DFŘ

→ periodický disk. signál $\tilde{x}[n]$ perioda N

→ koeficienty DFŘ "spektrum" $\tilde{X}[k]$ perioda N

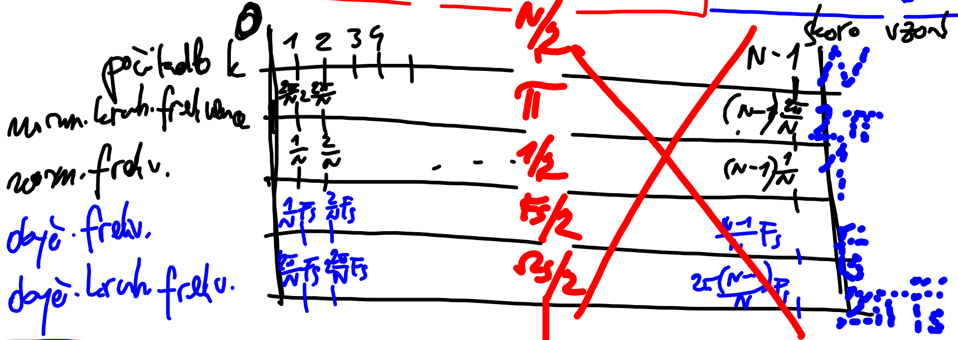
výstup = možná nějaká konstanta · sum. q. · vstup · $e^{\mp j \,\text{čas}\,\text{frekvence}}$

čas → spek.

spek. → čas

DFŘ $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$

$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, e^{+jnk\frac{2\pi}{N}}$



ISS → KPF

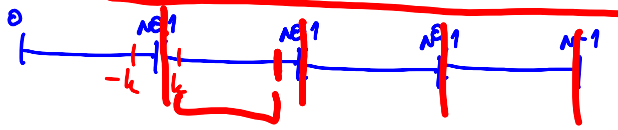
Periodicita DFŘ

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k + mN]$ (m – libovolné celé číslo)

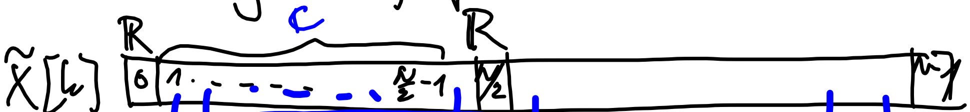
SYMETRIE

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[N-k]$ → symetrie v rámci intervalu $0 \ldots N-1$



Kolik čísel je ve výstupu DFŘ ??



$\tilde{X}[0] = \sum_{n=0} \tilde{x}[n]$

$\tilde{X}[\frac{N}{2}] = \tilde{X}^*[N-\frac{N}{2}] = \tilde{X}^*[\frac{N}{2}]$

koef.	počet floatů
$\tilde{X}[0]$	1
$\tilde{X}[1] \ldots \tilde{X}[\frac{N}{2}-1]$	$(\frac{N}{2}-1)2$
$\tilde{X}[\frac{N}{2}]$	1
$\tilde{X}[\frac{N}{2}+1] \ldots \tilde{X}[N-1]$	0

$1 + 2\left(\frac{N}{2}-1\right) + 1 = 2 + (N-2) = N$

DFŘ cosinusovky s periodou N

$$\tilde{x}[n] = A\cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi\right) \qquad \tilde{X}[k] \quad ?$$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]\,e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha}+e^{-j\alpha}}{2}$$

$$e^{a+b} = e^{a}\cdot e^{b}$$

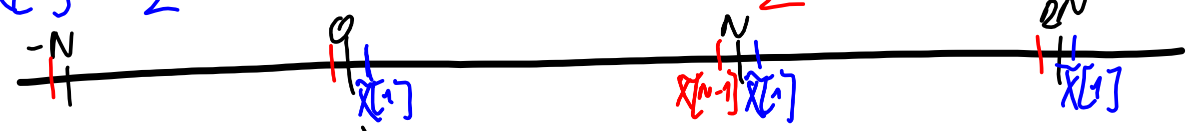
$$= \left[\frac{A}{2}e^{j\left(\frac{2\pi}{N}n+\varphi\right)} + \frac{A}{2}e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}n+\varphi\right)}\right]\frac{N}{N} =$$

$$= \frac{NA}{N2}e^{j\varphi}e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{NA}{N2}e^{-j\varphi}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

$k=1$

$$\frac{NA}{N2}e^{-j\varphi}e^{j\left(2\pi n - \frac{2\pi}{N}n\right)} = \frac{NA}{N2}e^{-j\varphi}e^{j2\pi\frac{N-1}{N}n}$$

$$\tilde{X}[1] = \frac{NA}{2}e^{j\varphi} \qquad \tilde{X}[N-1] = \frac{NA}{2}e^{-j\varphi}$$



ANALOG: $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$c_1 = \frac{A}{2}e^{j\varphi}$

$c_{-1} = \frac{A}{2}e^{-j\varphi}$

DFT Diskrétní Fourierova transformace

vstup: N vzorků signálu $x[n]$

výstup: N koeficientů spektra $X[k]$

$x[n]$ ~~periodická~~ $\xrightarrow{\text{DFŘ}}$ ~~$X[k]$ vytvoření periody~~

$0 \dots N-1$

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \qquad k = 0 \dots N-1}$$

zjednodušení DFŘ — žádná periodicita!!!

