Grafové algoritmy

Tomáš Masopust

Aktualizováno: 29. listopadu 2009

Obsah

Literatura

- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: *Introduction to algorithms.* The MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- Gibbons: *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge University Press, 1985.

Literatura

- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: *Introduction to algorithms.* The MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- Gibbons: *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge University Press, 1985.

Organizace výuky

- přednášky
- konzultace – viz stránky vyučujícího
- písemné vypracování zadaných úkolů

Literatura

- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: *Introduction to algorithms.* The MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- Gibbons: *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge University Press, 1985.

Organizace výuky

- přednášky
- konzultace – viz stránky vyučujícího
- písemné vypracování zadaných úkolů

Více k úkolům

- rozdělení do 10 až 12 skupin
- prezentace řešení na začátku určené přednášky, čas max. 1 hodina
- důraz na elegantní a originální řešení

Úvod

Základní pojmy

- Neformálně, algoritmus je dobře definovaná výpočetní procedura, která přijímá nějaké hodnoty (množinu hodnot) jako vstup a produkuje nějakou hodnotu (množinu hodnot) jako výstup.
- Algoritmus je tedy posloupnost výpočetních kroků, které transformují vstup na výstup.
- Datová struktura je způsob jak uložit a organizovat data tak, aby k nim bylo co nejvíce ulehčeno přistupování a modifikování.

Požadavky kladené na algoritmy

- Algoritmus skončí pro každý (správně zadaný) vstup.
- Výstup algoritmu je korektní.

- Čas ani paměť nejsou neomezeny.
- Existuje mnoho řešení určitého problému, ty se však dramaticky liší svojí efektivností.
- Velký důraz kladen na časovou a prostorovou efektivnost.

Složitost algoritmu

Časová složitost algoritmu:

- Maximální počet “primitivních” kroků vykonaných daným algoritmem nad všemi vstupy stejné “velikost”, tj. počet kroků v nejhorším případě.
- Popsána funkcí závislou na velikosti vstupu, $T(n)$.

Prostorová složitost algoritmu:

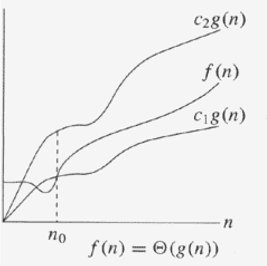
- Maximální velikost obsazené paměti během výpočtu algoritmu nad všemi vstupy stejné “velikosti”.
- Popsána funkcí závislou na velikosti vstupu, $S(n)$.

n může být obecně vektor hodnot.

Θ-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existují $c_0, c_1, n_0 > 0$ takové, že $0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$ pro $n \ge n_0\}$.



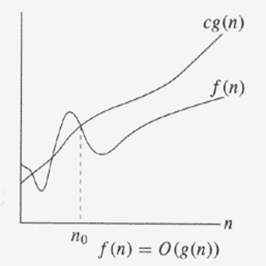
Obrázek: Θ-notace.

- Obvykle píšeme $f(n) = \Theta(g(n))$ místo $f(n) \in \Theta(g(n))$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ – ověřte pro $c_1 = \frac{1}{14}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 7$.

O-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $O(g(n)) = \{f(n) :$ existují $c, n_0 > 0$ takové, že
  $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ pro $n \geq n_0\}$.



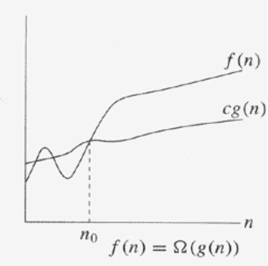
Obrázek: O-notace.

- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$.
- $n = O(n^2)$, ale $n \neq \Theta(n^2)$.

Ω-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existují $c, n_0 > 0$ takové, že
  $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ pro $n \geq n_0\}$.



Obrázek: Ω-notace.

Theorem 1.
Pro libovolné funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) = \Theta(g(n))$ právě když $f(n) = O(g(n))$ a $f(n) = \Omega(g(n))$.

o-notace a ω-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $o(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq f(n) < cg(n)$ pro $n \geq n_0\}$.

- $2n = o(n^2)$, ale $2n^2 \neq o(n^2)$.
- $f(n) = o(g(n))$ pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

o-notace a ω-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $o(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq f(n) < cg(n)$ pro $n \geq n_0\}$.
- $\omega(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq cg(n) < f(n)$ pro $n \geq n_0\}$.

- $2n = o(n^2)$, ale $2n^2 \neq o(n^2)$.
- $f(n) = o(g(n))$ pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

o-notace a ω-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $o(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq f(n) < cg(n)$ pro $n \geq n_0\}$.
- $\omega(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq cg(n) < f(n)$ pro $n \geq n_0\}$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$ právě když $g(n) \in o(f(n))$.

- $2n = o(n^2)$, ale $2n^2 \neq o(n^2)$.
- $f(n) = o(g(n))$ pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

- $n^2/2 = \omega(n)$, ale $n^2/2 \neq \omega(n^2)$.
- $f(n) = \omega(g(n))$ pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Vlastnosti

Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou (asymtoticky kladné) funkce.

- Tranzitivita
  $f(n) = X(g(n))$ a $g(n) = X(h(n))$ implikuje $f(n) = X(h(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega, o, \omega\}$.

Vlastnosti

Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou (asymtoticky kladné) funkce.

- Tranzitivita
  $f(n) = X(g(n))$ a $g(n) = X(h(n))$ implikuje $f(n) = X(h(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega, o, \omega\}$.
- Reflexivita
  $f(n) = X(f(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega\}$.

Vlastnosti

Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou (asymtoticky kladné) funkce.

- Tranzitivita
  $f(n) = X(g(n))$ a $g(n) = X(h(n))$ implikuje $f(n) = X(h(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega, o, \omega\}$.
- Reflexivita
  $f(n) = X(f(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega\}$.
- Symetrie
  $f(n) = \Theta(g(n))$ právě když $g(n) = \Theta(f(n))$.

Vlastnosti

Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou (asymtoticky kladné) funkce.

- Tranzitivita
  $f(n) = X(g(n))$ a $g(n) = X(h(n))$ implikuje $f(n) = X(h(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega, o, \omega\}$.
- Reflexivita
  $f(n) = X(f(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega\}$.
- Symetrie
  $f(n) = \Theta(g(n))$ právě když $g(n) = \Theta(f(n))$.
- Transponovaná symetrie
  $f(n) = O(g(n))$ právě když $g(n) = \Omega(f(n))$.
  $f(n) = o(g(n))$ právě když $g(n) = \omega(f(n))$.

Vlastnosti

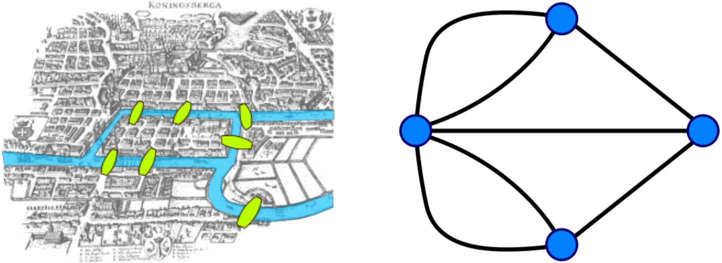
Nechť $f(n)$ a $g(n)$ jsou (asymtoticky kladné) funkce.

- Tranzitivita
  $f(n) = X(g(n))$ a $g(n) = X(h(n))$ implikuje $f(n) = X(h(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega, o, \omega\}$.
- Reflexivita
  $f(n) = X(f(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega\}$.
- Symetrie
  $f(n) = \Theta(g(n))$ právě když $g(n) = \Theta(f(n))$.
- Transponovaná symetrie
  $f(n) = O(g(n))$ právě když $g(n) = \Omega(f(n))$.
  $f(n) = o(g(n))$ právě když $g(n) = \omega(f(n))$.
- Ne vždy porovnatelné
  n a $n^{1+\sin(n)}$ jsou neporovnatelné.

Grafy

Grafy: Úvod, historie, definice

- Leonhard Euler, *Sedm mostů města Královce*, 1736.
- Otázka: Je možné přejít všechny mosty, ale každý pouze jednou?



Obrázek: Sedm mostů města Královce a jejich grafická reprezentace.

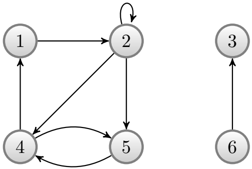
Orientovaný graf G je dvojice

$$G = (V, E),$$

kde

- V je konečná množina uzlů a
- $E \subseteq V^2$ je množina hran.

Hrana (u, u) se nazývá smyčka.
Pokud (u, v) je hrana, říkáme, že u a v jsou incidentní.



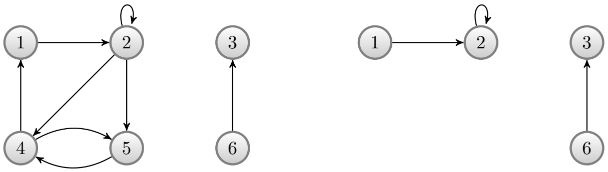
Obrázek: Orientovaný graf

Graf $G' = (V', E')$ je podgraf grafu $G = (V, E)$, jestliže

- $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Mějme $V'' \subseteq V$. Podgraf indukovaný V'' je graf $G'' = (V'', E'')$, kde

- $E'' = \{(u, v) \in E : u, v \in V''\}$.



Obrázek: Graf a jeho podgraf indukovaný množinou $\{1, 2, 3, 6\}$.

Neorientovaný graf G je dvojice

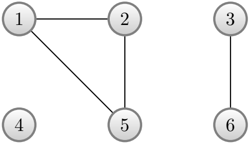
$$G = (V, E),$$

kde

- V je konečná množina uzlů a
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

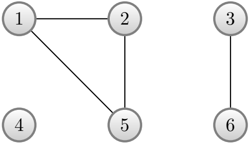
Poznámka

Hrana je množina $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$ a $u \neq v$. I v neorientovaném případě však budeme hrany značit (u, v) a považovat (u, v) a (v, u) za stejnou hranu. Smyčky nejsou povoleny.



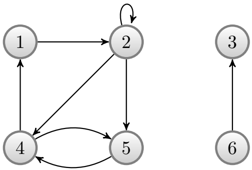
Obrázek: Neorientovaný graf

- Stupeň uzlu u v neorientovaném grafu je počet uzlů s ním incidentních, značí se $d(u)$.
- $d(1) = d(2) = d(5) = 2$, $d(3) = d(6) = 1$, $d(4) = 0$.
- Pokud $d(u) = 0$, nazývá se u izolovaný uzel.



Obrázek: Neorientovaný graf

- Výstupní stupeň uzlu u v orientovaném grafu je počet hran z něj vycházejících, značí se $d_-(u)$.
- Vstupní stupeň uzlu u je počet hran do něj vstupujících, značí se $d_+(u)$.
- Stupeň uzlu u je součet výstupního a vstupního stupně.
- $d_-(2) = 3$, $d_+(2) = 2$, $d(2) = 5$.



Obrázek: Orientovaný graf

- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.

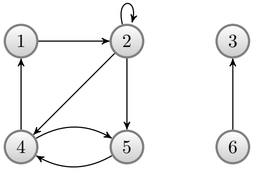
- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.
- Sled je tedy určen uzly $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a hranami (v_0, v_1), (v_1, v_2), $\ldots$, (v_{k-1}, v_k). Délka sledu je počet jeho hran.

- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.
- Sled je tedy určen uzly $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a hranami (v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, v_k). Délka sledu je počet jeho hran.
- Rovněž se připouští sled délky 0 z u do u, pro všechny uzly u.

- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.
- Sled je tedy určen uzly $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a hranami (v_0, v_1), (v_1, v_2), ..., (v_{k-1}, v_k). Délka sledu je počet jeho hran.
- Rovněž se připouští sled délky 0 z u do u, pro všechny uzly u.
- Pokud existuje sled s z u do u', říkáme, že u' je dosažitelný z u sledem s, značeno $u \overset{s}{\rightsquigarrow} u'$.

- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.
- Sled je tedy určen uzly $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a hranami (v_0, v_1), (v_1, v_2), $\ldots$, (v_{k-1}, v_k). Délka sledu je počet jeho hran.
- Rovněž se připouští sled délky 0 z u do u, pro všechny uzly u.
- Pokud existuje sled s z u do u', říkáme, že u' je dosažitelný z u sledem s, značeno $u \overset{s}{\rightsquigarrow} u'$.
- Tah je sled, ve kterém se neopakují hrany.

- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.
- Sled je tedy určen uzly $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a hranami (v_0, v_1), (v_1, v_2), …, (v_{k-1}, v_k). Délka sledu je počet jeho hran.
- Rovněž se připouští sled délky 0 z u do u, pro všechny uzly u.
- Pokud existuje sled s z u do u', říkáme, že u' je dosažitelný z u sledem s, značeno $u \overset{s}{\leadsto} u'$.
- Tah je sled, ve kterém se neopakují hrany.
- Cesta je sled, ve kterém se neopakují uzly.



- $\langle 1, 2, 5, 4 \rangle$ je cesta
- $\langle 2, 5, 4, 5 \rangle$ je sled, který není cestou (jde o tah?)

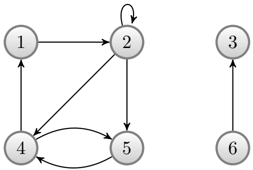
- Podsled (podtah,podcesta) sledu $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je podposloupnost sousedících uzlů, tj. $\langle v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j \rangle$, pro $0 \leq i \leq j \leq k$.

- Podsled (podtah,podcesta) sledu $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je podposloupnost sousedících uzlů, tj. $\langle v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j \rangle$, pro $0 \leq i \leq j \leq k$.

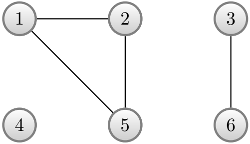
- Sled (tah, cesta) $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ se nazývá uzavřený, pokud obsahuje alespoň jednu hranu a $v_0 = v_k$.
- Pro neorientovaný graf je tedy $k \geq 3$.

