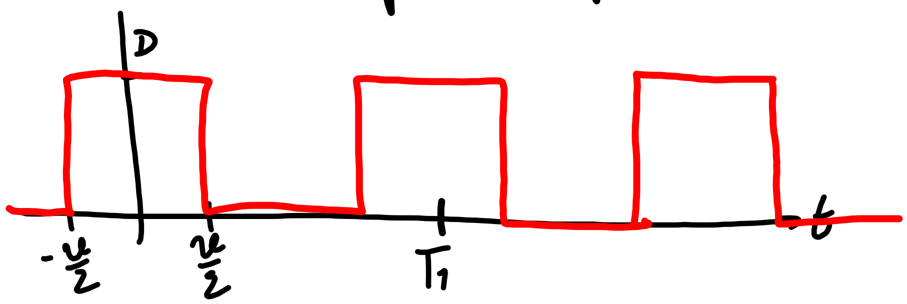
Syntéza z cosinusovek

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$$

$C_k = 2|c_k| = 2|c_{-k}|$

$\varphi_k = \arg c_k = -\arg c_{-k}$

Příklad 3: FŘ periodický sled obdélníkových impulsů



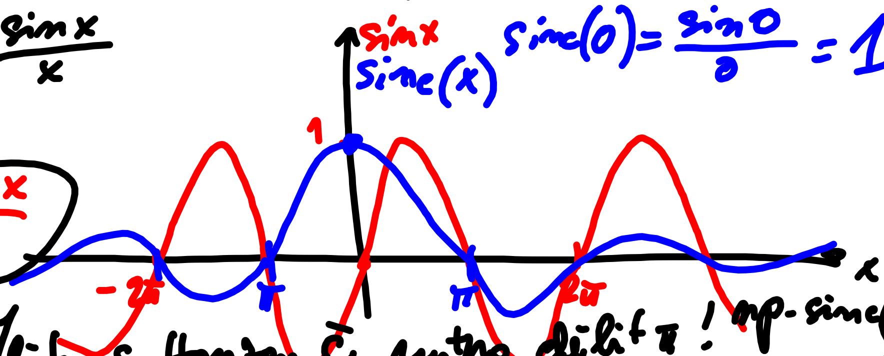
Mat. příprava #1: sinc - kardinální sinus

$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}$

$\mathrm{sinc}(0) = \frac{\sin 0}{0} = 1$

Alternativa

$\mathrm{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$



Matlab i numpy

Pro kompatibilitu s Honzou Č nutno dělit π! np.sinc(x/np.pi)

Mat. příprava #2 Eulerův integrál & Sebastova paměťka š.P.

$$\int_{-b}^{b} e^{+jxy}\,dy = \left[\frac{e^{jxy}}{jx}\right]_{-b}^{b} = 2\frac{e^{jxb} - e^{-jxb}}{2jx} = \frac{2b\sin bx}{bx} =$$

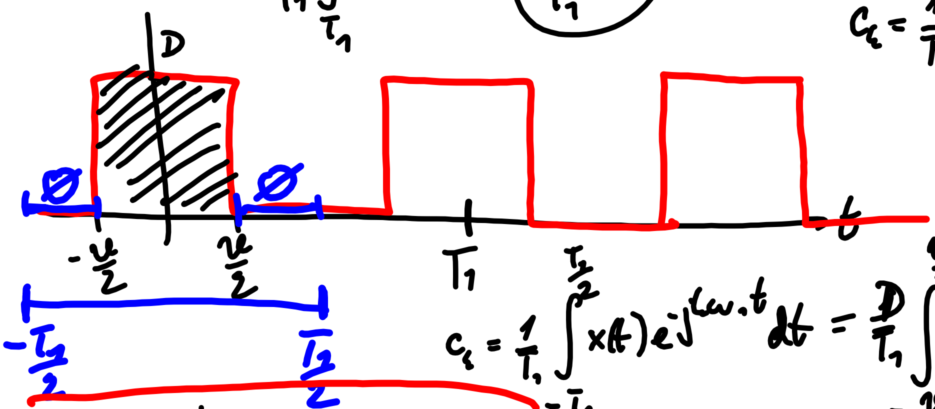
$$= 2b\,\mathrm{sinc}\,bx$$

$\sin\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$

$\mathrm{sinc}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$

$$\bar{x} = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\,dt = \frac{1}{T_1} D\vartheta = c_0$$