N vzorků v čase ⟶ N koeficientů ve spektru.

Platí! vše, co bylo odvozeno pro DFŘ!!!

$X[k] = X^*[N-k]$ (pro reálné signály)

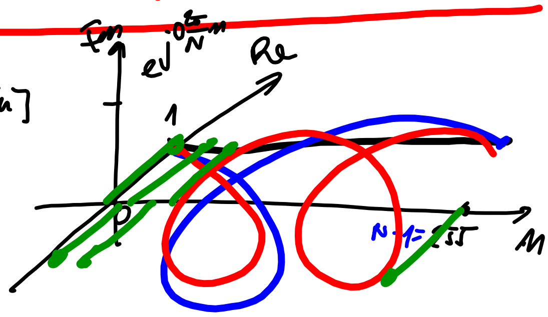
$N = 256$

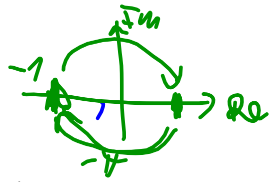
$k=0$ $\quad X[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot 1 = \sum_{n=0}^{} x[n]$

$k=1$ $\quad X[1] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$

$k=2$ $\quad X[2] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}2n}$

$k=\frac{N}{2}$ $\quad X[\frac{N}{2}] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n} = \sum_{n=0}^{} x[n]\, e^{-j\pi n}$ „nejrychlejší možný signál"





$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & -1 & 1 & -1 \dots 1 \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix}$$

$S = W x$

ZPĚTNÁ DFT a její vlastnosti

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \qquad x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}$$

stejné jako DFŘ bez tild!

kruhový posunutí

$$x[n] \longrightarrow X[k]$$

$$x[\mathrm{mod}_N(n-p)] \longrightarrow X[k]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kp}$$

moduly se nezmění

argumenty se posunou o $\frac{2\pi}{N}kp$ tedy lineárně!

kruhová konvoluce

$$x_1[n] \longrightarrow X_1[k]$$

$$x_2[n] \longrightarrow X_2[k]$$

$$x_2[n] \circledast_N x_1[n] \longrightarrow X_1[k] \cdot X_2[k]$$

násobení!

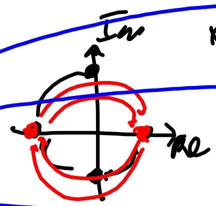
Příklad:

$x_1 = [2 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 0]$ $\qquad$ $x_2 = [1 \;\; -1 \;\; 0 \;\; 0]$

$y[n] = x_1 \circledast_N x_2 = [2 \;\; 0 \;\; -2 \;\; 0]$

$X_1 =$

	n: 0	1	2	3	$X[k]$
$x[n]$	2	2	0	0	
$k=0$ $e^{-j\frac{2\pi}{4}0n}$	1	1	1	1	4
$k=1$ $e^{-j\frac{2\pi}{4}1n} = e^{-j\frac{\pi}{2}n}$	1	$-j$	-1	j	$2-2j$
$k=2$ $e^{-j\frac{2\pi}{4}2n} = e^{-j\pi n}$	1	-1	1	-1	0
$k=3$					$2+2j$



n	0	1	2	3	$X_2[k]$
$x_2[n]$	1	-1	0	0	
$k=0$	1	1	1	1	0
1	1	$-j$	-1	j	$1+j$
2	1	-1	1	-1	2
3					$1-j$

$y[n] =$ n	0	1	2	3	$Y[k]$
$y[n]$	2	0	-2	0	
$k=0$	1	1	1	1	0
1	1	$-j$	-1	j	4
2	1	-1	1	-1	0
3					4

$X_1[k] \cdot X_2[k]$: 0, 4, 0, 4

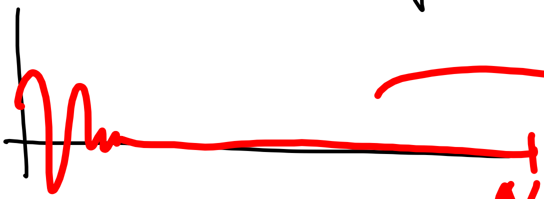
$(2-2j)(1+j) = 2 \cancel{+2j} \cancel{-2j} +2 = 4$

$$x_1[n] \circledast_N x_2[n] \longrightarrow X_1[k] X_2[k]$$

ZKRÁŠLENÍ VÝSLEDKU DFT

$x[n]$ s N vzorky, N je málo $\Rightarrow$ hnusné spektrum!

prodloužení $x[n]$? 'zero padding' "bourage des zéros"



DFT

"zkrášlení výsledku"

ŽÁDNÁ NOVÁ INFO !!!