- Podsled (podtah,podcesta) sledu $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je podposloupnost sousedících uzlů, tj. $\langle v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j \rangle$, pro $0 \leq i \leq j \leq k$.

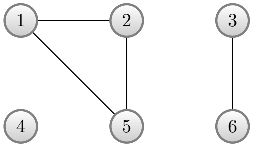
- Sled (tah, cesta) $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ se nazývá uzavřený, pokud obsahuje alespoň jednu hranu a $v_0 = v_k$.
- Pro neorientovaný graf je tedy $k \geq 3$.
- Uzavřená cesta se nazývá kružnice. Orientovaná kružnice se nazývá cyklus.



- $\langle 2, 2 \rangle$ je cyklus délky 1
- $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$ je cyklus
- $\langle 1, 2, 4, 5, 4, 1 \rangle$ je ale uzavřený sled, který není cyklus

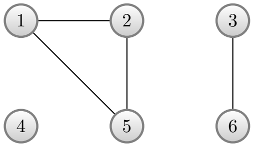


- $\langle 1, 2, 5, 1 \rangle$ je kružnice
- $\langle 3, 6, 3 \rangle$ není kružnice



- $\langle 1, 2, 5, 1 \rangle$ je kružnice
- $\langle 3, 6, 3 \rangle$ není kružnice

- Orientovaný graf se nazývá prostý, pokud neobsahuje smyčky.



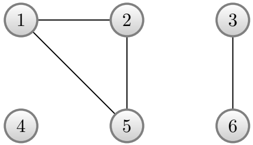
- $\langle 1, 2, 5, 1 \rangle$ je kružnice
- $\langle 3, 6, 3 \rangle$ není kružnice

- Orientovaný graf se nazývá prostý, pokud neobsahuje smyčky.
- Graf bez cyklů (kružnic) se nazývá acyklický.

- Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje cesta.

- Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje cesta.
- Souvislé komponenty grafu jsou třídy ekvivalence množiny uzlů podle relace “je dosažitelný z”.

- Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje cesta.
- Souvislé komponenty grafu jsou třídy ekvivalence množiny uzlů podle relace “je dosažitelný z”.



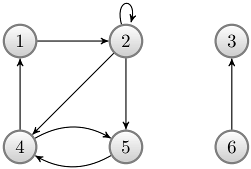
Graf má tři souvislé komponenty:

- $\{1,2,5\}$
- $\{3,6\}$
- $\{4\}$

- Orientovaný graf se nazývá silně souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje orientovaná cesta.

- Orientovaný graf se nazývá silně souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje orientovaná cesta.
- Silně souvislé komponenty grafu jsou třídy ekvivalence množiny uzlů podle relace "jsou vzájemně dosažitelné".

- Orientovaný graf se nazývá silně souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje orientovaná cesta.
- Silně souvislé komponenty grafu jsou třídy ekvivalence množiny uzlů podle relace “jsou vzájemně dosažitelné”.



Graf má tři silně souvislé komponenty:

- $\{1, 2, 4, 5\}$
- $\{3\}$
- $\{6\}$

Reprezentace grafů

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Zavedeme následující značení:

- $n = |V|$
- $m = |E|$.

1. Seznam sousedů
   - preferovaná reprezentace,
   - výhodnější zejména pro řídké grafy, tj. takové grafy, kde $m \ll n^2$,
   - většina dále uvedených algoritmů používá právě tuto reprezentaci.

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Zavedeme následující značení:

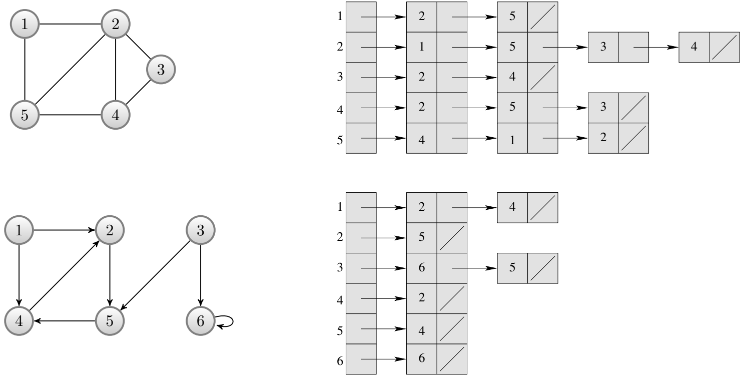
- $n = |V|$
- $m = |E|$.

1. Seznam sousedů
   - preferovaná reprezentace,
   - výhodnější zejména pro řídké grafy, tj. takové grafy, kde $m \ll n^2$,
   - většina dále uvedených algoritmů používá právě tuto reprezentaci.
2. Matice sousednosti
   - může být výhodnější pro husté grafy, tj. ty, kde m je skoro n^2
   - nebo když potřebujeme rychle rozhodnout, zda graf obsahuje hranu spojující dva dané uzly.

Seznam sousedů

Seznam sousedů grafu $G = (V, E)$ sestává z

- pole $Adj[1 \ldots n]$ mající n seznamů, jeden pro každý uzel z V,
- kde $Adj[u]$ obsahuje všechny uzly v takové, že $(u, v) \in E$.



- Pokud G je orientovaný graf, pak součet délek seznamů seznamu sousedů je m, protože každá hrana tvaru (u, v) je reprezentována v vyskytujícím se v $Adj[u]$.
- Pokud G je neorientovaný graf, pak součet délek seznamů seznamu sousedů je $2m$, protože každá hrana (u, v) je reprezentována v vyskytujícím se v $Adj[u]$ a u vyskytujícím se v $Adj[v]$.
- Množství obsazené paměti je v obou případech stejná, $\Theta(m + n)$.

Ohodnocený graf

- Ohodnocený graf je takový graf, kde každá jeho hrana má přiřazenu nějakou hodnotu, typicky danou váhovou funkcí $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Ohodnocený graf

- Ohodnocený graf je takový graf, kde každá jeho hrana má přiřazenu nějakou hodnotu, typicky danou váhovou funkcí $w : E \rightarrow \mathbb{R}$.
- Seznam sousedů se snadno rozšíří pro ohodnocené grafy tak, že hodnota $w(u, v)$ je uložena s uzlem v v seznamu $Adj[u]$.

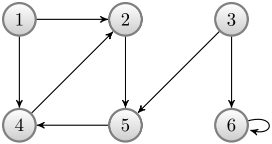
Ohodnocený graf

- Ohodnocený graf je takový graf, kde každá jeho hrana má přiřazenu nějakou hodnotu, typicky danou váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$.
- Seznam sousedů se snadno rozšíří pro ohodnocené grafy tak, že hodnota $w(u, v)$ je uložena s uzlem v v seznamu $Adj[u]$.
- Nevýhoda: zjistit, zda je hrana (u, v) přítomná v grafu znamená hledat v v celém seznamu $Adj[u]$.

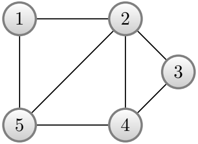
Matice sousednosti

Nechť $G = (V, E)$ je graf a předpokládejme, že uzly jsou nějak očíslovány čísly $1, 2, \ldots, n$. Matice sousednosti $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n taková, že

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

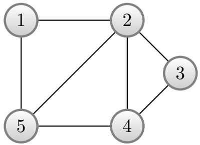


	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1



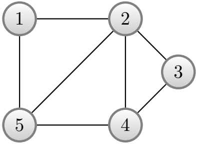
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Množství obsazené paměti je bez ohledu na počtu hran $\Theta(n^2)$.
- Lepší nebo horší?



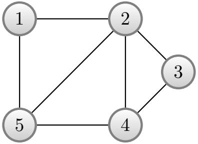
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Množství obsazené paměti je bez ohledu na počtu hran $\Theta(n^2)$.
- Lepší nebo horší?
- Transponovaná matice k $A = (a_{ij})$ je matice $A^T = (a^T_{ij})$, kde $a^T_{ij} = a_{ji}$.



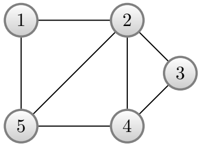
	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Množství obsazené paměti je bez ohledu na počtu hran $\Theta(n^2)$.
- Lepší nebo horší?
- Transponovaná matice k $A = (a_{ij})$ je matice $A^T = (a_{ij}^T)$, kde $a_{ij}^T = a_{ji}$.
- Pro matici sousednosti A neorientovaného grafu platí $A = A^T$.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Množství obsazené paměti je bez ohledu na počtu hran $\Theta(n^2)$.
- Lepší nebo horší?
- Transponovaná matice k $A = (a_{ij})$ je matice $A^T = (a_{ij}^T)$, kde $a_{ij}^T = a_{ji}$.
- Pro matici sousednosti A neorientovaného grafu platí $A = A^T$.
- Stačí tedy uložit do paměti pouze část matice nad diagonálou.



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Množství obsazené paměti je bez ohledu na počtu hran $\Theta(n^2)$.
- Lepší nebo horší?
- Transponovaná matice k $A = (a_{ij})$ je matice $A^T = (a_{ij}^T)$, kde $a_{ij}^T = a_{ji}$.
- Pro matici sousednosti A neorientovaného grafu platí $A = A^T$.
- Stačí tedy uložit do paměti pouze část matice nad diagonálou.
- Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený graf, pak

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{pokud } (i,j) \in E, \\ NIL & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde NIL je nějaká unikátní hodnota, většinou 0 či ∞.

Prohledávání do šířky

Prohledávání do šířky (BFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$ a uzel $s \in V$.

Prohledávání do šířky (BFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$ a uzel $s \in V$.
- Prochází všechny uzly dostupné z s a počítá jejich vzdálenost (počet hran) od s.

Prohledávání do šířky (BFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$ a uzel $s \in V$.
- Prochází všechny uzly dostupné z s a počítá jejich vzdálenost (počet hran) od s.
- Vytváří strom prohledávání do šířky s kořenem s obsahující všechny uzly dosažitelné z s. Cesta z s do v je nejkratší cestou v grafu.

Prohledávání do šířky (BFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$ a uzel $s \in V$.
- Prochází všechny uzly dostupné z s a počítá jejich vzdálenost (počet hran) od s.
- Vytváří strom prohledávání do šířky s kořenem s obsahující všechny uzly dosažitelné z s. Cesta z s do v je nejkratší cestou v grafu.
- Při procházení grafu obarvuje uzly bílou, šedou a černou barvou.

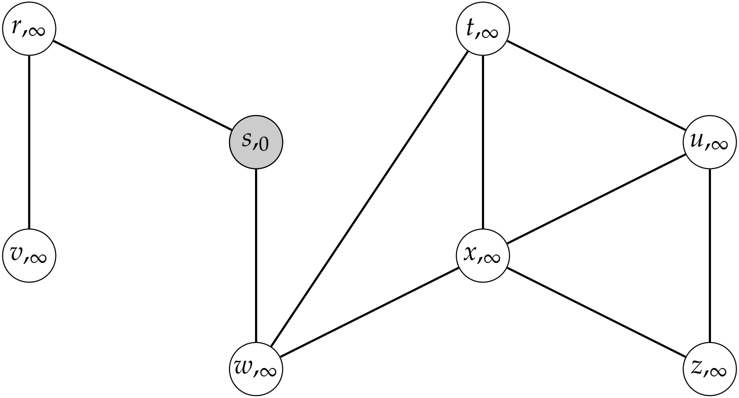
Prohledávání do šířky (BFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$ a uzel $s \in V$.
- Prochází všechny uzly dostupné z s a počítá jejich vzdálenost (počet hran) od s.
- Vytváří strom prohledávání do šířky s kořenem s obsahující všechny uzly dosažitelné z s. Cesta z s do v je nejkratší cestou v grafu.
- Při procházení grafu obarvuje uzly bílou, šedou a černou barvou.

- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{$WHITE, GRAY, BLACK$\}$.
- $\pi[u]$ je předchůdce u na cestě z s.
- $d[u]$ je zdálenost u od s (počet hran, dále bude rozšířeno na ohodnocené grafy).

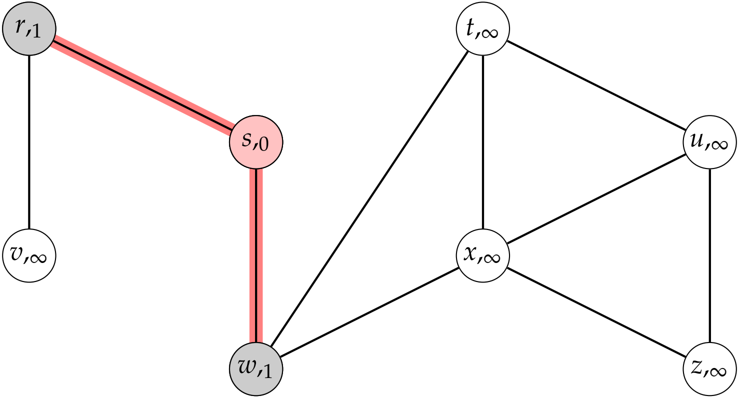
```
Bfs(G, s)
for každý uzel u ∈ V − {s}
    do color[u] ← WHITE
       d[u] ← ∞
       π[u] ← NIL
color[s] ← GRAY
d[s] ← 0
π[s] ← NIL
Q ← ∅
Enqueue(Q, s)
while Q ≠ ∅
    do u ← Dequeue(Q)
       for každý v ∈ Adj[u]
           do if color[v] = WHITE
                 then color[v] ← GRAY
                      d[v] ← d[u] + 1
                      π[v] ← u
                      Enqueue(Q, v)
       color[u] ← BLACK
```

