Projekt - 16.12. ?

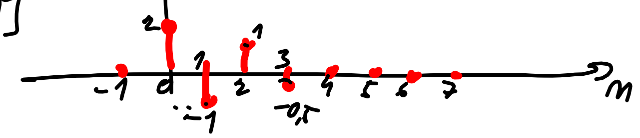
Zkoušky 2.1.

20.1.

28.1.

DISKRÉTNÍ / VZORKOVANÉ / ČÍSLICOVÉ SIGNÁLY
discrete / sampled / digital / signals

$x[n]$ stem



n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$x[n]$	0	0	0	2	-1	1	0,5	0	0

Sekvence délky N

$y[n] = x[n] \cdot R_N[n]$ — okénková funkce, window function (fcn.)

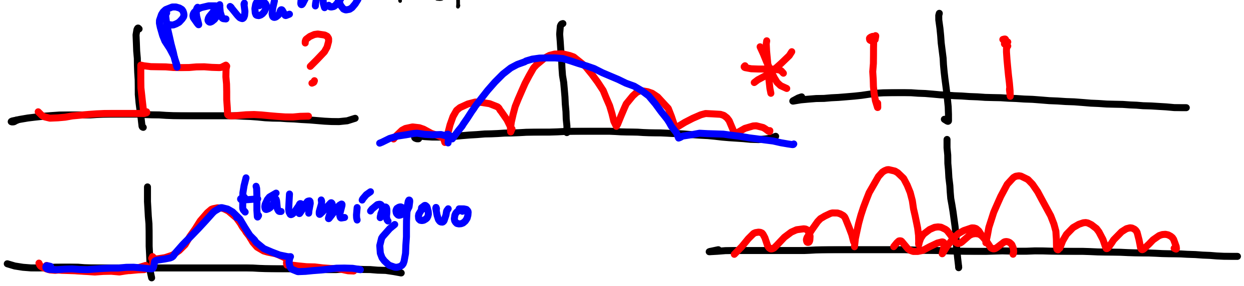
$0 \dots N-1$

$$R_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \in 0 \dots N-1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$y[n] = R_3[n] \cdot x[n]$

n	0	1	2
$y[n]$	2	-1	1

- segmentace signálu



Periodická posloupnost

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x[n]$			2	-1	1	0,5					
$y[n]$	... 1	0,5	2	-1	1	0,5	2	-1	1	0,5	2 . .

$y[n] = x[\mathrm{mod}_4\, n]$

$y[n] = x[\mathrm{mod}_N\, n]$ periodická posloupnost s periodou N

Periodizace s posunutím

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$			2	-1	1	0,5				
$y[n]$		1	0,5	2	-1	1	0,5	2	-1	1

$y[n] = x[\mathrm{mod}_4(n-1)]$

Kruhový posunutí - vše v bufferu délky N ! ($0 \dots N-1$)

n	0	1	2	3
$x[n]$	2	-1	1	0,5
$y[n]$	0,5	2	-1	1

$y[n] = R_4[n]\, x[\mathrm{mod}_4(n-1)]$

circular shift

Konvoluce

$x_1 = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$
$x_2 = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$

Lineární konvoluce

$$x_1[n] \ast x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$$

\star

výsledek délky $2N-1$

$(x^3+2x^2+3x+4)(x^3+x^2-x-1) =$ Samy! conv( )

Cyklická konvoluce

$$y[n] = x_1[n] \,\tilde{\ast}\, x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[\mathrm{mod}_N(n-k)]$$

$y[2] = 0$

x_1				1	2	3	4					
x_2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1		
n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y[n]$	-4	0	4	0	-4	0	4	0	-4	0	4	0

výsledek je periodický s N vzorky.

