Systémy

→ disk. čas imp. odezva $h[n]$ ← odezva ... reakce na $\delta[n]$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

→ spojitý čas imp. odezva $h(t)$ ← reakce na $\delta(t)$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

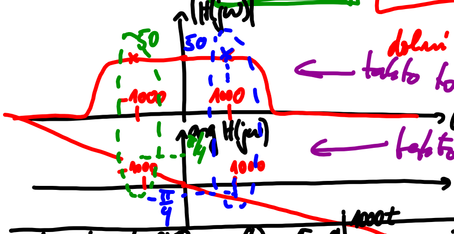
Komplexní kmitočtová charakteristika $H(j\omega)$

→ $|H(j\omega)|$ kolik? jak zesiluje / zeslabuje?

$\arg H(j\omega)$ jak to posouvá

$$\boxed{H(j\omega)} = \boxed{FT[h(t)]} = \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

$\boxed{z = r \cdot e^{j\varphi},\ z^* = r \cdot e^{-j\varphi}}$



← tohle to zesiluje dolní propust $H(j\omega) = H^*(j\omega)$

← tohle to posunuje.

komplexní exp. $x(t) = 5 \cdot e^{j1000t}$ tedy $\omega = 1000$ rad/s

$$y(t) = 5 \cdot e^{j1000t} \cdot \underbrace{50 e^{-j\pi/4}}\ = 250\, e^{j(1000t - \pi/4)}$$

cosinusovka $x(t) = 10 \cos(1000t + \frac{\pi}{2}) =$ $\qquad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$

$$= 5 e^{j\pi/2} e^{j1000t} + 5 e^{-j\pi/2} e^{-j1000t} =$$

$$= \underbrace{50 e^{-j\pi/4}\, 5 e^{j\pi/2}\, e^{j1000t}} + \underbrace{50 e^{j\pi/4}\, 5 e^{-j\pi/2}\, e^{-j1000t}} =$$

$$= 250\, e^{j(1000t + \pi/4)} + 250\, e^{-j(1000t + \pi/4)} =$$

$$= 500 \cos\left(1000t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$x(t)$ obecný → $X(j\omega)$ $\quad \boxed{H(j\omega)}$ $\quad$ výstup systému? $y(t)$

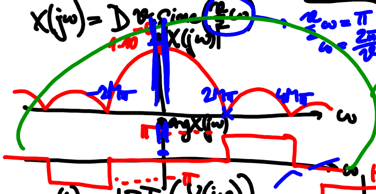
OPTION 1: $h(t) = IFT\ H(j\omega)$ $\qquad y(t) = x(t) * h(t)$

OPTION 2: $Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$ $\qquad y(t) = IFT(Y(j\omega))$

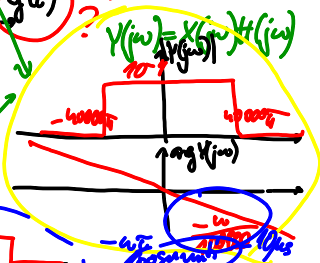
$\omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$

$x(t) \to \boxed{H(j\omega)} \to y(t)$?

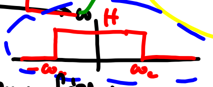
$X(j\omega) = D \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ $\qquad \frac{\tau}{2}\omega = \pi \qquad \omega = \frac{2\pi}{\tau}$



$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$

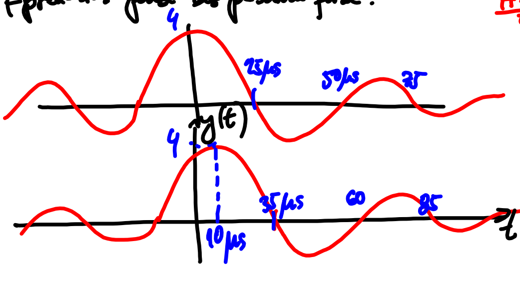


$y(t) = IFT(Y(j\omega))$



$\frac{H \cdot \omega_0}{\pi} = \frac{10^{-4} \cdot 40000\pi}{\pi}$

předtím: pouze bez posunu fáze:



$= 4\ \text{sinc}(\omega_0 t)$

$t = \frac{\pi}{\omega_0} =$

$= \frac{\pi}{40000\pi} =$

$= 0{,}000025 =$

$25\ \mu s$

Frekv. char. přímo ze schématu syst. se spoj. časem.

Teorie

Diferenciální rovnice

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} = b_0 x(t)$$

Laplaceova transf.