BFS – příklad



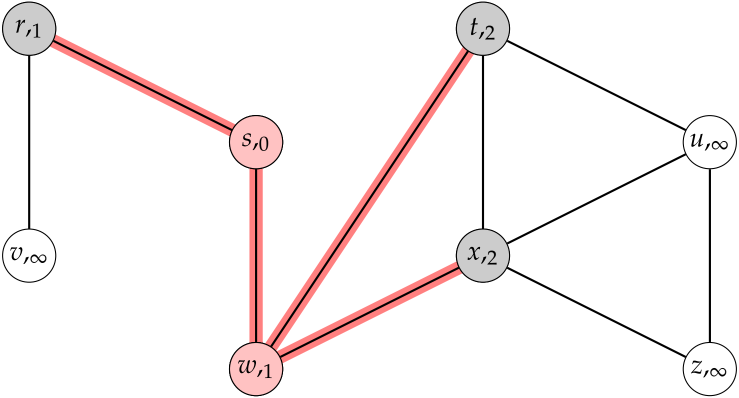
$Q = s$

BFS – příklad



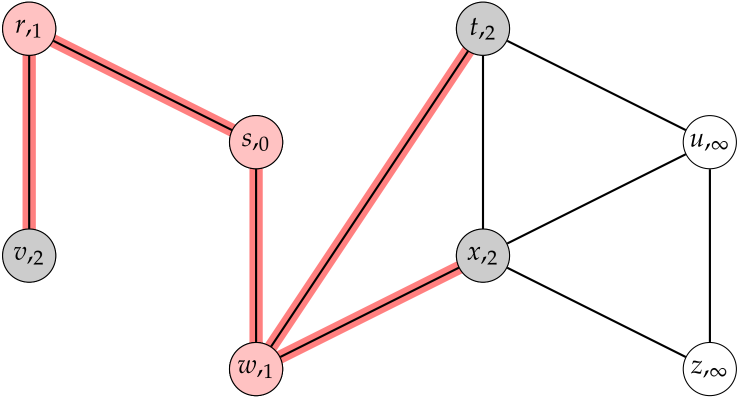
$$Q = wr$$

BFS – příklad



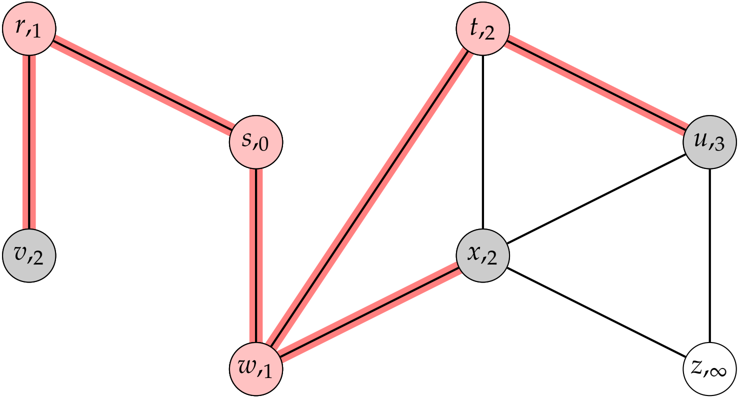
$$Q = rtx$$

BFS – příklad



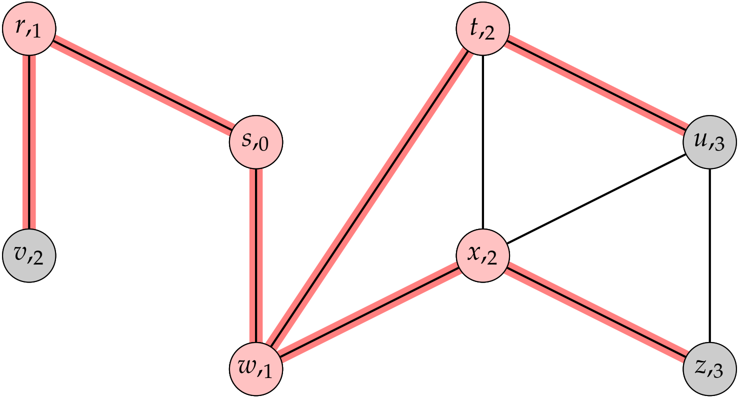
$Q = txv$

BFS – příklad



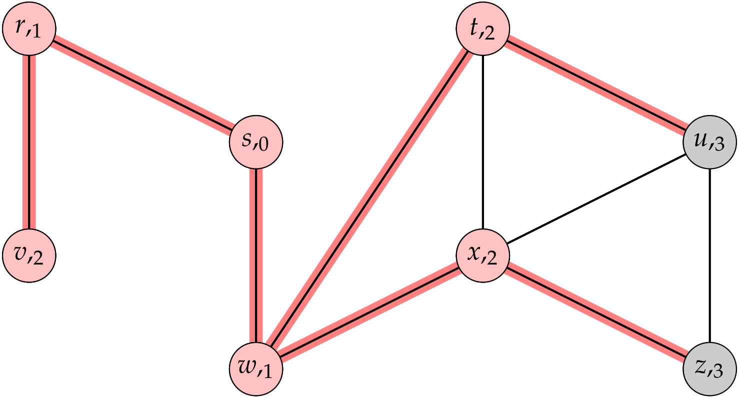
$$Q = xvu$$

BFS – příklad



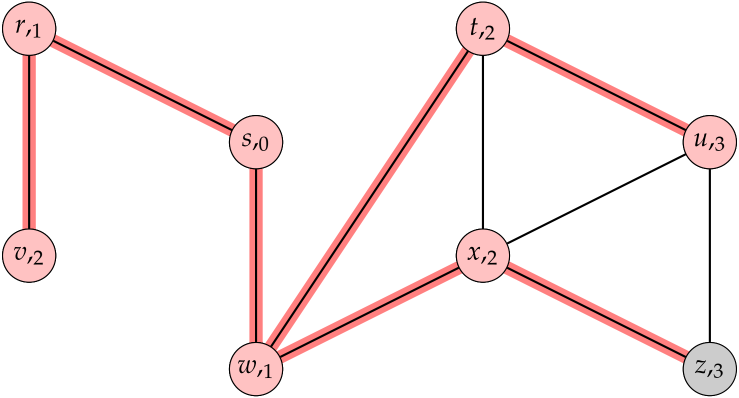
$$Q = vuz$$

BFS – příklad



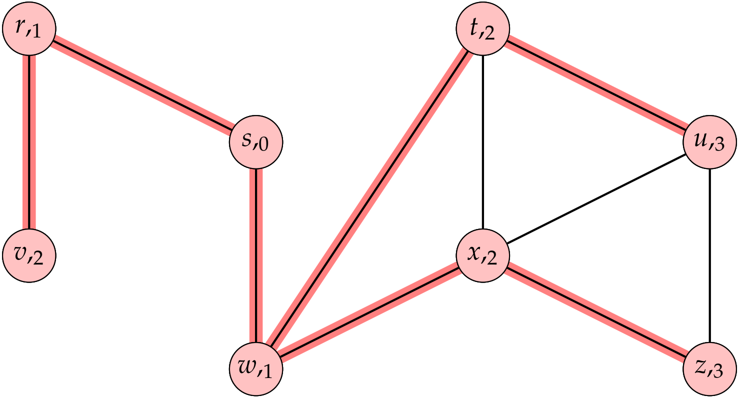
$$Q = uz$$

BFS – příklad



$$Q = z$$

BFS – příklad



$Q =$

Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.

Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.
- Řádek 13 proto zaručuje, že každý uzel bude zařazen do fronty (a následně vybrán z fronty) nejvýše jednou.

Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.
- Řádek 13 proto zaručuje, že každý uzel bude zařazen do fronty (a následně vybrán z fronty) nejvýše jednou.
- Operace vkládání a vybírání prvku z fronty je konstantní, tj. $O(1)$, takže celkový čas na operace fronty je $O(n)$.

Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.
- Řádek 13 proto zaručuje, že každý uzel bude zařazen do fronty (a následně vybrán z fronty) nejvýše jednou.
- Operace vkládání a vybírání prvku z fronty je konstantní, tj. $O(1)$, takže celkový čas na operace fronty je $O(n)$.
- Protože se seznam sousedů daného uzlu prochází pouze při jeho vybrání z fronty, je seznam skenován nejvýše jednou.

Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.
- Řádek 13 proto zaručuje, že každý uzel bude zařazen do fronty (a následně vybrán z fronty) nejvýše jednou.
- Operace vkládání a vybírání prvku z fronty je konstantní, tj. $O(1)$, takže celkový čas na operace fronty je $O(n)$.
- Protože se seznam sousedů daného uzlu prochází pouze při jeho vybrání z fronty, je seznam skenován nejvýše jednou.
- Jelikož je suma délek těchto seznamů rovna $\Theta(m)$, je celkový čas skenování seznamu sousedů $O(m)$.

Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.
- Řádek 13 proto zaručuje, že každý uzel bude zařazen do fronty (a následně vybrán z fronty) nejvýše jednou.
- Operace vkládání a vybírání prvku z fronty je konstantní, tj. $O(1)$, takže celkový čas na operace fronty je $O(n)$.
- Protože se seznam sousedů daného uzlu prochází pouze při jeho vybrání z fronty, je seznam skenován nejvýše jednou.
- Jelikož je suma délek těchto seznamů rovna $\Theta(m)$, je celkový čas skenování seznamu sousedů $O(m)$.
- Inicializace zabere čas $O(n)$, proto je celkový čas algoritmu $O(m+n)$, tj. lineární vzhledem k velikosti reprezentace grafu G.

Nejkratší cesty

- Jak již bylo řečeno, BFS rovněž určí vzdálenost všech uzlů od daného vstupního uzlu s.

Nejkratší cesty

- Jak již bylo řečeno, BFS rovněž určí vzdálenost všech uzlů od daného vstupního uzlu s.
- Definujme nejkratší vzdálenost $\delta(s, v)$ z s do v jako minimální počet hran na jakékoliv cestě z s do v. Pokud cesta neexistuje, je $\delta(s, v) = \infty$.

Nejkratší cesty

- Jak již bylo řečeno, BFS rovněž určí vzdálenost všech uzlů od daného vstupního uzlu s.
- Definujme nejkratší vzdálenost $\delta(s,v)$ z s do v jako minimální počet hran na jakékoliv cestě z s do v. Pokud cesta neexistuje, je $\delta(s,v) = \infty$.
- Cesta délky $\delta(s,v)$ z s do v je nejkratší cesta z s do v.

Lemma 2.

Nechť $G = (V,E)$ *je orientovaný či neorientovaný graf a nechť* $s \in V$ *je libovolný uzel. Pak pro každou hranu* $(u,v) \in E$ *platí, že*

$$\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + 1\,.$$

Důkaz.

- Pokud je uzel u dosažitelný z s, pak je rovněž uzel v dosažitelný z s. To ale znamená, že nejkratší cesta z s do v nemůže být delší než nejkratší cesta z s do u následovaná hranou (u,v). Nerovnost tedy platí.

□

Lemma 2.

Nechť $G = (V,E)$ je orientovaný či neorientovaný graf a nechť $s \in V$ je libovolný uzel. Pak pro každou hranu $(u,v) \in E$ platí, že

$$\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + 1\,.$$

Důkaz.

- Pokud je uzel u dosažitelný z s, pak je rovněž uzel v dosažitelný z s. To ale znamená, že nejkratší cesta z s do v nemůže být delší než nejkratší cesta z s do u následovaná hranou (u,v). Nerovnost tedy platí.
- Pokud uzel u není dosažitelný z s, pak $\delta(s,u) = \infty$ a nerovnost opět platí.

$\square$

Lemma 3.

Nechť $G = (V, E)$ *je orientovaný či neorientovaný graf a přepokládejme, že BFS je spuštěno na* G *z uzlu* $s \in V$*. Pak po ukončení BFS platí, že* $d[v] \geq \delta(s, v)$ *pro každé* $v \in V$*.*

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu ENQUEUE operací. IP je $d[v] \geq \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$.

Lemma 3.

Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný či neorientovaný graf a přepokládejme, že BFS je spuštěno na G z uzlu $s \in V$. Pak po ukončení BFS platí, že $d[v] \geq \delta(s, v)$ pro každé $v \in V$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu $\textsc{Enqueue}$ operací. IP je $d[v] \geq \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$.
- Báze: $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ a $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$, $v \in V - \{s\}$.

Lemma 3.

Nechť $G = (V, E)$ *je orientovaný či neorientovaný graf a přepokládejme, že BFS je spuštěno na* G *z uzlu* $s \in V$. *Pak po ukončení BFS platí, že* $d[v] \geq \delta(s, v)$ *pro každé* $v \in V$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu ENQUEUE operací. IP je $d[v] \geq \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$.
- Báze: $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ a $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$, $v \in V - \{s\}$.
- Nechť v je bílý uzel prozkoumaný během prohledávání z u. Z IP máme $d[u] \geq \delta(s, u)$. Z řádku 15 BFS, IP a předchozího lemmatu máme

$$d[v] = d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v) .$$

  Uzel v je poté vložen do fronty a už nikdy není vložen znovu do fronty, protože je šedý a řádky 14–17 se vykonávají pouze pro bílé uzly, tj. hodnota $d[v]$ se již nezmění.

Lemma 4.
Nechť během provádění BFS na grafu $G = (V,E)$ obsahuje fronta Q uzly $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, kde v_1 je první prvek Q a v_r je poslední prvek Q. Pak $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ a $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$ pro $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu operací fronty. Na počátku je $Q = \langle s \rangle$ a tvrzení platí. Tvrzení platí po obou frontových operacích:

$\square$

Lemma 4.

Nechť během provádění BFS na grafu $G = (V, E)$ obsahuje fronta Q uzly $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, kde v_1 je první prvek Q a v_r je poslední prvek Q. Pak $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ a $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$ pro $i = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu operací fronty. Na počátku je $Q = \langle s \rangle$ a tvrzení platí. Tvrzení platí po obou frontových operacích:
- v_1 odebráno, pak v_2 nový první prvek (pokud se fronta vyprázdní, tvrzení platí triviálně). Z IP máme $d[v_1] \leq d[v_2]$. Pak ale $d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$, zbytek nerovností je nezměněn.

$\square$

Lemma 4.