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt$$



$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} x(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt = \frac{D}{T_1}\int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{\frac{\vartheta}{2}} e^{-jk\omega_1 t}\, dt =$$

S.P.: $\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy} = 2b\,\mathrm{sinc}(bx)$

$$= \frac{D}{T_1}\cancel{2}\frac{\vartheta}{\cancel{2}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right) = \boxed{\frac{D\vartheta}{T_1}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)}$$

Ruční kreslení koeficientů F.Ř. sledu obd. impulsů.

$-\pi$ pro záporné frekvence z estetických důvodů

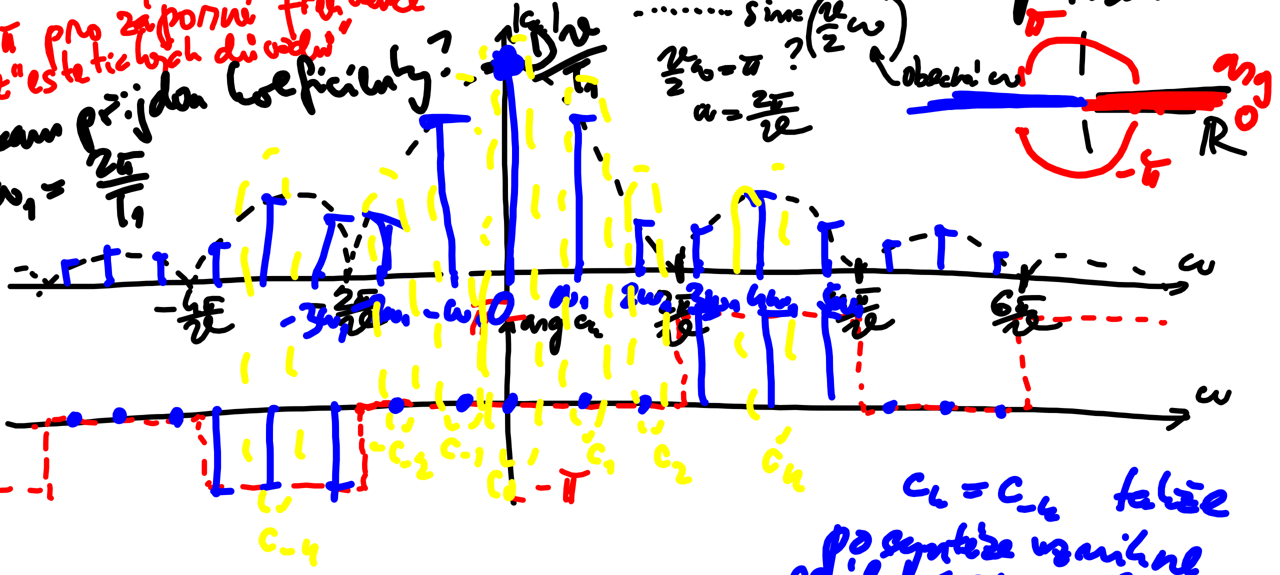
kam přijdou koeficienty?

$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

$\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)$ obecně ω

$\frac{\vartheta}{2}\omega_0 = \pi$?

$\omega = \frac{2\pi}{\vartheta}$



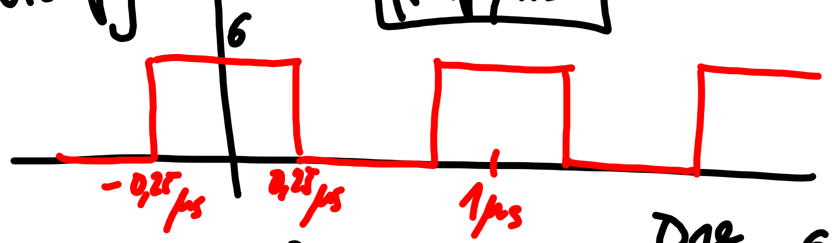
$c_k = c_{-k}$ takže po sestavení vznikne reálný signál.

