Využití DFT

N vzorků v čase → N komplexních vzorků ve frekvenci
od 0 až skoro do vzork. frekvence

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j k \frac{2\pi}{N} n}$$

základní frekvence / norm. kruh. f.

zpětná

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{+j k \frac{2\pi}{N} n}$$

obyč.: $0 \dots \frac{N-1}{N} F_s$ [Hz]

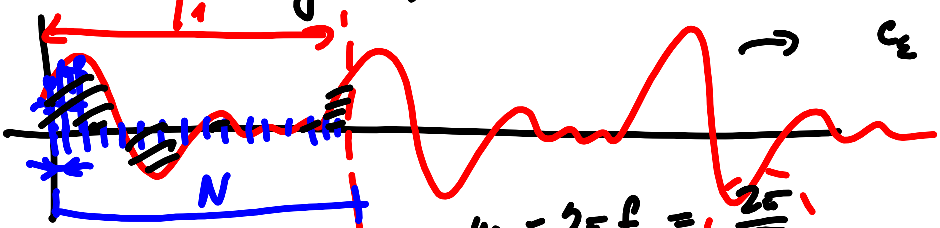
obyč. kruh.: $0 \dots \frac{N-1}{N} 2\pi F_s$ [rad/s]

normované: $0 \dots \frac{N-1}{N}$ [ ]

norm. kruhové: $0 \dots \frac{N-1}{N} 2\pi$ [rad]

Jak použít DFT k výpočtu 1) FŘ? 2) FT?

Fourierova („analogová") řada



→ c_k na násobcích základní kruh. frekv.

$$\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

N vzorků, T vzork. perioda $T_1 = NT$

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt \approx \frac{1}{N\cancel{T}} \sum_{n=0}^{N-1} \left[x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N\cancel{T}} n\cancel{T}} \cdot \cancel{T} \right] =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} X[k]$$

ALE: 1) vzork. teorém: $f_{max} < \frac{F_s}{2}$, nenulový c_k musí mít max koeficient $\frac{N}{2}$

2) asi ne c_k od $-\infty \dots \infty$, ale jen od 0 do $\frac{N}{2}$, $\frac{N}{2}+1 \dots N-1$ nutno „flipnout" do záp. frekvencí.

3) $T_1 = N \cdot T$ – těžko splnitelné, protože
1. neznám T_1
2. nemusím trefit s F_s

Pokud se nepodaří, koeficienty budou „leakovat" do sousedních frekvencí.

Zvýšení počtu vzorků (na výstupu) / rozlišení DFT.

Např. $N = 256$ ····> $N = 2048$

Nemám více vstupu!

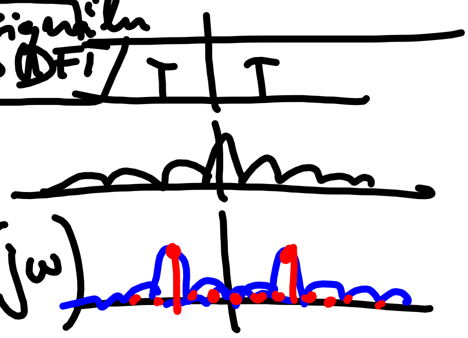
Zero padding

Co se děje při vyřezávání signálu pro DFT

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$

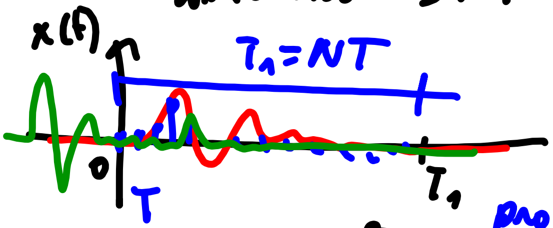
$w(t) \longrightarrow W(j\omega)$

$x(t)\,w(t) \longrightarrow X(j\omega) * W(j\omega)$



$T_1 = N \cdot T$

Napojování DFT na Fourierovou transformaci



$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t}\, dt$$

pro všechny ω to nepůjde...

