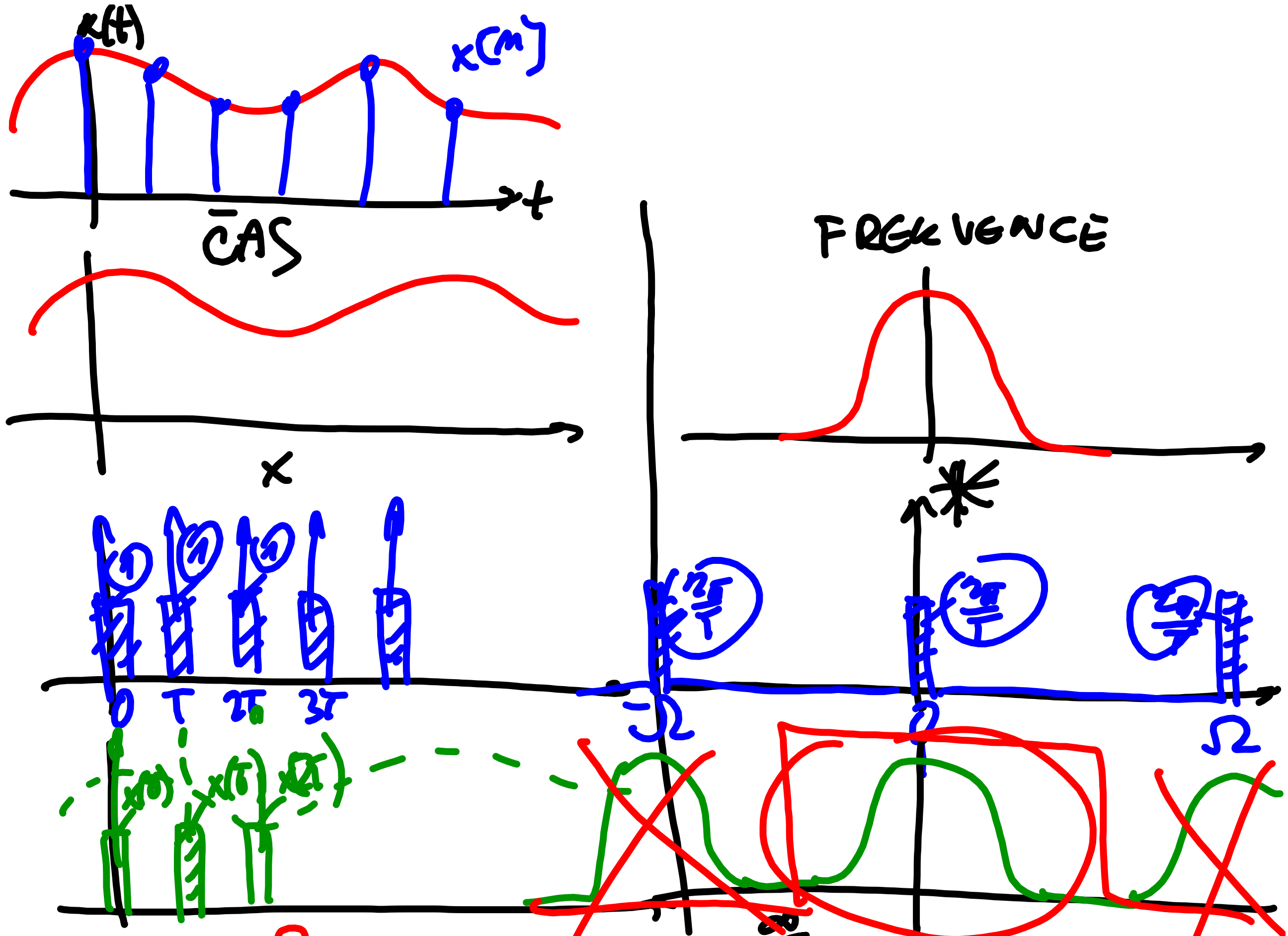
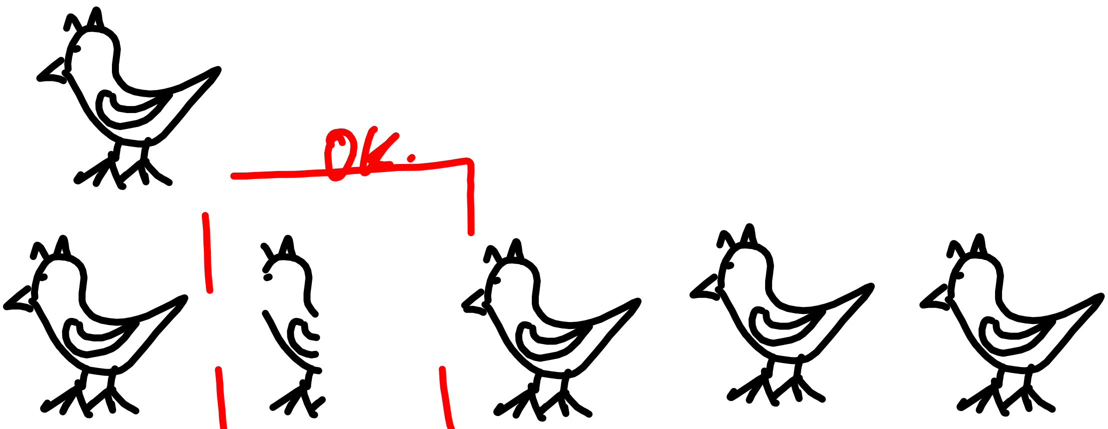