Nechť během provádění BFS na grafu $G = (V, E)$ obsahuje fronta Q uzly $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, kde v_1 je první prvek Q a v_r je poslední prvek Q. Pak $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ a $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$ pro $i = 1, 2, \ldots, r - 1$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu operací fronty. Na počátku je $Q = \langle s \rangle$ a tvrzení platí. Tvrzení platí po obou frontových operacích:
- v_1 odebráno, pak v_2 nový první prvek (pokud se fronta vyprázdní, trvzení platí triviálně). Z IP máme $d[v_1] \leq d[v_2]$. Pak ale $d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$, zbytek nerovností je nezměněn.
- v_{r+1} vloženo do Q (řádek 17). V tu dobu je již z Q vyjmut uzel u, jehož seznam se prochází. Z IP máme $d[u] \leq d[v_1]$. Tedy, $d[v_{r+1}] = d[u] + 1 \leq d[v_1] + 1$. Proto $d[v_r] \leq_{IP} d[u] + 1 = d[v_{r+1}]$. Zbytek nerovností je nezměněn.

$\square$

Corollary 5.

Nechť uzly v_i a v_j jsou vloženy do fronty během provádění BFS a že v_i je vloženo před v_j. Pak $d[v_i] \leq d[v_j]$ v okamžiku vložení v_j do fronty.

Důkaz.

Z předchozího lemmatu a vlastnosti, že každý uzel obdrží konečnou hodnotu d nejvýše jednou během výpočtu. □

Theorem 6 (Korektnost algoritmu BFS).

Nechť $G = (V,E)$ *je (ne)orientovaný graf a* $s \in V$. *Pak* $BFS(G,s)$ *prozkoumá všechny uzly* $v \in V$ *dosažitelné z* s *a po ukončení platí, že* $d[v] = \delta(s,v)$ *pro všechna* $v \in V$. *Pro každý uzel* $v \neq s$ *dosažitelný z* s *navíc platí, že jedna z nejkratších cest z* s *do* v *je nejkratší cesta z* s *do* $\pi[v]$ *následovaná hranou* $(\pi[v],v)$.

Důkaz

- Sporem. Nechť v je uzel s minimální $\delta(s,v)$ takový, že $d[v] \neq \delta(s,v)$. Zřejmě $v \neq s$.

Theorem 6 (Korektnost algoritmu BFS).

Nechť $G = (V, E)$ je (ne)orientovaný graf a $s \in V$. Pak $BFS(G, s)$ prozkoumá všechny uzly $v \in V$ dosažitelné z s a po ukončení platí, že $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Pro každý uzel $v \neq s$ dosažitelný z s navíc platí, že jedna z nejkratších cest z s do v je nejkratší cesta z s do $\pi[v]$ následovaná hranou $(\pi[v], v)$.

Důkaz

- Sporem. Nechť v je uzel s minimální $\delta(s, v)$ takový, že $d[v] \neq \delta(s, v)$. Zřejmě $v \neq s$.
- Lemma 3 říká, že $d[v] \geq \delta(s, v)$, proto $d[v] > \delta(s, v)$. Navíc, v musí být dosažitelný z s, protože jinak je $\delta(s, v) = \infty \geq d[v]$.

Theorem 6 (Korektnost algoritmu BFS).

Nechť $G = (V, E)$ je (ne)orientovaný graf a $s \in V$. Pak $BFS(G, s)$ prozkoumá všechny uzly $v \in V$ dosažitelné z s a po ukončení platí, že $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Pro každý uzel $v \neq s$ dosažitelný z s navíc platí, že jedna z nejkratších cest z s do v je nejkratší cesta z s do $\pi[v]$ následovaná hranou $(\pi[v], v)$.

Důkaz

- Sporem. Nechť v je uzel s minimální $\delta(s, v)$ takový, že $d[v] \neq \delta(s, v)$. Zřejmě $v \neq s$.
- Lemma 3 říká, že $d[v] \geq \delta(s, v)$, proto $d[v] > \delta(s, v)$. Navíc, v musí být dosažitelný z s, protože jinak je $\delta(s, v) = \infty \geq d[v]$.
- Nechť u je uzel bezprostředně předcházející v na nejkratší cestě z s do v, tj. $\delta(s, v) = \delta(s, u) + 1$. Protože $\delta(s, u) < \delta(s, v)$ a vzhledem k volbě v, platí $d[u] = \delta(s, u)$.

Theorem 6 (Korektnost algoritmu BFS).

Nechť $G = (V, E)$ je (ne)orientovaný graf a $s \in V$. Pak $BFS(G, s)$ prozkoumá všechny uzly $v \in V$ dosažitelné z s a po ukončení platí, že $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Pro každý uzel $v \neq s$ dosažitelný z s navíc platí, že jedna z nejkratších cest z s do v je nejkratší cesta z s do $\pi[v]$ následovaná hranou $(\pi[v], v)$.

Důkaz

- Sporem. Nechť v je uzel s minimální $\delta(s, v)$ takový, že $d[v] \neq \delta(s, v)$. Zřejmě $v \neq s$.
- Lemma 3 říká, že $d[v] \geq \delta(s, v)$, proto $d[v] > \delta(s, v)$. Navíc, v musí být dosažitelný z s, protože jinak je $\delta(s, v) = \infty \geq d[v]$.
- Nechť u je uzel bezprostředně předcházející v na nejkratší cestě z s do v, tj. $\delta(s, v) = \delta(s, u) + 1$. Protože $\delta(s, u) < \delta(s, v)$ a vzhledem k volbě v, platí $d[u] = \delta(s, u)$.
- Celkem tedy $d[v] > \delta(s, v) = \delta(s, u) + 1 = d[u] + 1$.

Důkaz(pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.

Důkaz(pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.
- v je bílý, pak řádek 15 nastavuje $d[v] = d[u] + 1$ – spor.

Důkaz(pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.
- v je bílý, pak řádek 15 nastavuje $d[v] = d[u] + 1$ – spor.
- v je černý, pak v již bylo vybráno z Q a podle Důsledku 5 je $d[v] \leq d[u]$ – spor.

Důkaz(pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.
- v je bílý, pak řádek 15 nastavuje $d[v] = d[u] + 1$ – spor.
- v je černý, pak v již bylo vybráno z Q a podle Důsledku 5 je $d[v] \leq d[u]$ – spor.
- v je šedý, pak v bylo obarveno při výběru nějakého uzlu w, jenž byl vybrán z Q dříve než u. Navíc, $d[v] = d[w] + 1$. Podle Důsledku 5 je $d[w] \leq d[u]$, tj. $d[v] \leq d[u] + 1$ – spor.

Důkaz(pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.
- v je bílý, pak řádek 15 nastavuje $d[v] = d[u] + 1$ – spor.
- v je černý, pak v již bylo vybráno z Q a podle Důsledku 5 je $d[v] \leq d[u]$ – spor.
- v je šedý, pak v bylo obarveno při výběru nějakého uzlu w, jenž byl vybrán z Q dříve než u. Navíc, $d[v] = d[w] + 1$. Podle Důsledku 5 je $d[w] \leq d[u]$, tj. $d[v] \leq d[u] + 1$ – spor.
- Tedy $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Navíc, všechny uzly dosažitelné z s musí být prozkoumány, protože jinak je jejich d hodnota nekonečno.

Důkaz(pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.
- v je bílý, pak řádek 15 nastavuje $d[v] = d[u] + 1$ – spor.
- v je černý, pak v již bylo vybráno z Q a podle Důsledku 5 je $d[v] \leq d[u]$ – spor.
- v je šedý, pak v bylo obarveno při výběru nějakého uzlu w, jenž byl vybrán z Q dříve než u. Navíc, $d[v] = d[w] + 1$. Podle Důsledku 5 je $d[w] \leq d[u]$, tj. $d[v] \leq d[u] + 1$ – spor.
- Tedy $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Navíc, všechny uzly dosažitelné z s musí být prozkoumány, protože jinak je jejich d hodnota nekonečno.
- Konečně, všimněme si, že když $\pi[v] = u$, pak $d[v] = d[u] + 1$, tj. nejkratší cestu z s do v můžeme získat přidáním hrany $(\pi[v], v)$ k nejkratší cestě z s do $\pi[v]$.

□

Strom prohledávání do šířky (BFS strom)

- Nechť π je pole předchůdců vypočtené procedurou $BFS(G,s)$ na nějakém grafu $G = (V,E)$ a uzlu $s \in V$.

Strom prohledávání do šířky (BFS strom)

- Nechť π je pole předchůdců vypočtené procedurou $BFS(G, s)$ na nějakém grafu $G = (V, E)$ a uzlu $s \in V$.
- Podgraf předchůdců grafu G je graf $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$, kde
- $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq NIL\} \cup \{s\}$ a
- $E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V_\pi - \{s\}\}$.

Strom prohledávání do šířky (BFS strom)

- Nechť π je pole předchůdců vypočtené procedurou $BFS(G,s)$ na nějakém grafu $G = (V, E)$ a uzlu $s \in V$.
- Podgraf předchůdců grafu G je graf $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$, kde
- $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq NIL\} \cup \{s\}$ a
- $E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V_\pi - \{s\}\}$.
- Graf G_π je BFS strom, pokud V_π obsahuje pouze uzly dosažitelné z s a pro všechna $v \in V_\pi$ existuje pouze jediná cesta z s do v, která je zároveň nejkratší cestou.
- BFS strom je strom, neboť platí, že $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$.

Lemma 7.
Nechť G je orientovaný či neorientovaný graf. Procedura BFS konstruuje π tak, že G_π je BFS strom.

Důkaz.

- Řádek 16 BFS nastavuje $\pi[v] = u$ právě když $(u, v) \in E$ a $\delta(s, v) < \infty$.

Lemma 7.
Nechť G je orientovaný či neorientovaný graf. Procedura BFS konstruuje π tak, že G_π je BFS strom.

Důkaz.

- Řádek 16 BFS nastavuje $\pi[v] = u$ právě když $(u, v) \in E$ a $\delta(s, v) < \infty$.
- V_π tedy obsahuje pouze uzly dosažitelné z s.

Lemma 7.

Nechť G je orientovaný či neorientovaný graf. Procedura BFS konstruuje π tak, že G_π je BFS strom.

Důkaz.

- Řádek 16 BFS nastavuje $\pi[v] = u$ právě když $(u, v) \in E$ a $\delta(s, v) < \infty$.
- V_π tedy obsahuje pouze uzly dosažitelné z s.
- Protože G_π je strom, obsahuje pouze jednu cestu z s do každého z ostatních uzlů.

Lemma 7.

Nechť G je orientovaný či neorientovaný graf. Procedura BFS konstruuje π tak, že G_π je BFS strom.

Důkaz.

- Řádek 16 BFS nastavuje $\pi[v] = u$ právě když $(u, v) \in E$ a $\delta(s, v) < \infty$.
- V_π tedy obsahuje pouze uzly dosažitelné z s.
- Protože G_π je strom, obsahuje pouze jednu cestu z s do každého z ostatních uzlů.
- Induktivní aplikací Teorému 6 dostáváme, že každá tato cesta je nejkratší.

$\square$

Tisk nejkratší cesty z s do v

```
PRINT-PATH(G, s, v)
if v = s
   then print s
   else if π[v] = NIL
           then print "Cesta z" s "do" v "neexistuje!"
           else PRINT-PATH(G, s, π[v])
                print v
```

Složitost $O(n)$.

Prohledávání do hloubky

Prohledávání do hloubky (DFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$.

Prohledávání do hloubky (DFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$.
- Na rozdíl od BFS prochází DFS všechny uzly.
- Při procházení grafu obarvuje uzly bílou, šedou a černou barvou.
- Používá pole předchůdců π.

Prohledávání do hloubky (DFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$.
- Na rozdíl od BFS prochází DFS všechny uzly.
- Při procházení grafu obarvuje uzly bílou, šedou a černou barvou.
- Používá pole předchůdců π.
- Vytváří les prohledávání do hloubky obsahující všechny uzly grafu, který je definován takto: $G_\pi = (V, E_\pi)$, kde

$$E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V,\ \pi[v] \neq \mathit{NIL}\}.$$

- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{$WHITE, GRAY, BLACK$\}$.
- $d[u]$ je časová známka prvního prozkoumání uzlu (obarvení na šedo).
- $f[u]$ je časová známka dokončení prozkoumávání seznamu sousedů uzlu u (začernění uzlu).

- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{$WHITE, GRAY, BLACK$\}$.
- $d[u]$ je časová známka prvního prozkoumání uzlu (obarvení na šedo).
- $f[u]$ je časová známka dokončení prozkoumávání seznamu sousedů uzlu u (začernění uzlu).
- $1 \leq d[u] < f[u] \leq 2n$.

- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{\text{WHITE, GRAY, BLACK}\}$.
- $d[u]$ je časová známka prvního prozkoumání uzlu (obarvení na šedo).
- $f[u]$ je časová známka dokončení prozkoumávání seznamu sousedů uzlu u (začernění uzlu).
- $1 \leq d[u] < f[u] \leq 2n$.
- $color[u] = \mathit{WHITE}$ v čase před $d[u]$.
- $color[u] = \mathit{GRAY}$ v čase $d[u]$ až $f[u]$.
- $color[u] = \mathit{BLACK}$ v čase po $f[u]$.