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$X\left(jk\frac{2\pi}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N\cancel{T}} n\cancel{T}} \cdot T = T \boxed{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N} n}}$$

$$\boxed{X\left(jk\frac{2\pi}{NT}\right) = T \cdot X[k]}$$

ALE:

1) $f_{max} < \frac{F_s}{2}$

2) jsem schopen počítat jen pro $k < \frac{N}{2}$, tedy do $F_s/2$. Záporné frekvence OK od $-\frac{F_s}{2}$ do 0 (fftshift)

3) pouze některé frekvence.

Praktické rady: 1. pokud signál omezený v čase, ale někde jinde než $0 \dots T_1$ → posunout:

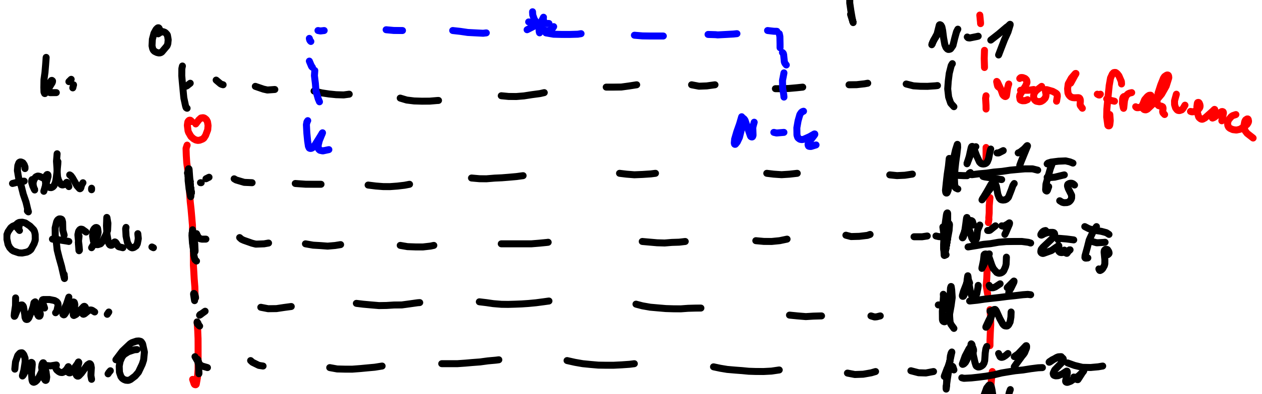
$$y(t) = x(t - \tau)$$

$Y(j\omega)$ → zkorigovat $X(j\omega) = Y(j\omega) e^{+j\omega\tau}$

2. pokud je potřeba jemnější osa ω: zero padding

Shrnutí DFT:

žere N vzorků v čase, produkuje N komplexních vzorků ve frekvenci.



všechno se děje v bufferu délky N!

DFT reálného signálu $x[n] \in \mathbb{R}$

$$X[k] = X^*[N-k]$$

- kruhové posunutí signálu o m vzorků

$$X[k] \cdot e^{-jm\frac{2\pi}{N}k}$$

- kruhová konvoluce signálů $x_1[n]$ a $x_2[n]$

$$X_1[k] \cdot X_2[k]$$

- s DFT je možné počítat spektra analog. signálů, ALE
  - omezení ve frekv. vzork. teorém.
  - projev spektra okénkové funkce.
- FFT je rychlá implementace DFT pro $N = 2^b$