Kruhová konvoluce

$$y[n] = x_1[n] \circledN x_2[n] = R_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[\mathrm{mod}_N(n-k)]$$

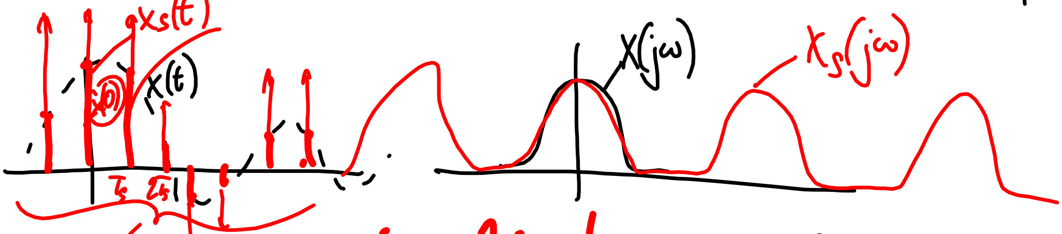
omezení na vzorky 0...N-1

cconv(..., ↑) délka!

FREKVENČNÍ ANALÝZA DISKRÉTNÍCH SIGNÁLŮ

→ zobrazování
→ výpočet parametrů (AI)!!!
→ filtrace!

FT → násobení → IFT



x[n] přímo spek. analýza!

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t)\, e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= x(0)\,e^{-j\omega 0} + x(T_s)\,e^{-j\omega T_s} + x(2T_s)\,e^{-j\omega 2T_s} \dots =$$

hodnoty vzorků — hodnoty komplex. exponenciály

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\, e^{-j\omega n T_s} =$$

$\frac{\omega}{F_s}$ → normované kruhová frekvence, budeme značit zase ω ... (SORRY...)

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n \frac{1}{F_s}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

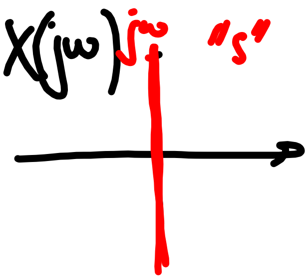
normovaná frekv.

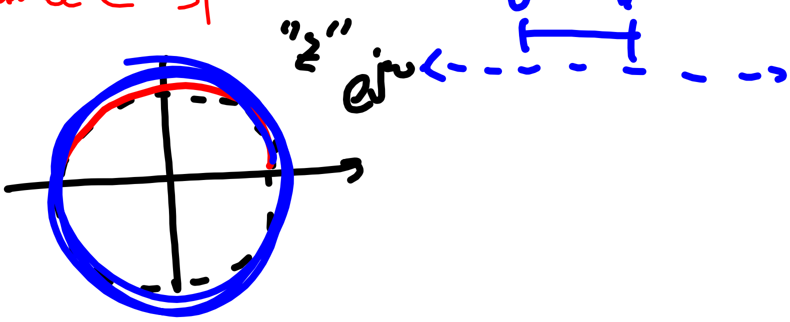
```
x = [1 -1]
omegas = (-4*pi) : 0.1 : (+6*pi);
X = zeros(size(omegas));
for k=1:length(omegas)
  om = omegas(k);
  X(k) = sum(x .* exp(-j * om * n));
end
subplot(211); plot(omegas, abs(X))
subplot(212); plot(omegas, angle(X))
```

$$\boxed{\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}}$$

Fourierova transformace s diskrétním časem
Discrete-time F.T. **DTFT**

Spektrální funkce ("spektrum")





Periodicita DTFT ?

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

$$\tilde{X}(e^{j(\omega+k2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j(\omega+k2\pi)n} =$$

$$e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \cdot \underbrace{\cancel{e^{-j2\pi k n}}}_{=1} =$$

periodicita po 2π

e^{0} $e^{j2\pi}$ $e^{-j2\pi}$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \tilde{X}(e^{j\omega}) \rightarrow \text{periodické po } 2\pi$$