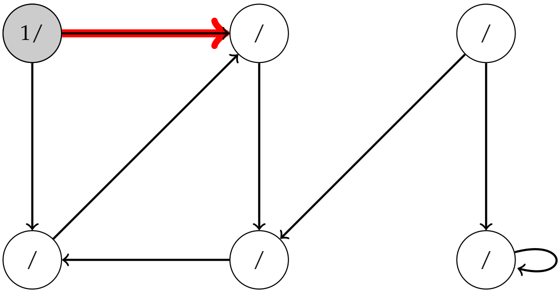
- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{\text{WHITE, GRAY, BLACK}\}$.
- $d[u]$ je časová známka prvního prozkoumání uzlu (obarvení na šedo).
- $f[u]$ je časová známka dokončení prozkoumávání seznamu sousedů uzlu u (začernění uzlu).
- $1 \leq d[u] < f[u] \leq 2n$.
- $color[u] = \mathit{WHITE}$ v čase před $d[u]$.
- $color[u] = \mathit{GRAY}$ v čase $d[u]$ až $f[u]$.
- $color[u] = \mathit{BLACK}$ v čase po $f[u]$.
- $time$ je globální proměnná.

```
DFS(G)
for každý uzel u ∈ V
    do color[u] ← WHITE
       π[u] ← NIL
time ← 0
for každý uzel u ∈ V
    do if color[u] = WHITE
          then DFS-VISIT(u)
```

```
DFS(G)
for každý uzel u ∈ V
    do color[u] ← WHITE
       π[u] ← NIL
time ← 0
for každý uzel u ∈ V
    do if color[u] = WHITE
          then DFS-VISIT(u)
```

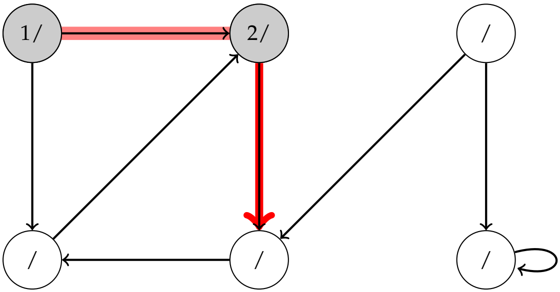
```
DFS-VISIT(u)
color[u] ← GRAY
time ← time + 1
d[u] ← time
for každý uzel v ∈ Adj[u]
    do if color[v] = WHITE
          then π[v] ← u
               DFS-VISIT(v)
color[u] ← BLACK
f[u] ← time ← time + 1
```

DFS – příklad



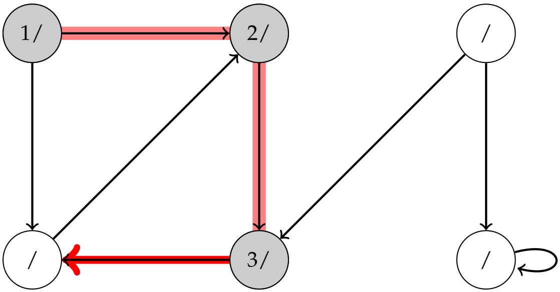
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



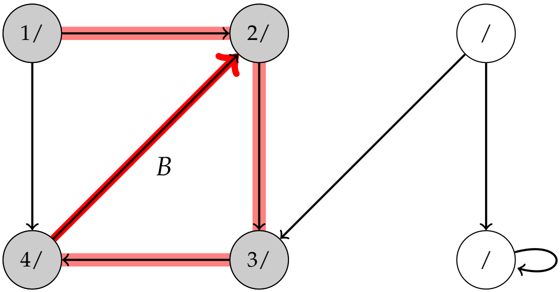
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



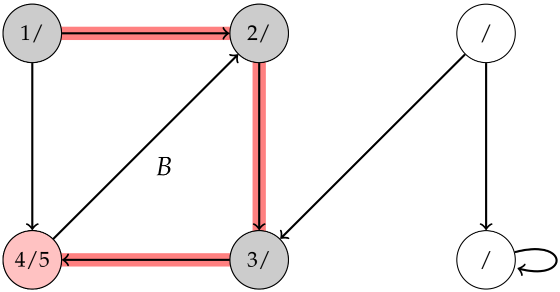
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



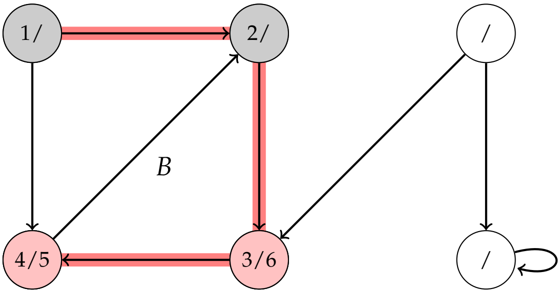
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



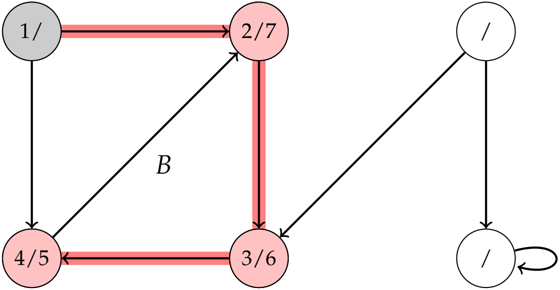
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



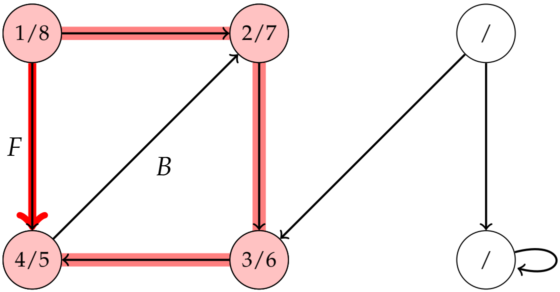
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



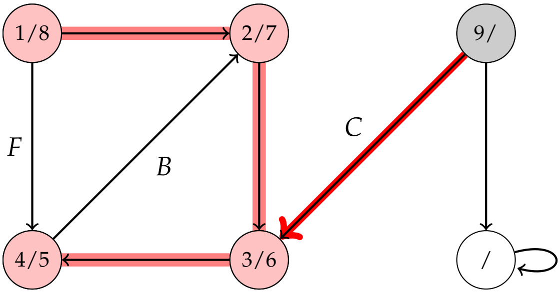
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



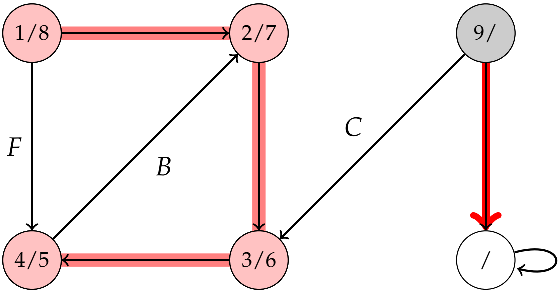
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



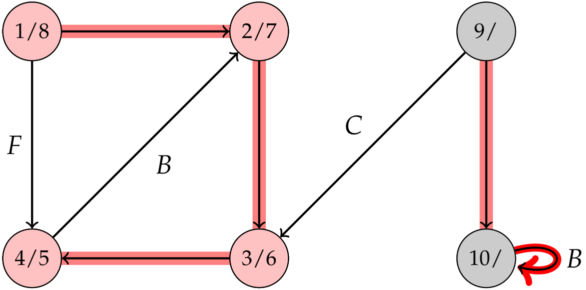
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



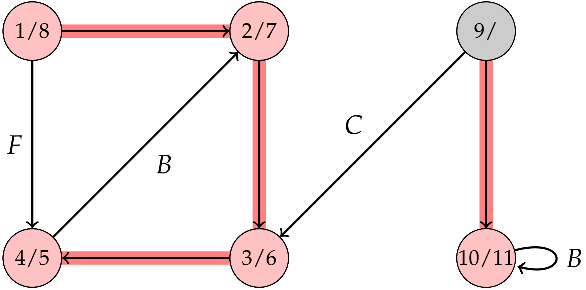
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



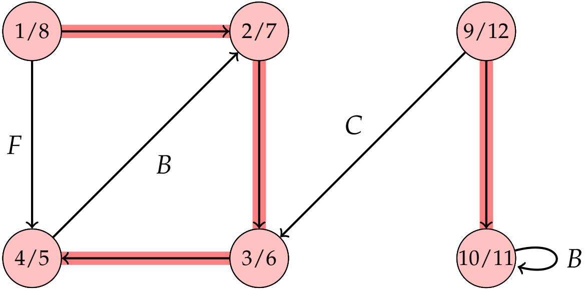
Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

DFS – příklad



Obrázek: B značí back hranu, F značí forward hranu a C značí cross hranu.

Časová složitost DFS

```
DFS(G)
1  for každý uzel u ∈ V
2       do color[u] ← WHITE
3          π[u] ← NIL
4  time ← 0
5  for každý uzel u ∈ V
6       do if color[u] = WHITE
7             then DFS-VISIT(u)
```

- Cykly na řádcích 1–3 a 5–7 bez volání funkce DFS-VISIT vezmou čas $\Theta(n)$.

Časová složitost DFS

```
DFS-VISIT(u)
color[u] ← GRAY
time ← time + 1
d[u] ← time
for každý uzel v ∈ Adj[u]
    do if color[v] = WHITE
         then π[v] ← u
              DFS-VISIT(v)
color[u] ← BLACK
f[u] ← time ← time + 1
```

- Funkce je volána pouze na bílé uzly a první věc, kterou udělá, je jejich obarvení na šedo. Je tedy volána přesně jednou pro každý uzel $v \in V$.

Časová složitost DFS

DFS-VISIT(u)
1 $color[u] \leftarrow GRAY$
2 $time \leftarrow time + 1$
3 $d[u] \leftarrow time$
4 **for** každý uzel $v \in Adj[u]$
5   **do if** $color[v] = WHITE$
6   **then** $\pi[v] \leftarrow u$
7   DFS-VISIT(v)
8 $color[u] \leftarrow BLACK$
9 $f[u] \leftarrow time \leftarrow time + 1$

- Funkce je volána pouze na bílé uzly a první věc, kterou udělá, je jejich obarvení na šedo. Je tedy volána přesně jednou pro každý uzel $v \in V$.
- Pro každý uzel v je cyklus 4–7 prováděn $|Adj[v]|$-krát.

Časová složitost DFS

DFS-VISIT(u)
1 $color[u] \leftarrow GRAY$
2 $time \leftarrow time + 1$
3 $d[u] \leftarrow time$
4 **for** každý uzel $v \in Adj[u]$
5   **do if** $color[v] = WHITE$
6   **then** $\pi[v] \leftarrow u$
7   DFS-VISIT(v)
8 $color[u] \leftarrow BLACK$
9 $f[u] \leftarrow time \leftarrow time + 1$

- Funkce je volána pouze na bílé uzly a první věc, kterou udělá, je jejich obarvení na šedo. Je tedy volána přesně jednou pro každý uzel $v \in V$.
- Pro každý uzel v je cyklus 4–7 prováděn $|Adj[v]|$-krát.
- Jelikož $\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \Theta(m)$, je celková cena řádků 4–7 $\Theta(m)$.

Časová složitost DFS

Dfs-Visit(u)
1 $color[u] \leftarrow GRAY$
2 $time \leftarrow time + 1$
3 $d[u] \leftarrow time$
4 **for** každý uzel $v \in Adj[u]$
5   **do if** $color[v] = WHITE$
6   **then** $\pi[v] \leftarrow u$
7   Dfs-Visit(v)
8 $color[u] \leftarrow BLACK$
9 $f[u] \leftarrow time \leftarrow time + 1$

- Funkce je volána pouze na bílé uzly a první věc, kterou udělá, je jejich obarvení na šedo. Je tedy volána přesně jednou pro každý uzel $v \in V$.
- Pro každý uzel v je cyklus 4–7 prováděn $|Adj[v]|$-krát.
- Jelikož $\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \Theta(m)$, je celková cena řádků 4–7 $\Theta(m)$.
- Celková složitost je tedy $\Theta(m + n)$.

Závorková věta

V prohledávání do hloubky (ne)orientovaného grafu $G = (V, E)$ pro libovolné dva uzly u a v platí právě jedno z následujících:

- intervaly $[d[u], f[u]]$ a $[d[v], f[v]]$ jsou disjunktní a ani u není následníkem v ani v není následníkem u v DFS lese,
- interval $[d[u], f[u]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[v], f[v]]$ a u je následníkem v v nějakém DFS stromě, nebo
- interval $[d[v], f[v]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[u], f[u]]$ a v je následníkem u v nějakém DFS stromě.

Závorková věta

V prohledávání do hloubky (ne)orientovaného grafu $G = (V, E)$ pro libovolné dva uzly u a v platí právě jedno z následujících:

- intervaly $[d[u], f[u]]$ a $[d[v], f[v]]$ jsou disjunktní a ani u není následníkem v ani v není následníkem u v DFS lese,
- interval $[d[u], f[u]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[v], f[v]]$ a u je následníkem v v nějakém DFS stromě, nebo
- interval $[d[v], f[v]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[u], f[u]]$ a v je následníkem u v nějakém DFS stromě.

Důkaz pro $d[u] < d[v]$ (opačná nerovnost se dokáže podobně).

- $d[v] < f[u]$, pak v bylo prozkoumáno, když u bylo šedé. Protože v prozkoumáno později než u, je v dokončeno před u, tj. $f[v] < f[u]$.

Závorková věta

V prohledávání do hloubky (ne)orientovaného grafu $G = (V, E)$ pro libovolné dva uzly u a v platí právě jedno z následujících:

- intervaly $[d[u], f[u]]$ a $[d[v], f[v]]$ jsou disjunktní a ani u není následníkem v ani v není následníkem u v DFS lese,
- interval $[d[u], f[u]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[v], f[v]]$ a u je následníkem v v nějakém DFS stromě, nebo
- interval $[d[v], f[v]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[u], f[u]]$ a v je následníkem u v nějakém DFS stromě.

Důkaz pro $d[u] < d[v]$ (opačná nerovnost se dokáže podobně).

- $d[v] < f[u]$, pak v bylo prozkoumáno, když u bylo šedé. Protože v prozkoumáno později než u, je v dokončeno před u, tj. $f[v] < f[u]$.
- $f[u] < d[v]$, pak z vlastnosti $d[v] < f[v]$ plyne, že oba intervaly jsou disjunktní. Navíc, když je prozkoumáván uzel z jednoho intervalu, nejsou uzly druhého šedé, proto nemůže být jejich následníkem.

Corollary 8.

Uzel v je následníkem uzlu u v DFS lese grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u]\,.$$

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť v je následníkem u. Nechť w je uzel na cestě z u do v v DFS lese. Protože w je následníkem u, je podle předchozího důsledku $d[u] < d[w]$. Tedy w je v čase $d[u]$ bílé.

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť v je následníkem u. Nechť w je uzel na cestě z u do v v DFS lese. Protože w je následníkem u, je podle předchozího důsledku $d[u] < d[w]$. Tedy w je v čase $d[u]$ bílé.

$\Leftarrow$: Nechť v je nejbližším uzlem k u dosažitelným z u v čase $d[u]$ nějakou bílou cestou takový, že není následníkem u v DFS lese.