Spektrogram – změny spektra v čase

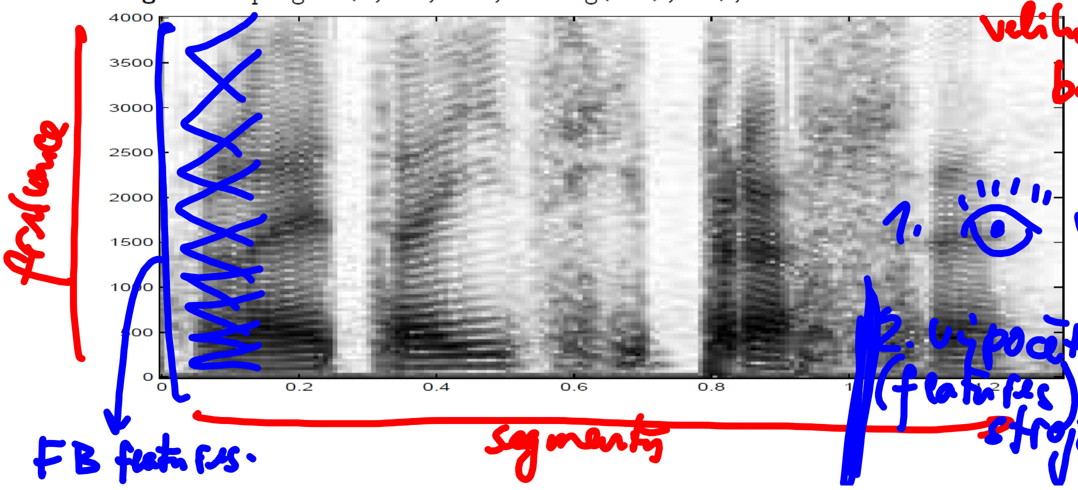
1. segmentace řeči: 25 ms, posun 10 ms
⇒ 100 za sekundu.

2. DFT každého segmentu

3. zobrazení · pouze frekv. od $0 \dots \frac{Fs}{2}$, pouze abs. hodnota

velikost = barva nebo tón šedi.

long-term: specgram(s,256,8000,hamming(256),200);



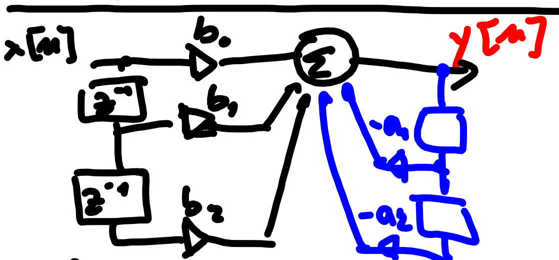
1. vizuální analýza

2. výpočet parametrů (features) pro strojové učení

ČÍSLICOVÉ FILTRY

- diferenční rovnice ✓
- schéma ✓
- implementace ✓
- kmitočtová charakteristika ?
- stabilita ?

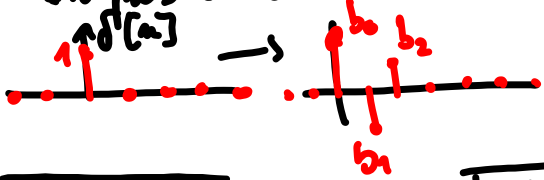
Diskrétní čas



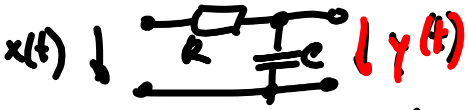
Diferenční rovnice

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

Impuls. odezva



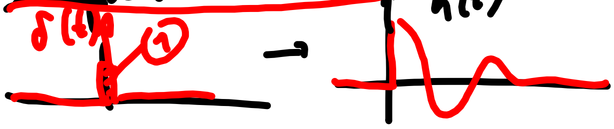
Jak to bylo se spojitým časem



Diferenciální rovnice:

$$b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_q \frac{d^q x(t)}{dt^q} = a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \dots + a_p \frac{d^p y(t)}{dt^p}$$

Impulsní odezva



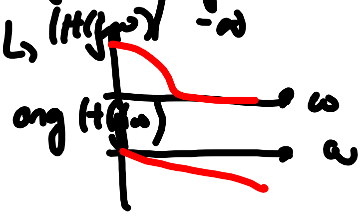
Frekvenční charakteristika

$$h[n] \xrightarrow[\text{done by DFT!}]{DTFT} H(e^{j\omega})$$

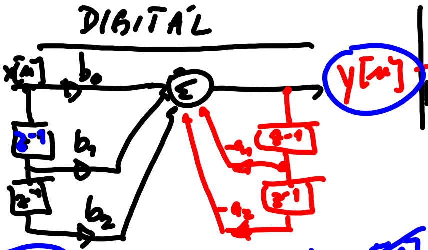
$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$h(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$