$$X_s(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\Omega)$$

$\boxed{2\omega_{max} < \Omega \quad (2 f_{max} < F)}$

Shannon – Kotelnikov – Nyquist – vzorkovací
pro ideální vzorkování / rekonstrukci

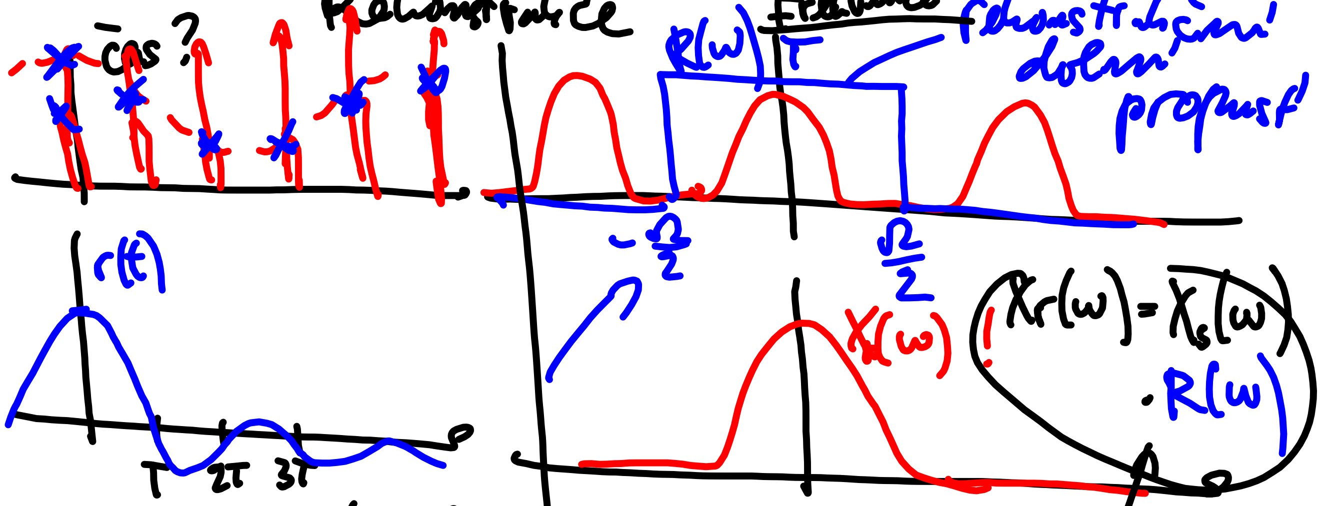
Aliasing – není splněno: "kopie" pův. spekt. se překrývají a sčítají.