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť v je následníkem u. Nechť w je uzel na cestě z u do v v DFS lese. Protože w je následníkem u, je podle předchozího důsledku $d[u] < d[w]$. Tedy w je v čase $d[u]$ bílé.

$\Leftarrow$: Nechť v je nejbližším uzlem k u dosažitelným z u v čase $d[u]$ nějakou bílou cestou takový, že není následníkem u v DFS lese.

- Nechť w je předchůdce v na dané cestě. Pak w je následníkem u a podle předchozího důsledku je $f[w] \leq f[u]$ (w může být u).

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť v je následníkem u. Nechť w je uzel na cestě z u do v v DFS lese. Protože w je následníkem u, je podle předchozího důsledku $d[u] < d[w]$. Tedy w je v čase $d[u]$ bílé.

$\Leftarrow$: Nechť v je nejbližším uzlem k u dosažitelným z u v čase $d[u]$ nějakou bílou cestou takový, že není následníkem u v DFS lese.

- Nechť w je předchůdce v na dané cestě. Pak w je následníkem u a podle předchozího důsledku je $f[w] \leq f[u]$ (w může být u).
- Protože v musí být objeveno po u, ale před ukončením w, je $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$.

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť v je následníkem u. Nechť w je uzel na cestě z u do v v DFS lese. Protože w je následníkem u, je podle předchozího důsledku $d[u] < d[w]$. Tedy w je v čase $d[u]$ bílé.

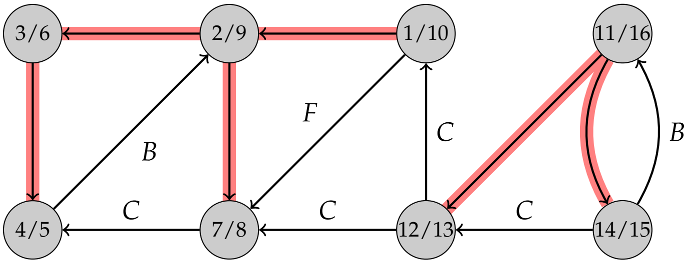
$\Leftarrow$: Nechť v je nejbližším uzlem k u dosažitelným z u v čase $d[u]$ nějakou bílou cestou takový, že není následníkem u v DFS lese.

- Nechť w je předchůdce v na dané cestě. Pak w je následníkem u a podle předchozího důsledku je $f[w] \leq f[u]$ (w může být u).
- Protože v musí být objeveno po u, ale před ukončením w, je $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$.
- Závorková věta říká, že interval $[d[v], f[v]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[u], f[u]]$. Předchozí důsledek dává, že v je následníkem u.

Klasifikace hran

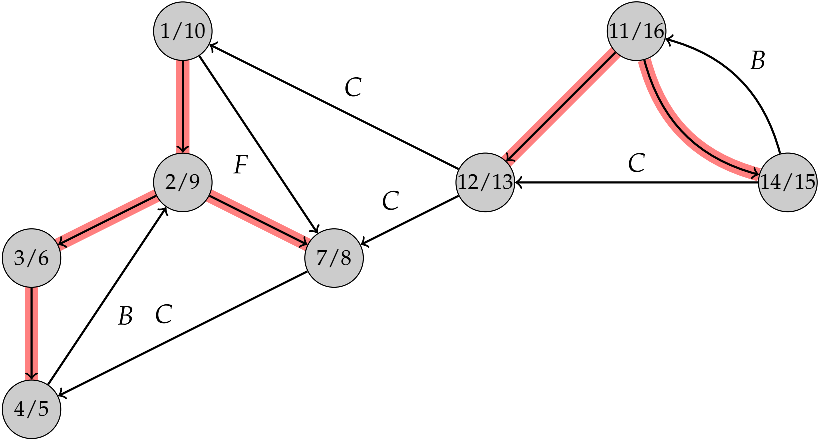
1. **Stromové hrany** jsou hrany DFS lesa G_π. (u, v) je stromová hrana, jestliže v bylo poprvé objeveno prozkoumáváním hrany (u, v). Zvýrazněné hrany v předchozích příkladech.
2. **Zpětné hrany** jsou hrany (u, v) spojující u s předchůdcem v v DFS lese. Smyčky jsou zpětné hrany. V příkladech značeno B.
3. **Dopředné hrany** jsou hrany (u, v) spojující u s následníkem v v DFS lese. V příkladech značeno F.
4. **Cross hrany** jsou všechny ostatní hrany.

Příklad



Nakreslení

Každý graf lze nakreslit tak, že stromové a dopředné hrany vedou dolů a zpětné hrany vedou nahoru.



DFS a klasifikace hran

Nechť (u, v) je hrana. Pak během provádění DFS je možno tuto hranu klasifikovat podle barvy uzlu v následovně:

1. bílá indikuje stromovou hranu,

DFS a klasifikace hran

Nechť (u, v) je hrana. Pak během provádění DFS je možno tuto hranu klasifikovat podle barvy uzlu v následovně:

1. bílá indikuje stromovou hranu,
2. šedá indikuje zpětnou hranu a

DFS a klasifikace hran

Nechť (u, v) je hrana. Pak během provádění DFS je možno tuto hranu klasifikovat podle barvy uzlu v následovně:

1. bílá indikuje stromovou hranu,
2. šedá indikuje zpětnou hranu a
3. černá indikuje dopřednou nebo cross hranu.
   - (u, v) je dopředná hrana, jestliže $d[u] < d[v]$ a
   - cross hrana, jestliže $d[u] > d[v]$.

Neorientovaný graf

Theorem 9.
V prohledávání neorientovaného grafu G je každá hrana buď stromová, nebo zpětná.

Důkaz.

- Nechť (u, v) je libovolná hrana grafu G a nechť $d[u] < d[v]$.

Neorientovaný graf

Theorem 9.
V prohledávání neorientovaného grafu G je každá hrana buď stromová, nebo zpětná.

Důkaz.

- Nechť (u, v) je libovolná hrana grafu G a nechť $d[u] < d[v]$.
- Pak v se stane černý v době, kdy u je šedý.

Neorientovaný graf

Theorem 9.
V prohledávání neorientovaného grafu G je každá hrana buď stromová, nebo zpětná.

Důkaz.

- Nechť (u, v) je libovolná hrana grafu G a nechť $d[u] < d[v]$.
- Pak v se stane černý v době, kdy u je šedý.
- Pokud je hrana (u, v) poprvé prozkoumána ve směru z u do v, je v bílý – jinak bychom již tuto hranu prozkoumali ve směru od v do u. (u, v) je tedy stromová hrana.

Neorientovaný graf

Theorem 9.
V prohledávání neorientovaného grafu G je každá hrana buď stromová, nebo zpětná.

Důkaz.

- Nechť (u, v) je libovolná hrana grafu G a nechť $d[u] < d[v]$.
- Pak v se stane černý v době, kdy u je šedý.
- Pokud je hrana (u, v) poprvé prozkoumána ve směru z u do v, je v bílý – jinak bychom již tuto hranu prozkoumali ve směru od v do u. (u, v) je tedy stromová hrana.
- Pokud je hrana (u, v) poprvé prozkoumána ve směru z v do u, je u stále šedý – protože u je šedý v době, kdy je hrana poprvé prozkoumána. (u, v) je tedy zpětná hrana.

□

Topologické uspořádání

Topologické uspořádání

- Aplikace DFS

Topologické uspořádání

- Aplikace DFS
- Topologické uspořádání orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je lineární uspořádání všech jeho uzlů tak, že pokud $(u, v) \in E$, pak u předchází v v onom uspořádání.

Topologické uspořádání

- Aplikace DFS
- Topologické uspořádání orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je lineární uspořádání všech jeho uzlů tak, že pokud $(u, v) \in E$, pak u předchází v v onom uspořádání.
- Pokud G není acyklický, pak žádné lineární uspořádání neexistuje.

Topologické uspořádání

- Aplikace DFS
- Topologické uspořádání orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je lineární uspořádání všech jeho uzlů tak, že pokud $(u, v) \in E$, pak u předchází v v onom uspořádání.
- Pokud G není acyklický, pak žádné lineární uspořádání neexistuje.

Topological-Sort(G)
zavolej Dfs(G) pro výpočet hodnot $f[v]$
každý dokončený uzel zařaď na začátek seznamu uzlů L
return L

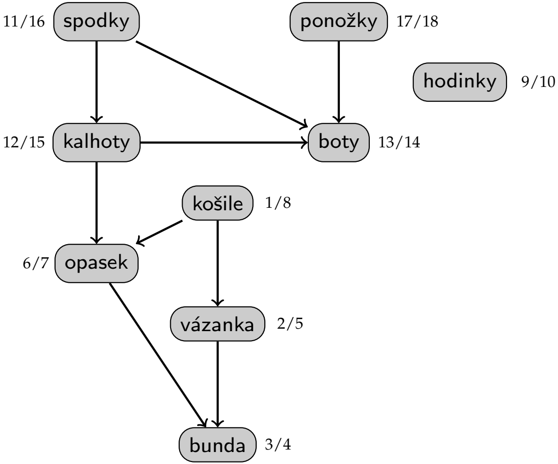
Topologické uspořádání

- Aplikace DFS
- Topologické uspořádání orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je lineární uspořádání všech jeho uzlů tak, že pokud $(u, v) \in E$, pak u předchází v v onom uspořádání.
- Pokud G není acyklický, pak žádné lineární uspořádání neexistuje.

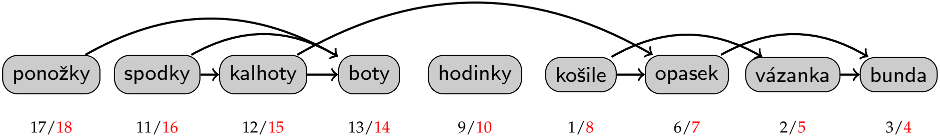
```
TOPOLOGICAL-SORT(G)
  zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot f[v]
  každý dokončený uzel zařaď na začátek seznamu uzlů L
  return L
```

- Složitost DFS je $\Theta(m + n)$, přidání uzlu do seznamu je konstantní, proto je celková složitost $\Theta(m + n)$.

Topologické uspořádání – příklad



Topologické uspořádání – příklad



Lemma 10.
Orientovaný graf G *je acyklický právě když* $\textsc{Dfs}(G)$ *nenajde žádnou zpětnou hranu.*

Důkaz.

Lemma 10.
Orientovaný graf G je acyklický právě když $\mathrm{DFS}(G)$ nenajde žádnou zpětnou hranu.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť (u, v) je zpětná hrana. Pak v je následníkem u v DFS lese, tj. existuje cesta z u do v. Hrana (u, v) pak uzavírá cyklus.

Lemma 10.

Orientovaný graf G je acyklický právě když $\textsc{Dfs}(G)$ nenajde žádnou zpětnou hranu.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť (u, v) je zpětná hrana. Pak v je následníkem u v DFS lese, tj. existuje cesta z u do v. Hrana (u, v) pak uzavírá cyklus.

$\Leftarrow$: Nechť G obsahuje cyklus c. Ukážeme, že pak $\textsc{Dfs}(G)$ obsahuje zpětnou hranu.

Lemma 10.
Orientovaný graf G je acyklický právě když $\textsc{Dfs}(G)$ nenajde žádnou zpětnou hranu.

Důkaz.

- $\Rightarrow$: Nechť (u, v) je zpětná hrana. Pak v je následníkem u v DFS lese, tj. existuje cesta z u do v. Hrana (u, v) pak uzavírá cyklus.
- $\Leftarrow$: Nechť G obsahuje cyklus c. Ukážeme, že pak $\textsc{Dfs}(G)$ obsahuje zpětnou hranu.
  - Nechť v je první uzel c objeven procedurou $\textsc{Dfs}(G)$ a nechť (u, v) je předcházející hrana na cyklu c.

Lemma 10.

Orientovaný graf G je acyklický právě když $\textsc{Dfs}(G)$ nenajde žádnou zpětnou hranu.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť (u, v) je zpětná hrana. Pak v je následníkem u v DFS lese, tj. existuje cesta z u do v. Hrana (u, v) pak uzavírá cyklus.

$\Leftarrow$: Nechť G obsahuje cyklus c. Ukážeme, že pak $\textsc{Dfs}(G)$ obsahuje zpětnou hranu.

- Nechť v je první uzel c objeven procedurou $\textsc{Dfs}(G)$ a nechť (u, v) je předcházející hrana na cyklu c.
- V čase $d[v]$ tvoří hrany cyklu c bílou cestu z v do u.

Lemma 10.
Orientovaný graf G je acyklický právě když $\mathrm{DFS}(G)$ nenajde žádnou zpětnou hranu.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť (u, v) je zpětná hrana. Pak v je následníkem u v DFS lese, tj. existuje cesta z u do v. Hrana (u, v) pak uzavírá cyklus.

$\Leftarrow$: Nechť G obsahuje cyklus c. Ukážeme, že pak $\mathrm{DFS}(G)$ obsahuje zpětnou hranu.

- Nechť v je první uzel c objeven procedurou $\mathrm{DFS}(G)$ a nechť (u, v) je předcházející hrana na cyklu c.
- V čase $d[v]$ tvoří hrany cyklu c bílou cestu z v do u.
- Podle věty o bílé cestě platí, že u je následníkem v v DFS lese. Proto je (u, v) zpětná hrana.

$\square$

Theorem 11.
Procedura $\textsc{Topological-Sort}(G)$ *topologicky uspořádá orientovaný acyklický graf* G.

Důkaz.

Theorem 11.
Procedura $\textsc{Topological-Sort}(G)$ *topologicky uspořádá orientovaný acyklický graf* G.

Důkaz.

- Nechť DFS je spuštěno na orientovaný acyklický graf $G = (V, E)$ a určí hodnoty $f[v]$.
- Stačí ukázat, že pokud $(u, v) \in E$, pak $f[v] < f[u]$.

Theorem 11.
Procedura $\textsc{Topological-Sort}(G)$ *topologicky uspořádá orientovaný acyklický graf* G.

Důkaz.