DIGITÁL

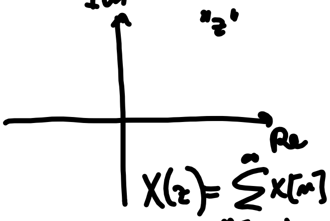


$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] \cancel{- a_0 y[n]}$
$+ b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$

z-transformace

$x[n] \longrightarrow X(z)$

"z"



$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Slovníček z-transformace:

$x[n] \longrightarrow X(z)$
$a\,x[n] \longrightarrow a\,X(z)$
$x[n-k] \longrightarrow X(z)\,z^{-k}$
$x[n-1] \longrightarrow X(z)\,z^{-1}$

Z-transformace diferenční rovnice:

$Y(z) = -a_1 Y(z) z^{-1} - a_2 Y(z) z^{-2}$
$+ b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2}$

Přenosová funkce (transfer function)

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ ← toto chci !!!

$Y(z)(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) = X(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$

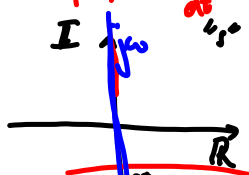
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

ANALOG

diferenciální rovnice:

$b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots b_q \frac{d^q x(t)}{dt^q} =$
$= a_0 y(t) + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + \dots a_p \frac{d y^p(t)}{dt^p}$

"s"



Laplaceova transf.

$x(t) \rightarrow X(s)$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$x(t) \longrightarrow X(s)$
$a\,x(t) \longrightarrow a\,X(s)$
$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longrightarrow X(s)\,s^k$

$b_0 X(s) + b_1 X(s) s + \dots b_q X(s) s^q =$
$= a_0 Y(s) + a_1 Y(s) s + \dots + a_p Y(s) s^p$

Přenosová funkce (transfer function)

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_q s^q}{a_0 + a_1 s + \dots a_p s^p}$$

Frekvenční char:

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{b_0 + b_1 j\omega + \dots b_q (j\omega)^q}{a_0 + a_1 j\omega + \dots a_p (j\omega)^p}$$

$\boxed{\text{freqs}}$

obecně:

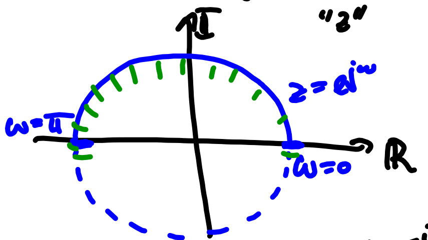
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}}$$

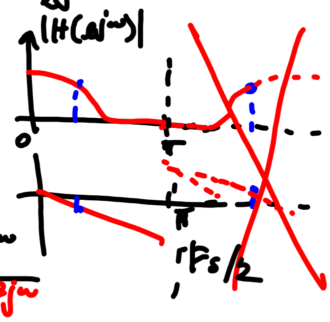
chci frekvenční charakteristiku !!!

z-transf: $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$ DTFT: $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$

Frekv. char. je přenosová funkce vyhodnocená pro $z = e^{j\omega}$

"z"





$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\omega} + b_2 e^{-2j\omega}}{1 + a_1 e^{-j\omega} + a_2 e^{-2j\omega}}$$

freqz(b, a, N, 'whole')

Rozklad přenosové funkce na kořeny

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2} \cdots = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} =$$

$$= b_0 \frac{(z - n_1)(z - n_2)}{(z - p_1)(z - p_2)}$$

n_1, n_2 · nulové body $(H(z) = 0)$

p_1, p_2 - póly $(H(z) = \infty)$

Stabilita?