Antialias filtr

- omezení $X(\omega)$ pouze od $-\frac{\Omega}{2}$ do $+\frac{\Omega}{2}$
- záměrné potlačení vyšších frekvencí, aby nebyl aliasing

Rekonstrukce

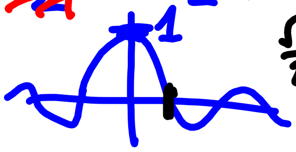


$r(t) = IFT(R(\omega))$ konvoluce – impulsní odezva rekonstrukční dolní propusti

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega)\, e^{+j\omega t}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\, T \int_{-\frac{\Omega}{2}}^{\frac{\Omega}{2}} e^{+j\omega t}\, d\omega =$$

$$\cancel{\frac{T}{2\pi}}\,\cancel{2}\cdot\cancel{\frac{\Omega}{2}}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}t\right) = \boxed{\mathrm{sinc}\left(\frac{\Omega}{2}t\right)}$$

s.p. $\int_{-b}^{b} e^{+jxy}\, dy = 2b\, \mathrm{sinc}(bx)$

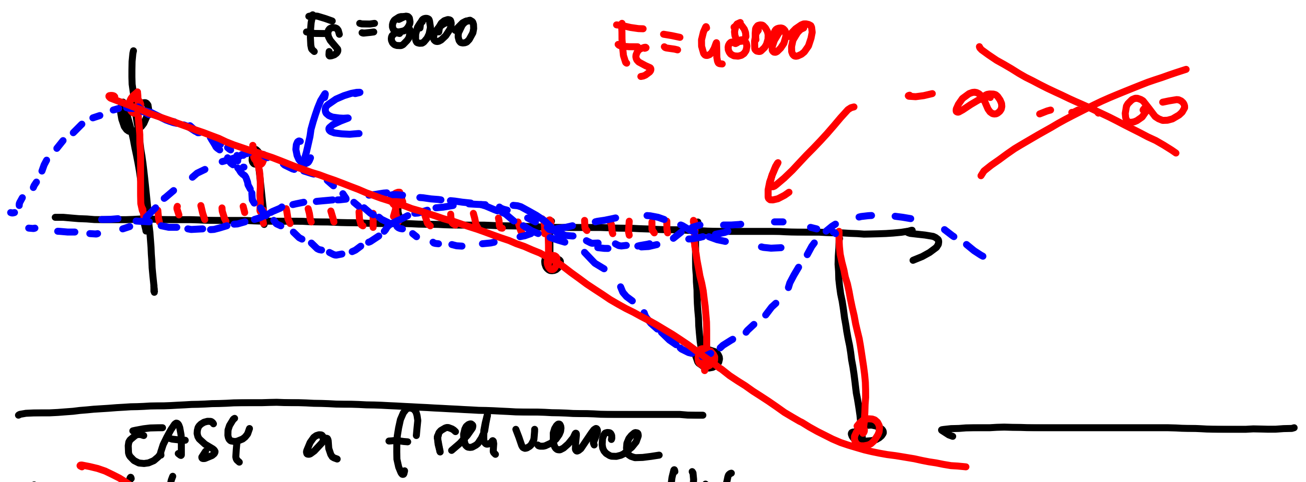


$\frac{\Omega}{2} t = \pi$

$t = \frac{2\pi}{\Omega} = T!$ $\quad \Omega = \frac{2\pi}{T} \quad T = \frac{2\pi}{\Omega}$

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, \mathrm{sinc}\left[\frac{\Omega}{2}(t - nT)\right]$$

rekonstrukce v časové oblasti



ČASY a frekvence

teoreticky

$$\cancel{x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)}$$

prakticky:

$x[n]$ – diskrétní čas, index, pořadí vzorku

n	0	1	2	3	. . . .
$x(n)$	.	.	.	.	. .

co se stalo s časem?