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt$$

s – jakékoliv komplex. číslo

Slovníček L.T.:

$$x(t) \longrightarrow X(s)$$
$$a\,x(t) \longrightarrow a X(s)$$
$$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow s X(s)$$
$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \longrightarrow s^k X(s)$$

L.T. obecného popisu systému pomocí dif. rovnice ...

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \cdot Y(s) s^k = \sum_{k=0}^{M} b_k X(s) s^k$$

$$Y(s) \sum \cdots = X(s) \sum \cdots$$

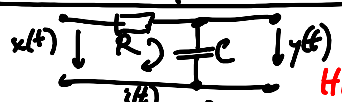
$$\boxed{H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

$$H(s) \to H(j\omega)$$

$$\boxed{H(j\omega) = \frac{\sum b_k (j\omega)^k}{\sum a_k (j\omega)^k}}$$

freqs

Příklad



$H(j\omega)$?

$$i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R}$$

$$i(t) = C \frac{dy(t)}{d(t)}$$

$$x(t) - y(t) = RC \frac{dy(t)}{dt}$$

$$y(t) + RC \frac{dy(t)}{dt} = x(t) \quad \mathcal{L}$$

$a_0 = 1 \quad a_1 = RC \quad b_0 = 1$

$$Y(s) + RC\,Y(s)s = X(s)$$

komplexní funkce nad komplexní rovinou

Přenosová funkce (systémová funkce).

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$

$$Y(s)[1 + RCs] = X(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

přenos fce $\longrightarrow$ kmit. char ?

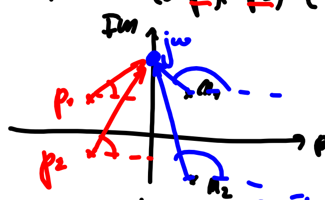
$$\boxed{H(j\omega) = \frac{1}{1 + RC j\omega}}$$

Rozklad na kořeny

$$H(s) = konst \frac{(s-n_1)(s-n_2)\cdots(s-n_M)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_N)}$$

nulové body $H(s) = 0$

póly $H(s) = \infty$

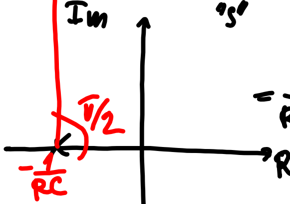


$$H(j\omega) = konst \frac{(j\omega - n_1)(j\omega - n_2)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)}$$

$(1+j)$ $(-4-j)$

$$|H(j\omega)| = konst. \frac{\text{součin délek modrých vektorů}}{\text{součin délek červených vektorů}}$$

$$\arg H(j\omega) = \text{součet úhlů modrých vektorů} - \text{součet úhlů červených vek}$$



$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs} =$$

$$= \frac{1}{RC\left(s + \frac{1}{RC}\right)} = \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s - \left(-\frac{1}{RC}\right)\right)}$$

konst

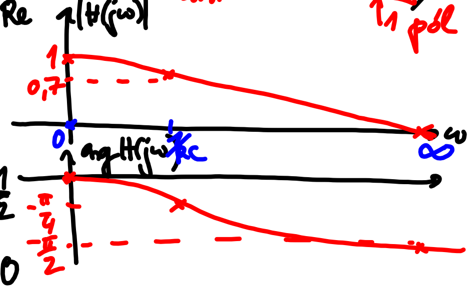
žádné nul. body

1 pól

$$\omega = 0 \quad \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\frac{1}{RC}} = 1$$

$$\omega = \frac{1}{RC} \quad \cancel{\frac{1}{RC}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \cancel{\frac{1}{RC}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\omega = \infty \quad \frac{1}{RC} \cdot \frac{1}{\infty} = 0$$



Systém - spočítat frekv. char.

diferenciální rovnice

$\rightarrow$ Laplaceova transf.

$\downarrow$

přenosová funkce $H(s)$

$\downarrow$

$$H(s) = konst \cdot \frac{(s-n_1)(s-n_2)\ldots}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots}$$

"s"

$h(t)$

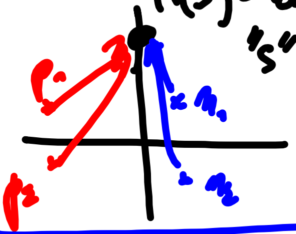
F.T.