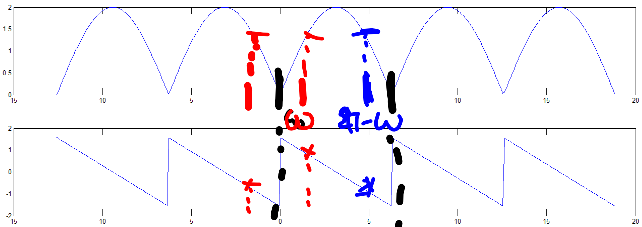
pro $x[n] \in \mathbb{R}$

Symetrie:

$$|\tilde{X}(e^{-j\omega})| = |\tilde{X}(e^{j\omega})|$$

$$\arg \tilde{X}(e^{-j\omega}) = -\arg \tilde{X}(e^{j\omega})$$

$$\tilde{X}(e^{-j\omega}) = \tilde{X}^{*}(e^{j\omega})$$



normované ω frekvence [rad]	0	2π
normované frekvence []	0	1
obyč. ω frekvence rad/s	0	$2\pi F_s$
obyč. frekvence 1/s = Hz	0	F_s

Symetrie a periodicita dohromady

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^{*}(e^{j(2\pi-\omega)})$$

stačí hodnoty pro $\omega = 0 \dots \pi$, zbytek je symetrický

Summary DTFT

1. Signál je diskrétní → spek. je periodické
2. signál není periodický → spek. je funkce pro $\forall \omega$
3. jedna DTFT, 4 možné frekv. osy

ISS → KPF

kus přepočítávání frekvence!

IDTFT

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega$$

($\int_{-\pi}^{\pi}$)

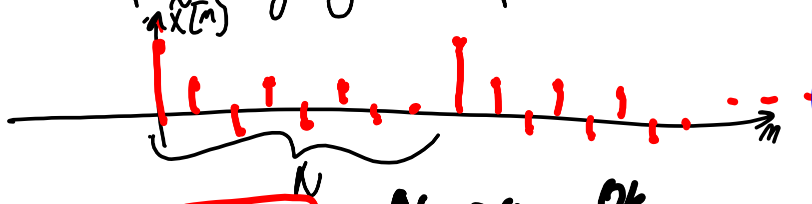
výstup = m. n. k. sumační op vstup $e^{\pm j}$ čas frekvence

frekv → čas

čas → frekv.

Diskrétní Fourierova řada (DFŘ)
Discrete F. series (DFS)

$\tilde{x}[n]$ periodický signál - per. N vzorků

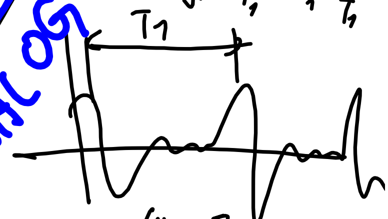


$f_1 = \frac{1}{N}$ $\quad \boxed{\omega_1 = \frac{2\pi}{N}}$ normovaná frekvence!

$N \to \infty$, Ok.

$\omega_1 \to N$ BACHA!

ANALOGIE: $f_1 = \frac{1}{T_1}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$



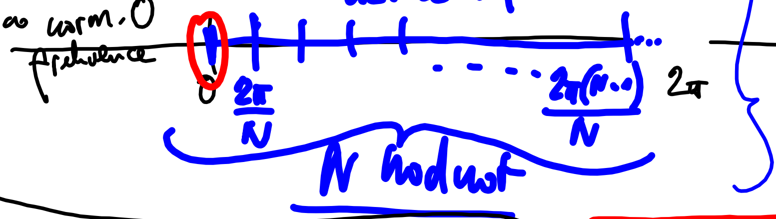
$\omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1, -\omega_1, \dots k\omega_1$

∞ koeficientů!

Kde hledat spektrum? ~~Všechny ω?~~

Násobky základní kruhové frekvence ω_1 !!!

užitečná frekvence.



∞ harm. 0 frekvence

N různých koef. DFŘ

N hodnot

DTFT: $\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n}$

DFŘ: $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

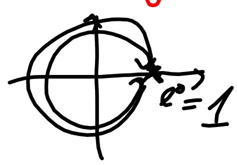
základní normovaná kruhová frekvence

pořadí koeficientu!

$\tilde{X}[k]$ jsou periodické po N koeficientech

$$\tilde{X}[k+N] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j(k+N)\frac{2\pi}{N}n} = \sum \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \underbrace{e^{-jN\frac{2\pi}{N}n}}_{=1} = \sum \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}[k]$$

kde jsou $e^{-j2\pi n}$?