$x(nT) \rightarrow x[n]$

T [s] $\quad$ [ ]

Normalisace času

$$\frac{nT}{T} = n$$

bez rozměru!

Co se stalo s frekvencí?

WAV – hlavička Fs

normovaná frekvence

$$f' = \frac{f\,[Hz]}{F_s\,[Hz]} \qquad f'\,[\,]$$

$$\omega' = \frac{\omega}{F_s}$$

ŠPATNĚ

$$\cancel{\frac{\omega}{F_s} = \frac{2\pi f}{2\pi F_s} = f'}$$

příklad: cos na 440 Hz $\quad F_s = 8000$ Hz $\quad T = \frac{1}{8000}$

$$x(t) = \cos(2\pi 440 t)$$

$$x(nT) = \cos\left(2\pi\, 440\, n \cdot \frac{1}{8000}\right) = \cos\left(2\pi \frac{440}{8000} n\right)$$

norm. kruh. frekv. $\quad$ norm. frekv.

Spektrální analýza vzorkovaných (diskrétních) signálů

$x[n] \longrightarrow X(\text{frekvence})$

Máme: $x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$

$$X_s(j\omega) \overset{FT}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum x(nT)\,\delta(t-nT)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \sum \int_{-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)\, e^{-j\omega nT}\, dt =$$

chci normované varianty!

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\, e^{-j\omega nT} \qquad \frac{1}{F_s}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\frac{\omega}{F_s} n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\tilde{\omega} n}$$

DTFT Fourierova transf. s diskrétním časem (Discrete time F. T.)

funkce norm. kruh. frekv.

$$\boxed{\tilde{X}(e^{j\tilde{\omega}}) = \sum x[n]\, e^{-j\tilde{\omega} n}}$$

normovaná kruh. frekv.

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\tilde{\omega}})\, e^{+j\tilde{\omega} n}\, d\tilde{\omega}}$$

IDTFT

Historická poznámka:

$x(t) \longrightarrow X(j\omega)$ F.T. ↔ Laplaceova t.

$x[n] \longrightarrow X(e^{j\omega})$ DTFT ↔ z-transformace

Co je v normovaných kruh. frekv. vzorkovací frekvence?

$$\frac{2\pi \cancel{F_s}}{\cancel{F_s}} = 2\pi$$

Periodicita DTFT ∀ násobek vzorkovací frekvence ≃ 2π pro norm. kruh. frekv.

$e^{a+b} = e^a e^b$

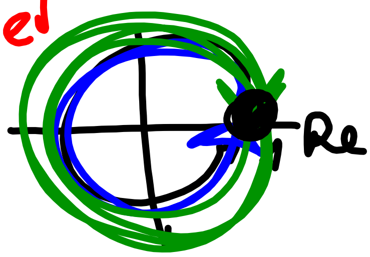
$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

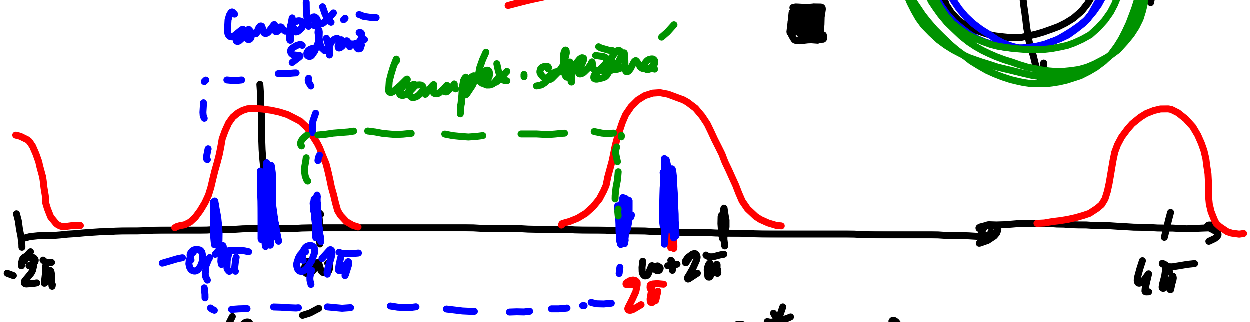
$$\tilde{X}(e^{j(\omega+k2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+k2\pi)n} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \cdot \underbrace{e^{-jk2\pi n}}_{1} =$$