$H(j\omega)$

$s \rightarrow j\omega$

matlab, Octave, Python

ruční



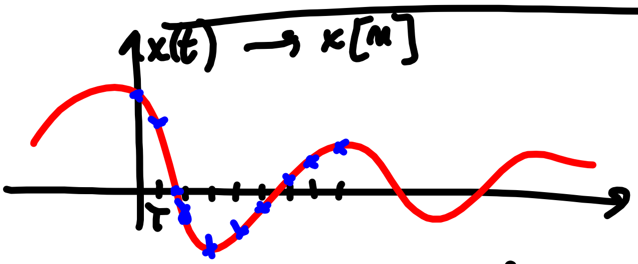
Stabilita

$Re(p_i) < 0$

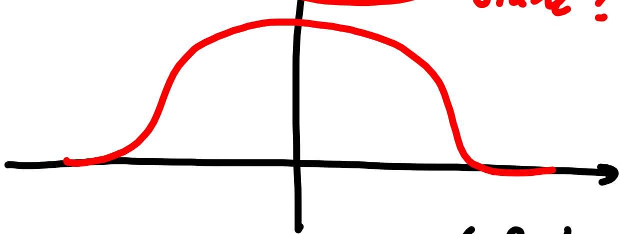
VZORKOVÁNÍ

A/D převod

$x(t) \rightarrow x[n]$



$X(j\omega)$ co se s ní stane?



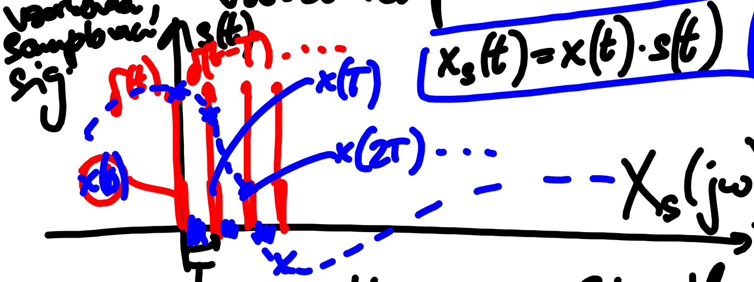
T vzorkovací perioda

vzorkovací, samplovací sig.

$\boxed{x_s(t) = x(t)\cdot s(t)}$

$F = \frac{1}{T}$ vzork. frekv.

$\Omega = 2\pi F$ kruhová vzork. f.



$X_s(j\omega) = X(j\omega) * S(j\omega)$

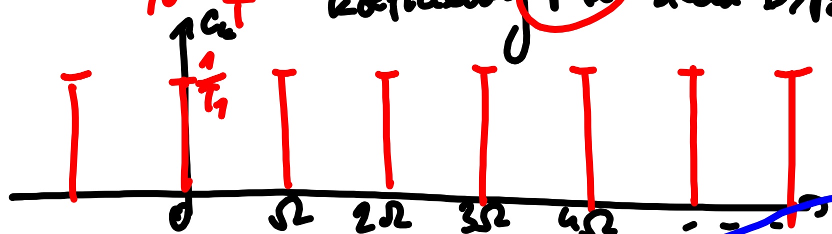
Potřebujeme spektrum vz. signálu s(t) ← periodický F.Ř.

$c_k = \frac{D\cdot\vartheta}{T_1}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\Omega\right) = \frac{1}{T_1}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\Omega\right)$

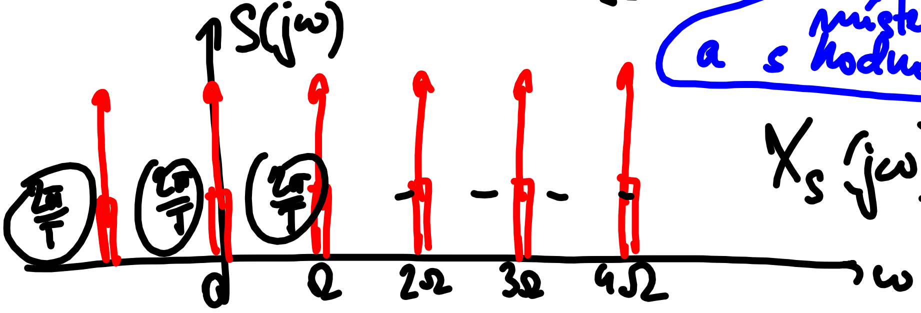
$\vartheta \rightarrow 0$

$= \frac{1}{T_1}\,\mathrm{sinc}(0) = \frac{1}{T_1}$

koeficienty F.Ř. sledu Diracových impulsů



$c_k \rightarrow$ spek. funkce s Diracovými impulsy na místech, kde jsou c_k a s hodnotami $2\pi c_k$



$X_s(j\omega) = X(j\omega) * S(j\omega)$