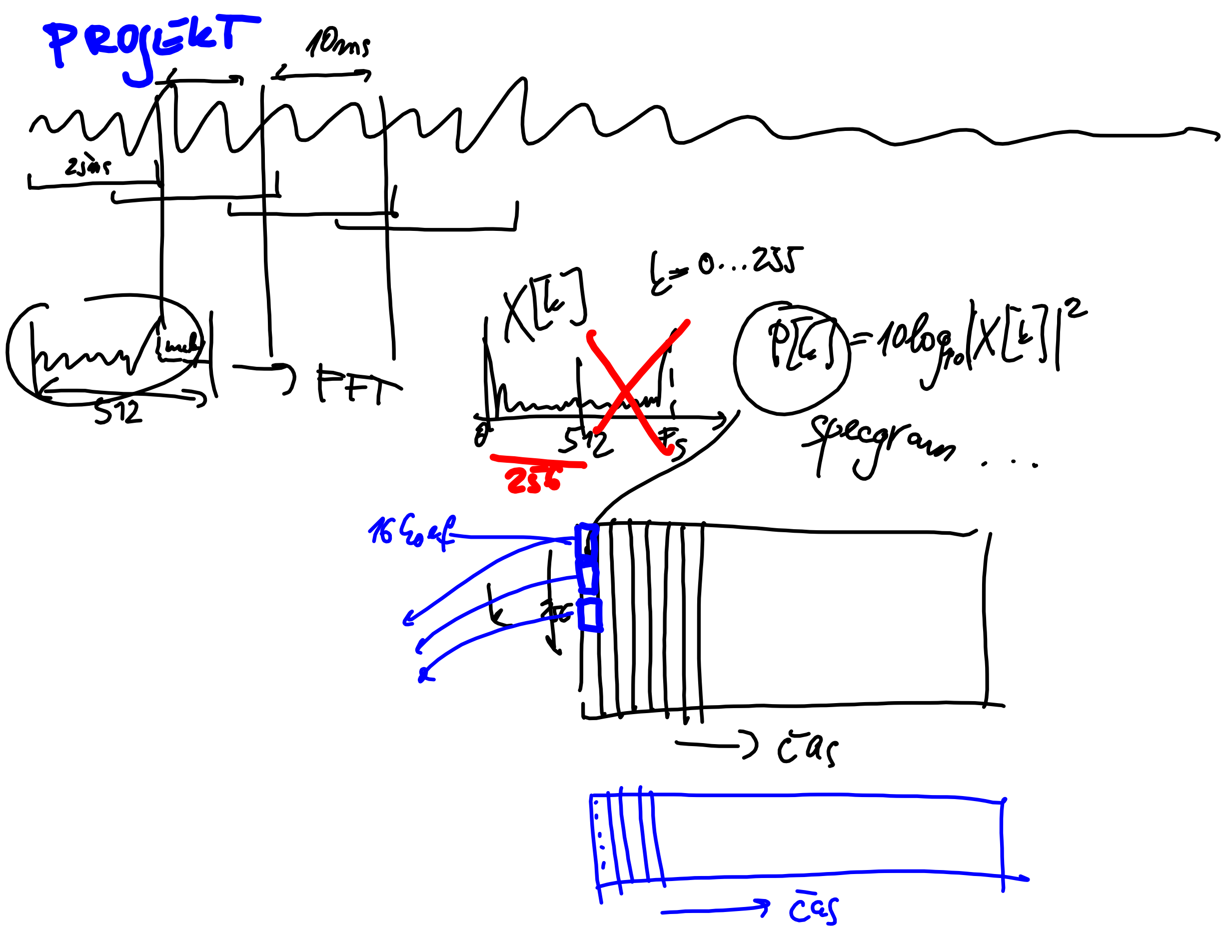


$e^0 = 1$

DFŘ je DTFT navzorkovaná na násobcích $\frac{2\pi}{N}$

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{+jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

zpětná DFŘ.


PROJEKT
10ms
25ms
512
FFT
X[k]
k = 0...255
0
512
Fs
256
P[k] = 10 log10 |X[k]|^2
specgram ...
16 koef
k
256
čas
čas