$$= \sum x[n] e^{-j\omega n} = \tilde{X}(e^{j\omega}) \quad \blacksquare$$

k celé číslo
n celé číslo
kn celé číslo
$e^{j\,2\pi\,\text{celé číslo}}$

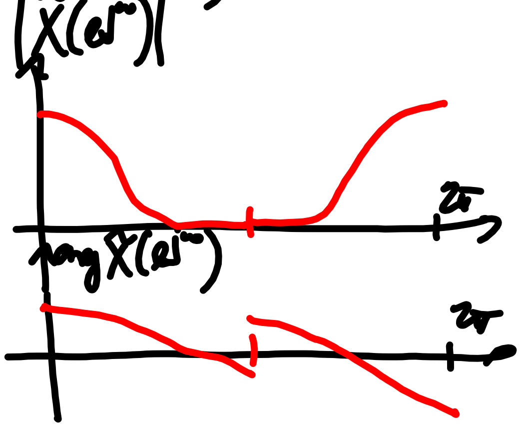




x[n] reálné: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{j(2\pi-\omega)})$$

	periodicita
norm. kruhová frekv. :	2π
norm. frekv. :	1
kruh. frekv. :	$2\pi F_s$
frekv. :	F_s



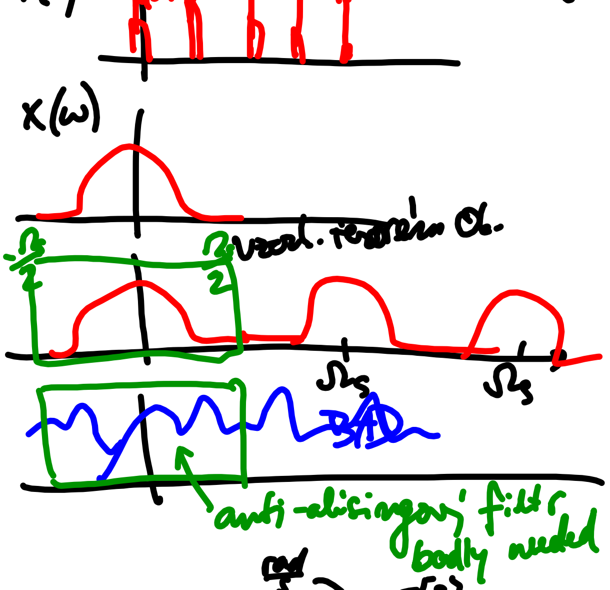
SHRNUTÍ

Teoreticky

vzork. per. T

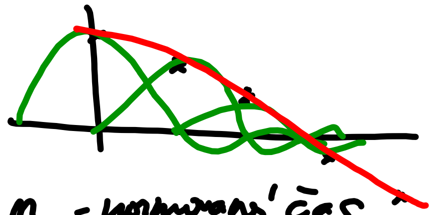
vzork. frek. $F_s = \frac{1}{T}$

kruh. vz. fr. $\Omega_s = 2\pi F_s$



$$\boxed{\begin{matrix} 2\omega_{max} < \Omega_s \\ 2f_{max} < F_s \end{matrix}}$$

pro v. čase



n - normovaný čas

$f' = \frac{f}{\boxed{F_s}}$ norm. frekvence

$\omega' = \frac{\omega}{\boxed{F_s}}$ norm. kruh. frekvence

$\int x(t) e^{-j\omega t} dt$ obyč. (rad/s, [s])