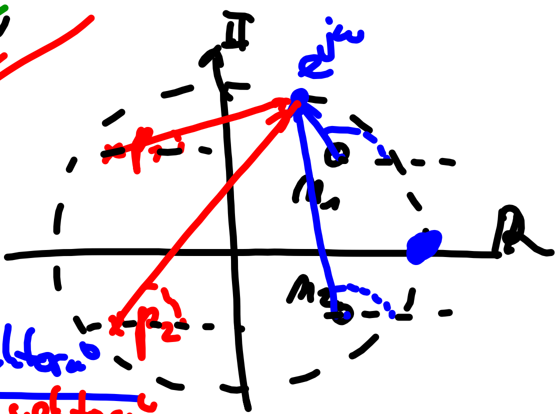
Póly musí ležet uvnitř jednotkové kružnice.

$$\boxed{|p_k| < 1}$$

zplane (b, a)

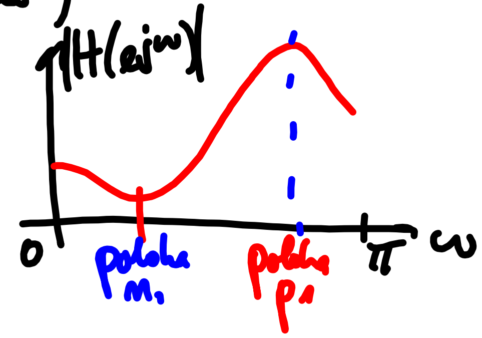
Přibližné určení frekv. char.:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 \frac{(e^{j\omega} - n_1)(e^{j\omega} - n_2)}{(e^{j\omega} - p_1)(e^{j\omega} - p_2)}$$



$$|H(e^{j\omega})| = b_0 \frac{\text{součin délek modrých vektorů}}{\text{součin délek červených vektorů}}$$

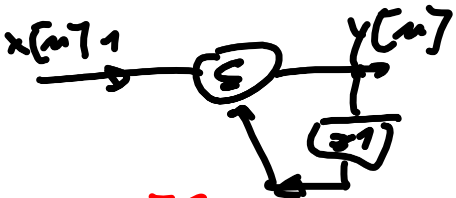
$\arg H(e^{j\omega})$ = součet úhlů modrých vektorů − součet úhlů červených vektorů



obecně

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^{Q} (z - n_k)}{\prod_{k=1}^{P} (z - p_k)}$$

$y[n] = x[n] - 0{,}5\, y[n-1]$



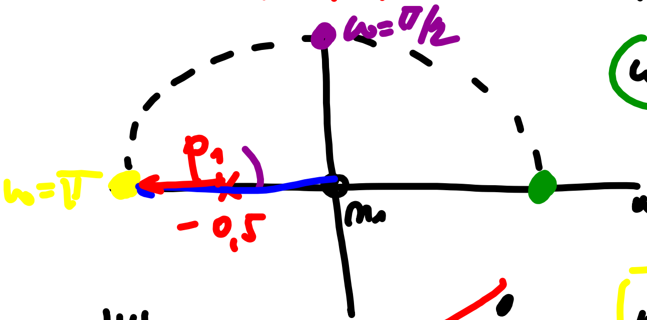
$-a_1 = -0{,}5$

$Y(z) = X(z) - 0{,}5\, Y(z) z^{-1}$

$Y(z)(1 + 0{,}5 z^{-1}) = X(z)$

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0{,}5 z^{-1}} = \frac{z}{z} \cdot \frac{1}{(1 + 0{,}5 z^{-1})} = \frac{z}{z + 0{,}5} = \frac{z - 0}{z - (-0{,}5)}$$



$\omega = 0$ $|H(e^{j0})| = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66$

$\mathrm{ang}\, H(e^{j0}) = 0 - 0 = 0$

$\omega = \pi/2$ $|H(e^{j\pi/2})| = \frac{1}{1{,}12} = 0{,}89$

$\mathrm{ang} \quad = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$

$\omega = \pi$ $| \quad | = \frac{1}{0{,}5} = 2$

$\mathrm{ang} \quad = \pi - \pi = 0$