Př. 1 $D = 6$ $f_1 = 1\,MHz$ $T_1 = 1\,\mu s$ $\omega_1 = 2M\pi$ rad/s

viz python nb. $\boxed{\text{fr.ipynb}}$

$\frac{\nu}{T_1}$ střída

duty cycle

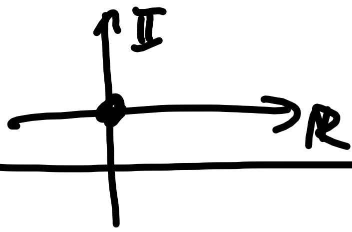


$c_0 = 3$

$D\frac{\nu}{T_1} = 6 \cdot \frac{0{,}5\,\mu s}{1\,\mu s} = 3$

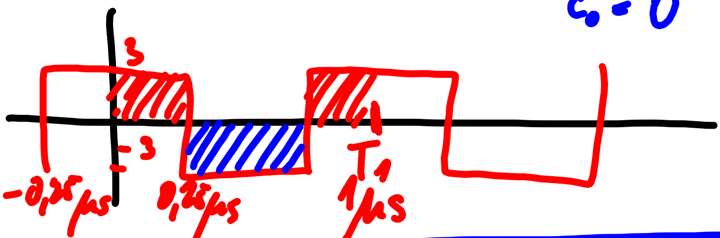
$\frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{0{,}5 \cdot 10^{-6}} = 4M\pi$ rad/s ← dotyky funkce sinc s nulou.

$\omega_1 = 2M\pi$



$\boxed{\text{Příklad 2}}$ symetrický signál

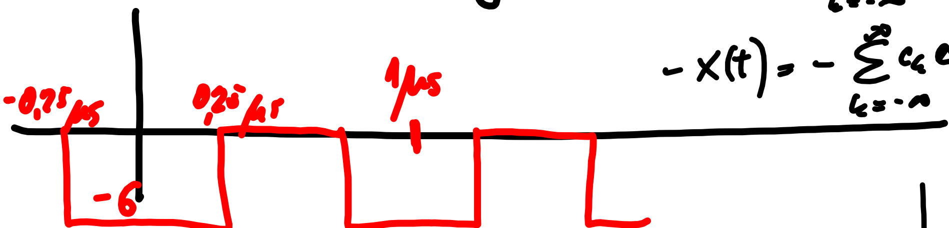
$c_0 = 0$



$\boxed{\text{Příklad 3}}$ záporný signál

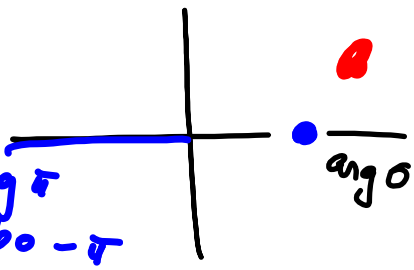
$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$

$-x(t) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -c_k e^{jk\omega_1 t}$



c_k s nulovým argumentem
→ ang π nebo $-\pi$ "zezáporněné"

c_k s argumentem $-\pi$ nebo π
→ ang 0 "skládání"



Syntéza signálu z koeficientů FŘ

$$x(t) = \dots \; c_{-3} e^{-j3\omega_0 t} + c_{-2} e^{-j2\omega_0 t} + c_{-1} e^{-j\omega_0 t} + c_0 + c_1 e^{j\omega_0 t} + c_2 e^{j2\omega_0 t} + c_3 e^{j3\omega_0 t} \dots$$

na nic!
$c_{-2} = 0$!

na nic!
$c_2 = 0$!