$\sum x[n] e^{-j\omega n}$ normované. (rad, [])

DTFT

výstup = lin. komb. vstup $e^{\pm j\,\text{čas}\cdot\text{frekvence}}$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-jn\omega}$$ přímá DTFT.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\, e^{+jn\omega}\, d\omega$$

periodicita: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega + k2\pi)})$

symetrie (pro $x[n] \in \mathbb{R}$): $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$

symetrie v intervalu 0 až 2π:

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{j(2\pi - \omega)})$$

DTFT: ∞ vzorků na vstupu → funkce na výstupu

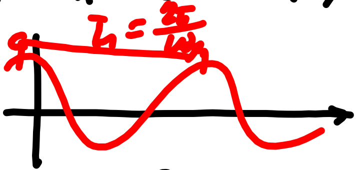
DFT: N vzorků na vstupu → N vzorků na výstupu.

Diskrétní signály

Periodicita vs. cosinusovky

Analog.

$x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$



$T_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}$

2 různé $\omega_1 \Rightarrow$ 2 různé cosinusovky!

Diskrétní

$x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \varphi_1)$

ω_1 … normovaná kruh. frekv.

perioda?

$\cancel{N_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}}$ nejde! N_1 nemusí být celý počet vzorků!

$\omega_1(n + N_1) - \omega_1 n = k2\pi$

$\cancel{\omega_1 n} + \omega_1 N_1 - \cancel{\omega_1 n} = k2\pi$

$\omega_1 N_1 = k2\pi$

$N_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1}$

$\boxed{\text{k ladit, až bude } N_1 \text{ celé}}$

$\boxed{\omega = \frac{\pi}{8}}$ $N_1 = k\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}} = k16$ $k=1$ $\boxed{N_1 = 16}$

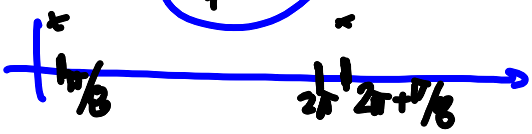
$\omega = \frac{8\pi}{31}$ $N_1 = k\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = k\frac{31}{4}$ $k=4$ $N_1 = 31$

$\omega = \frac{1}{6}$ $N_1 = k\frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = k12\pi$ NE!

$\boxed{\omega = \frac{17\pi}{8}}$ $N_1 = k\frac{2\pi}{\frac{17\pi}{8}} = k\frac{16}{17}$ $k=17$ $N_1 = 16$

vzork. frekvence v norm. frekv.

$\omega_{max} < \pi$



- složitější vztah mezi ω_1 a N_1
- pro dvě různé $\omega_1 \rightarrow$ stejná N_1, stejná cosinusovka!

Operace s disk. signály

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x[n]$	-3	6	8	-2	5	3	1	-3	6	5	2	-

okénková funkce $R_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \in [0 \dots N-1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

$R_N[n]$	0	0	0	1	1	1	1	0

Omezení na signál délky N:

$y[n] = x[n] \cdot R_N[n]$

n		-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	-2	5	3	1	0	0	0	0

Periodisace s periodou N $\quad p[n] = y[mod_N(n)]$

n	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	-2	5	3	1	-2	5	3	1	-2	5	3	1	-2	5	3	1
$mod_N[n]$		1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Periodisace s posunutím $\quad pp[n] = y[mod_N(n-1)]$

n				0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	-2	5	3	1	-2	5	3	1	-2	5	3	1	
$n-1$				-1	0	1	2	3	4	5			
$mod_N(n-1)$					0	1	2	3	0	1	2	3	

Kruhové posunutí $\quad kp[n] = R_N[n]\, y[mod_N(n-1)]$

n	0	1	2	3
$x[n]$	-2	5	3	1
	1	-2	5	3