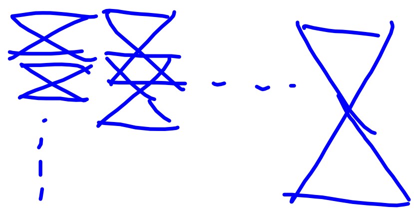
```
% ------------------------------------
N = 64; Fs = 16000;
x = randn (1,N);
x = filter ([1 1 1 1 ],1,x); plot (x)
X = fft(x); X = X(1:(N/2+1));
f = (0:(N/2)) / N * Fs;
subplot(211); plot(f, abs(X))
subplot(212); plot(f, angle(X))

N = 2048;
x = [x zeros(1,2048 - 64)]; plot(x)
X = fft(x); X = X(1:(N/2+1));
f = (0:(N/2)) / N * Fs;
subplot(211); plot(f, abs(X))
subplot(212); plot(f, angle(X))
```

FFT Fast Fourier transform

rychlý výpočet DFT pro $N = 2^{\text{něco}}$

$2N^2$ komplexních operací pro DFT podle definice

$\longrightarrow$ $\underline{N \log_2 N}$ operací

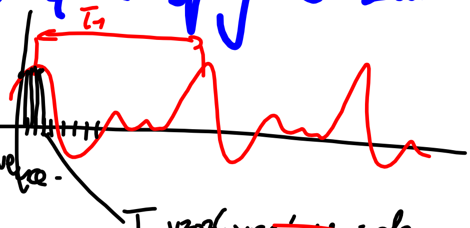


butterfly algo.

Cooley - Tuckey

DFT/FFT aplikovaná na signály se spoj. časem.

x(t) ~~periodický~~ Fourierova řada



$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)\, e^{-jk\omega_1 t}\, dt =$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ základní frekvence.

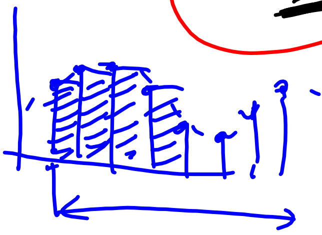
T vzorkovací perioda

$T_1 = NT$

$= \frac{1}{N\cancel{T}}\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\, e^{-jk\frac{2\pi}{NT}nT} \cdot \cancel{T} =$ ← kvůli aproximaci integrálu sumou.

$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N}X[k]$

to to je DFT!



ALE: 1) $f_{max} < \frac{F_s}{2}$ ✓

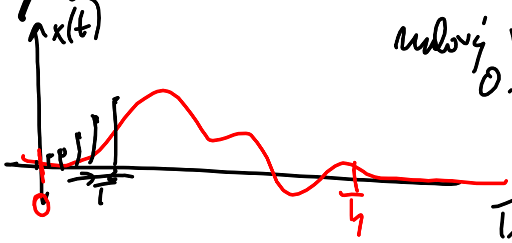
2) která k ??? $k \in -\infty \dots \infty$ jen $k \in -\frac{N}{2} \dots \frac{N}{2}$ ✓

DFT [0 | N/2] fftshift zařídí záporná k...

3) ~~$T_1 = NT$~~ BAD! zkusit to s N a Fs, které máme rádi!

F.T. pomocí DFT/FFT

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$



nulový vně $0 \dots T_1$

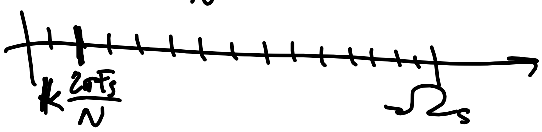
$T_1 = NT$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j k \frac{2\pi F_s}{N} nT} \cdot T =$$

použití aprox. integrálu sumou ...

$$= T \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j k \frac{2\pi}{N} n}}_{\text{to je DFT !!!}}$$

$k \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1}{T} nT$



$$\boxed{X\left(jk\frac{\Omega_s}{N}\right) = T\, X[k]}$$

ALE:

1) $f_{max} < \frac{F_s}{2}$ ✓
2) pouze pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ ✓
3) signál omezený od 0 do T_1 ✗ → není? Nejde!
   je, ale jinde než $0 \dots T_1$ → posunout do $0 \dots T_1$, spočítat a korigovat ✓
   $y(t) = x(t - \tau)$ $\quad Y(j\omega) = X(j\omega) e^{-j\omega\tau}$
4) málo bodů na kmit. ose (malé N)

FAKE: zero padding !

SUMMARY DFT:

- N vzorků v čase $\longrightarrow$ N koeficientů ve frekvenci
- $k = 0 \dots N-1$ počítadlo $\quad 0 \dots \frac{N-1}{N} \cdot$ vzorkovací frekvence $\to$ F_s [Hz], $2\pi F_s$ [rad/s], 1 [ ], 2π [rad]
- pro $x[n] \in \mathbb{R}$ symetrie:
  $X[k] = X^*[N-k]$ $\to$ zobrazuji/ukládám pouze $0 \dots \frac{N}{2}$
- kruhový posun $x[\mathrm{mod}_N(n-m)]$ $\quad X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$
- kruhová konvoluce $x_1[n] \circledN x_2[n]$ $\quad X_1[k]X_2[k]$
- s DFT jdou počítat spektra spoj. signálů, ale ...
- FFT $\doteq$ DFT, ale rychle, pro 2^b