- Nechť DFS je spuštěno na orientovaný acyklický graf $G = (V,E)$ a určí hodnoty $f[v]$.
- Stačí ukázat, že pokud $(u,v) \in E$, pak $f[v] < f[u]$.
- Nechť (u,v) je právě prozkoumávána procedurou $\textsc{Dfs}(G)$, pak v nemůže být šedý, protože jinak by byl v předchůdcem u a (u,v) by byla zpětná hrana – spor s předchozím lemmatem.

Theorem 11.

Procedura $\textsc{Topological-Sort}(G)$ *topologicky uspořádá orientovaný acyklický graf* G.

Důkaz.

- Nechť DFS je spuštěno na orientovaný acyklický graf $G = (V, E)$ a určí hodnoty $f[v]$.
- Stačí ukázat, že pokud $(u, v) \in E$, pak $f[v] < f[u]$.
- Nechť (u, v) je právě prozkoumávána procedurou $\textsc{Dfs}(G)$, pak v nemůže být šedý, protože jinak by byl v předchůdcem u a (u, v) by byla zpětná hrana – spor s předchozím lemmatem.
- v je bílý, pak v je následníkem u v DFS lese, a proto $f[v] < f[u]$.

Theorem 11.

Procedura $\textsc{Topological-Sort}(G)$ *topologicky uspořádá orientovaný acyklický graf* G.

Důkaz.

- Nechť DFS je spuštěno na orientovaný acyklický graf $G = (V, E)$ a určí hodnoty $f[v]$.
- Stačí ukázat, že pokud $(u, v) \in E$, pak $f[v] < f[u]$.
- Nechť (u, v) je právě prozkoumávána procedurou $\textsc{Dfs}(G)$, pak v nemůže být šedý, protože jinak by byl v předchůdcem u a (u, v) by byla zpětná hrana – spor s předchozím lemmatem.
- v je bílý, pak v je následníkem u v DFS lese, a proto $f[v] < f[u]$.
- v je černý, pak $f[v]$ je již nastaveno. Jelikož u je stále prozkoumáváno, není $f[u]$ dosud nastaveno, proto $f[v] < f[u]$.

$\square$

Silně souvislé komponenty

Silně souvislé komponenty

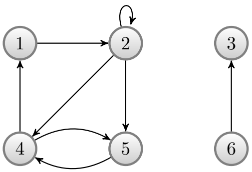
- Aplikace DFS

Silně souvislé komponenty

- Aplikace DFS
- $G = (V, E)$ orientovaný graf. Silně souvislá komponenta je maximální množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $u, v \in C$, $u \rightsquigarrow v$ i $v \rightsquigarrow u$.

Silně souvislé komponenty

- Aplikace DFS
- $G = (V, E)$ orientovaný graf. Silně souvislá komponenta je maximální množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $u, v \in C$, $u \rightsquigarrow v$ i $v \rightsquigarrow u$.



Graf má tři silně souvislé komponenty:

- $\{1, 2, 4, 5\}$
- $\{3\}$
- $\{6\}$

- Transponovaný graf grafu $G = (V, E)$ je graf $G^T = (V, E^T)$, kde $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

- Transponovaný graf grafu $G = (V, E)$ je graf $G^T = (V, E^T)$, kde $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

```
SCC(G)
1  zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot f[u]
2  vypočítej G^T
3  zavolej DFS(G^T), ale v hlavním cyklu uvažuj uzly
         v klesajícím pořadí podle hodnoty f[u]
4  na výstup dej uzly každého stromu z DFS lesa, určeného na řádku 3,
         jako samostatnou silně souvislou komponentu
```

- Transponovaný graf grafu $G = (V, E)$ je graf $G^T = (V, E^T)$, kde $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

SCC(G)

1 zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot $f[u]$
2 vypočítej G^T
3 zavolej DFS(G^T), ale v hlavním cyklu uvažuj uzly
v klesajícím pořadí podle hodnoty $f[u]$
4 na výstup dej uzly každého stromu z DFS lesa, určeného na řádku 3,
jako samostatnou silně souvislou komponentu

- Složitost $\Theta(m + n)$.

- Transponovaný graf grafu $G = (V, E)$ je graf $G^T = (V, E^T)$, kde $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

SCC(G)
1 zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot $f[u]$
2 vypočítej G^T
3 zavolej DFS(G^T), ale v hlavním cyklu uvažuj uzly
    v klesajícím pořadí podle hodnoty $f[u]$
4 na výstup dej uzly každého stromu z DFS lesa, určeného na řádku 3,
    jako samostatnou silně souvislou komponentu

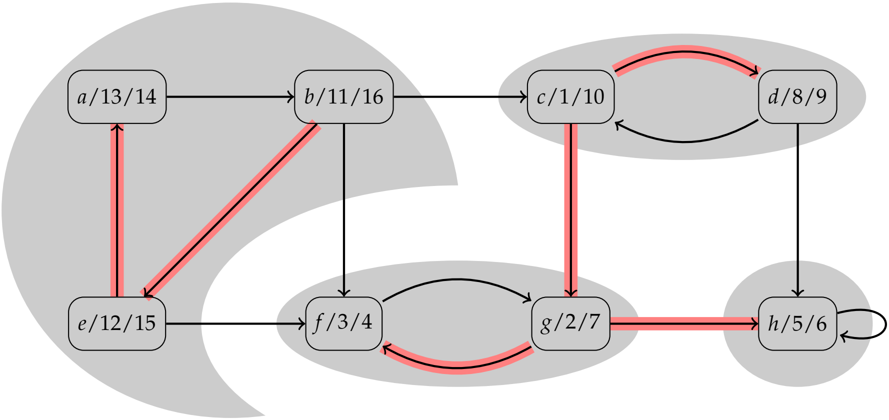
- Složitost $\Theta(m + n)$.
- Seznam sousedů G^T se dá určit ze seznam sousedů G v čase $O(m + n)$. Jak?

- Transponovaný graf grafu $G = (V, E)$ je graf $G^T = (V, E^T)$, kde $E^T = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

```
Scc(G)
1  zavolej Dfs(G) pro výpočet hodnot f[u]
2  vypočítej G^T
3  zavolej Dfs(G^T), ale v hlavním cyklu uvažuj uzly
             v klesajícím pořadí podle hodnoty f[u]
4  na výstup dej uzly každého stromu z DFS lesa, určeného na řádku 3,
             jako samostatnou silně souvislou komponentu
```

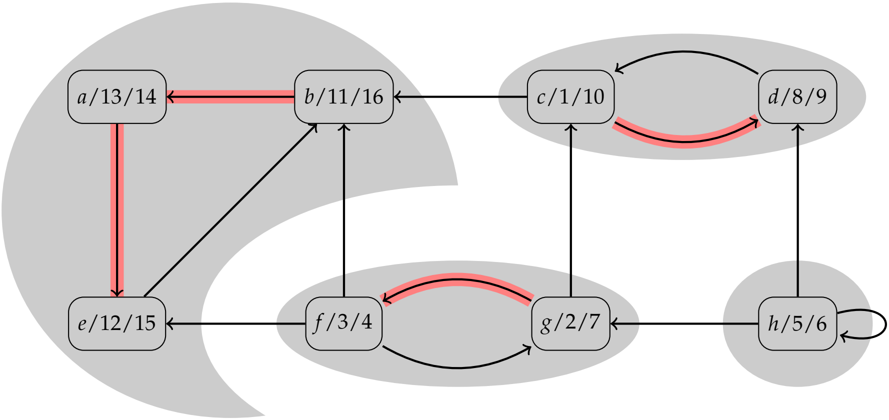
- Složitost $\Theta(m + n)$.
- Seznam sousedů G^T se dá určit ze seznam sousedů G v čase $O(m + n)$. Jak?
- G a G^T mají stejné silně souvislé komponenty – u a v jsou vzájemně dosažitelné v G právě když jsou vzájemně dosažitelné v G^T.

SCC – příklad



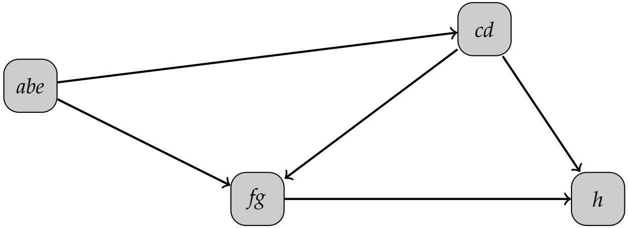
Obrázek: Výsledek $\text{Dfs}(G)$. Vyznačeny stromové hrany a silně souvislé komponenty.

SCC – příklad



Obrázek: Graf G^T a výsledek řádku 3 procedury Scc. Uzly b, c, g a h jsou kořeny stromů DFS lesa. Každý strom odpovídá jedné silně souvislé komponentě.

- Graf komponent grafu $G = (V, E)$ je graf $G^{scc} = (V^{scc}, E^{scc})$ definován následovně:
  - Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_k$ jsou silně souvislé komponenty grafu G.
  - $V^{scc} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$, $V^{css} \cap C_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
  - $(v_i, v_j) \in E^{scc}$ pokud existují $x \in C_i$ a $y \in C_j$ takové, že $(x, y) \in E$.



Vlastnost grafu komponent

Lemma 12.
Nechť C *a* C' *jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu* $G = (V, E)$. *Nechť* $u, v \in C$, $u', v' \in C'$ *a* $u \rightsquigarrow u'$ *v* G. *Pak NEplatí* $v' \rightsquigarrow v$.

Vlastnost grafu komponent

Lemma 12.
Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $u, v \in C$, $u', v' \in C'$ a $u \rightsquigarrow u'$ v G. Pak NEplatí $v' \rightsquigarrow v$.

Důkaz.
Pokud $v' \rightsquigarrow v$, pak $u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$ a $v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$, tj. u a v' jsou vzájemně dosažitelné – spor. □

Vlastnost grafu komponent

Lemma 12.
Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $u, v \in C$, $u', v' \in C'$ a $u \leadsto u'$ v G. Pak NEplatí $v' \leadsto v$.

Důkaz.
Pokud $v' \leadsto v$, pak $u \leadsto u' \leadsto v'$ a $v' \leadsto v \leadsto u$, tj. u a v' jsou vzájemně dosažitelné – spor. □

- V následujícím uvažujeme pouze časy $d[u]$ a $f[u]$ vypočítané prvním voláním procedury DFS.

- $U \subseteq V$, pak $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$ a $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$.

- $U \subseteq V$, pak $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$ a $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$.

Lemma 13.

Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $(u, v) \in E$, $u \in C$, $v \in C'$. Pak $f(C) > f(C')$.

- $U \subseteq V$, pak $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$ a $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$.

Lemma 13.

Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $(u, v) \in E$, $u \in C$, $v \in C'$. Pak $f(C) > f(C')$.

Důkaz

- 1) $d(C) < d(C')$ – nechť x je první objevený v C. V čase $d[x]$ jsou všechny uzly $C \cup C'$ bílé. Pro $w \in C'$ existuje bílá cesta $x \rightsquigarrow u \rightarrow v \rightsquigarrow w$. Věta o bílé cestě říká, že všechny uzly z $C \cup C'$ jsou následníky x v DFS stomu. Důsledek závorkové věty říká, že $f[x] = f(C) > f(C')$.

- $U \subseteq V$, pak $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$ a $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$.

Lemma 13.

Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $(u, v) \in E$, $u \in C$, $v \in C'$. Pak $f(C) > f(C')$.

Důkaz

- 1) $d(C) < d(C')$ – nechť x je první objevený v C. V čase $d[x]$ jsou všechny uzly $C \cup C'$ bílé. Pro $w \in C'$ existuje bílá cesta $x \rightsquigarrow u \rightarrow v \rightsquigarrow w$. Věta o bílé cestě říká, že všechny uzly z $C \cup C'$ jsou následníky x v DFS stomu. Důsledek závorkové věty říká, že $f[x] = f(C) > f(C')$.
- 2) $d(C) > d(C')$ – nechť y první objevený v C'. V čase $d[y]$ jsou všechny uzly C' bílé a existuje bílá cesta z y do každého uzlu C'. Věta o bílé cestě a důsledek závorkové věty dávají $f[y] = f(C')$.

- $U \subseteq V$, pak $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$ a $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$.

Lemma 13.

Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $(u, v) \in E$, $u \in C$, $v \in C'$. Pak $f(C) > f(C')$.

Důkaz

- 1) $d(C) < d(C')$ – nechť x je první objevený v C. V čase $d[x]$ jsou všechny uzly $C \cup C'$ bílé. Pro $w \in C'$ existuje bílá cesta $x \leadsto u \to v \leadsto w$. Věta o bílé cestě říká, že všechny uzly z $C \cup C'$ jsou následníky x v DFS stomu. Důsledek závorkové věty říká, že $f[x] = f(C) > f(C')$.
- 2) $d(C) > d(C')$ – nechť y první objevený v C'. V čase $d[y]$ jsou všechny uzly C' bílé a existuje bílá cesta z y do každého uzlu C'. Věta o bílé cestě a důsledek závorkové věty dávají $f[y] = f(C')$. V čase $d[y]$ jsou všechny uzly C bílé. Z předchozího lemmatu máme, že neexistuje cesta z C' do C. Proto jsou uzly C bílé i v čase $f[y]$, tj. $f[w] > f[y]$, $w \in C$, což dává $f(C) > f(C')$.

Corollary 14.

Nechť C *a* C' *jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu* $G = (V, E)$. *Nechť* $(u, v) \in E^T$, $u \in C$, $v \in C'$. *Pak* $f(C) < f(C')$.

Corollary 14.

Nechť C *a* C' *jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu* $G = (V, E)$. *Nechť* $(u, v) \in E^T$, $u \in C$, $v \in C'$. *Pak* $f(C) < f(C')$.

Důkaz.

$(u, v) \in E^T$ implikuje, že $(v, u) \in E$. Protože silně souvislé komponenty G a G^T jsou stejné, dává předchozí lemma $f(C) < f(C')$. □

Theorem 15.

Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

Theorem 15.
Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.

Theorem 15.
Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.
- IK: Uvažme $(k+1)$-ní nalezený strom. Nechť u je jeho kořen a nechť u je v silně souvislé komponentě C.

Theorem 15.

Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.
- IK: Uvažme $(k+1)$-ní nalezený strom. Nechť u je jeho kořen a nechť u je v silně souvislé komponentě C.
- $f[u] = f(C) > f(C')$ pro libovonou silně souvislou komponentu C' různou od C, která ještě nebyla navštívena.

Theorem 15.

Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.
- IK: Uvažme $(k+1)$-ní nalezený strom. Nechť u je jeho kořen a nechť u je v silně souvislé komponentě C.
- $f[u] = f(C) > f(C')$ pro libovonou silně souvislou komponentu C' různou od C, která ještě nebyla navštívena.
- Podle IP jsou v čase $d_{G^T}[u]$ všechny uzly z C bílé. Věta o bílé cestě dává, že všechny ostatní uzly C jsou následníky u v DFS stromu.

Theorem 15.
Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.
- IK: Uvažme $(k+1)$-ní nalezený strom. Nechť u je jeho kořen a nechť u je v silně souvislé komponentě C.
- $f[u] = f(C) > f(C')$ pro libovonou silně souvislou komponentu C' různou od C, která ještě nebyla navštívena.
- Podle IP jsou v čase $d_{G^T}[u]$ všechny uzly z C bílé. Věta o bílé cestě dává, že všechny ostatní uzly C jsou následníky u v DFS stromu.
- Podle IP a předchozího důsledku vede každá hrana v G^T jdoucí z C do již navštívené silně souvislé komponenty.

Theorem 15.

Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.
- IK: Uvažme $(k+1)$-ní nalezený strom. Nechť u je jeho kořen a nechť u je v silně souvislé komponentě C.
- $f[u] = f(C) > f(C')$ pro libovonou silně souvislou komponentu C' různou od C, která ještě nebyla navštívena.
- Podle IP jsou v čase $d_{G^T}[u]$ všechny uzly z C bílé. Věta o bílé cestě dává, že všechny ostatní uzly C jsou následníky u v DFS stromu.
- Podle IP a předchozího důsledku vede každá hrana v G^T jdoucí z C do již navštívené silně souvislé komponenty.
- Tedy žádný uzel z jiné komponenty než C nebude násleníkem u během DFS G^T. Uzly stromu tedy tvoří silně souvislou komponentu.

Minimální kostry

Minimální kostra

- První algoritmus řešící tento problém navrhl brněnský matematik O. Borůvka, 1926.
- Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf s váhovou funkcí

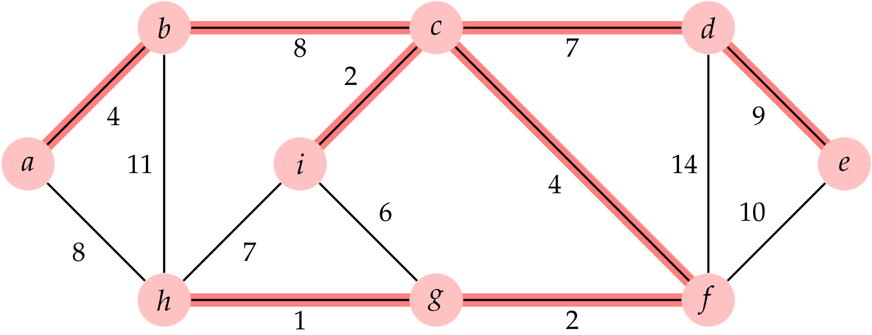
$$w : E \to \mathbb{R}\,.$$

- Úkolem je najít takovou množinu hran $T \subseteq E$, že

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in E} w(u,v)$$

je minimální.

Příklad



Generický algoritmus

GENERIC-MST(G, w)
$A \leftarrow \emptyset$
while A netvoří kostru
    do najdi hranu $(u, v) \in E$ bezpečnou pro A
        $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
return A

- Invariant: Před každou iterací algoritmu je množina A podmnožinou nějaké minimální kostry.
- Hrana $(u, v) \in E$ je bezpečná pro A, pokud $A \cup \{(u, v)\}$ je podmnožinou nějaké minimální kostry.

Pomocné definice

- **Řez** grafu $G = (V, E)$ je dvojice $(S, V - S)$, $S \subseteq V$.

Pomocné definice

- Řez grafu $G = (V, E)$ je dvojice $(S, V - S)$, $S \subseteq V$.
- Hrana $(u, v) \in E$ kříží řez $(S, V - S)$, pokud jeden její konec je v S a druhý ve $V - S$.

Pomocné definice

- Řez grafu $G = (V, E)$ je dvojice $(S, V - S)$, $S \subseteq V$.
- Hrana $(u, v) \in E$ kříží řez $(S, V - S)$, pokud jeden její konec je v S a druhý ve $V - S$.
- Řez respektuje množinu A hran, pokud žádná hrana v A nekříží řez.

Pomocné definice

- Řez grafu $G = (V, E)$ je dvojice $(S, V - S)$, $S \subseteq V$.
- Hrana $(u, v) \in E$ kříží řez $(S, V - S)$, pokud jeden její konec je v S a druhý ve $V - S$.
- Řez respektuje množinu A hran, pokud žádná hrana v A nekříží řez.
- Hrana se nazývá lehká, pokud kříží řez a její hodnota je minimální z hodnot všech hran, které kříží řez.

Theorem 16.

- *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí* w.
- *Nechť* $A \subseteq E$ *je součástí nějaké minimální kostry* G.
- *Nechť* $(S, V - S)$ *je řez, který respektuje* A.
- *Nechť* (u, v) *je lehká hrana křížící* $(S, V - S)$.

Pak hrana (u, v) *je bezpečná pro* A.

Důkaz

Theorem 16.

- *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí* w.
- *Nechť* $A \subseteq E$ *je součástí nějaké minimální kostry* G.
- *Nechť* $(S, V - S)$ *je řez, který respektuje* A.
- *Nechť* (u, v) *je lehká hrana hřížící* $(S, V - S)$.

Pak hrana (u, v) *je bezpečná pro* A.

Důkaz

- Nechť T je minimální kostra G, $A \subseteq T$, $(u, v) \notin T$.

Theorem 16.

- *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí* w.
- *Nechť* $A \subseteq E$ *je součástí nějaké minimální kostry* G.
- *Nechť* $(S, V - S)$ *je řez, který respektuje* A.
- *Nechť* (u, v) *je lehká hrana hřížící* $(S, V - S)$.

Pak hrana (u, v) *je bezpečná pro* A.

Důkaz

- Nechť T je minimální kostra G, $A \subseteq T$, $(u, v) \notin T$.
- $u \rightsquigarrow v$ je cesta v T, tj. přidání (u, v) vytváří kružnici. Nechť např. $u \in S$ a $v \in V - S$.

Theorem 16.

- *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí* w.
- *Nechť* $A \subseteq E$ *je součástí nějaké minimální kostry* G.
- *Nechť* $(S, V - S)$ *je řez, který respektuje* A.
- *Nechť* (u, v) *je lehká hrana hřížící* $(S, V - S)$.

Pak hrana (u, v) *je bezpečná pro* A.

Důkaz

- Nechť T je minimální kostra G, $A \subseteq T$, $(u, v) \notin T$.
- $u \rightsquigarrow v$ je cesta v T, tj. přidání (u, v) vytváří kružnici. Nechť např. $u \in S$ a $v \in V - S$.
- Nechť (x, y) je hrana z cesty $u \rightsquigarrow v$ v T křížící řez $(S, V - S)$. Protože řez respektuje A, $(x, y) \notin A$.

Theorem 16.

- *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí w.*
- *Nechť $A \subseteq E$ je součástí nějaké minimální kostry G.*
- *Nechť $(S, V - S)$ je řez, který respektuje A.*
- *Nechť (u, v) je lehká hrana hřížící $(S, V - S)$.*

Pak hrana (u, v) je bezpečná pro A.

Důkaz

- Nechť T je minimální kostra G, $A \subseteq T$, $(u, v) \notin T$.
- $u \rightsquigarrow v$ je cesta v T, tj. přidání (u, v) vytváří kružnici. Nechť např. $u \in S$ a $v \in V - S$.
- Nechť (x, y) je hrana z cesty $u \rightsquigarrow v$ v T křížící řez $(S, V - S)$. Protože řez respektuje A, $(x, y) \notin A$.
- $T' = (T - \{(x, y)\}) \cup \{(u, v)\}$ je kostra grafu G.

Důkaz.

- (u,v) je lehká hrana křížící $(S, V-S)$ a (x,y) rovněž kříží řez, tedy $w(u,v) \leq w(x,y)$.

Důkaz.

- (u, v) je lehká hrana křížící $(S, V - S)$ a (x, y) rovněž kříží řez, tedy $w(u, v) \leq w(x, y)$.
- Tedy, $w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$.

Důkaz.

- (u, v) je lehká hrana křížící $(S, V - S)$ a (x, y) rovněž kříží řez, tedy $w(u, v) \leq w(x, y)$.
- Tedy, $w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$.
- T je minimální kostra, proto $w(T) \leq w(T')$.

Důkaz.

- (u, v) je lehká hrana křížící $(S, V - S)$ a (x, y) rovněž kříží řez, tedy $w(u, v) \leq w(x, y)$.
- Tedy, $w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$.
- T je minimální kostra, proto $w(T) \leq w(T')$.

- Protože $A \subseteq T$ a $(x, y) \notin A$, $A \subseteq T'$.

Důkaz.

- (u, v) je lehká hrana křížící $(S, V - S)$ a (x, y) rovněž kříží řez, tedy $w(u, v) \leq w(x, y)$.
- Tedy, $w(T') = w(T) - w(x, y) + w(u, v) \leq w(T)$.
- T je minimální kostra, proto $w(T) \leq w(T')$.

- Protože $A \subseteq T$ a $(x, y) \notin A$, $A \subseteq T'$.
- Konečně, $A \cup \{(u, v)\} \subseteq T'$. Protože T' je minimální kostra, je (u, v) bezpečná pro A.

□

Corollary 17.

- *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí* w.
- *Nechť* $A \subseteq E$ *je součástí nějaké minimální kostry* G.
- *Nechť* $C = (V_C, E_C)$ *je souvislá komponenta (strom) v lese* $G_A = (V, A)$.

Pokud (u, v) *je lehká hrana spojující* C *s jinou komponentou z* G_A, *pak* (u, v) *je bezpečná pro* A.

Corollary 17.

- *Nechť* $G = (V, E)$ *je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí* w.
- *Nechť* $A \subseteq E$ *je součástí nějaké minimální kostry* G.
- *Nechť* $C = (V_C, E_C)$ *je souvislá komponenta (strom) v lese* $G_A = (V, A)$.

Pokud (u, v) *je lehká hrana spojující* C *s jinou komponentou z* G_A*, pak* (u, v) *je bezpečná pro* A.

Důkaz.

Řez $(V_C, V - V_C)$ respektuje A a (u, v) je lehká hrana tohoto řezu. Proto je (u, v) bezpečná pro A. □

Kruskalův a Primův (Jarníkův) algoritmus

- Založeny na generickém algoritmu.
- Udávají pravidlo vybírající bezpečnou hranu, viz řádek 3 generického algoritmu.

Kruskalův a Primův (Jarníkův) algoritmus

- Založeny na generickém algoritmu.
- Udávají pravidlo vybírající bezpečnou hranu, viz řádek 3 generického algoritmu.
- V Kruskalově algoritmu je A les a bezpečná hrana přidávaná do A je hrana s nejmenším ohodnocením spojující dvě různne komponenty.

Kruskalův a Primův (Jarníkův) algoritmus

- Založeny na generickém algoritmu.
- Udávají pravidlo vybírající bezpečnou hranu, viz řádek 3 generického algoritmu.
- V Kruskalově algoritmu je A les a bezpečná hrana přidávaná do A je hrana s nejmenším ohodnocením spojující dvě různe komponenty.
- V Primově (Jarníkově) algoritmu je A strom a bezpečná hrana přidávaná do A je hrana s nejmenším ohodnocením spojující strom s uzlem, který není součástí stromu.

Kruskalův algoritmus

```
KRUSKAL-MST(G, w)
A ← ∅
for každý uzel v ∈ V
    do MAKE-SET(v)
uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
for každou hranu (u, v) ∈ E branou v neklesajícím uspořádání podle w
    do if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
          then A ← A ∪ {(u, v)}
               UNION(u, v)
return A
```

- MAKE-SET(v) vytvoří množinu obsahující v.
- FIND-SET(v) vrací reprezentanta množiny obsahující v.
- UNION(u, v) sjednotí dvě množiny obsahující u a v.

Kruskalův algoritmus – Složitost

```
KRUSKAL-MST(G, w)
1  A ← ∅
2  for každý uzel v ∈ V
3      do MAKE-SET(v)
4  uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
5  for každou hranu (u, v) ∈ E branou v neklesajícím uspořádání podle w
6      do if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7            then A ← A ∪ {(u, v)}
8                 UNION(u, v)
9  return A
```

- Řádek 1: $O(1)$, Řádek 4: $O(m \log m)$. Řádky 2-3: n-krát složitost MAKE-SET – závisí na implementaci. Řádky 5-8: $O(m)$-krát FIND-SET a UNION

Kruskalův algoritmus – Složitost

```
KRUSKAL-MST(G, w)
1  A ← ∅
2  for každý uzel v ∈ V
3      do MAKE-SET(v)
4  uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
5  for každou hranu (u, v) ∈ E branou v neklesajícím uspořádání podle w
6      do if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7            then A ← A ∪ {(u, v)}
8                 UNION(u, v)
9  return A
```

- Řádek 1: $O(1)$, Řádek 4: $O(m \log m)$. Řádky 2-3: n-krát složitost MAKE-SET – závisí na implementaci. Řádky 5-8: $O(m)$-krát FIND-SET a UNION
- Toto celkem $O((m+n)\alpha(n))$, α je velmi pomalu rostoucí funkce.

Kruskalův algoritmus – Složitost

```
KRUSKAL-MST(G, w)
1  A ← ∅
2  for každý uzel v ∈ V
3      do MAKE-SET(v)
4  uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
5  for každou hranu (u, v) ∈ E branou v neklesajícím uspořádání podle w
6      do if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7            then A ← A ∪ {(u, v)}
8                 UNION(u, v)
9  return A
```

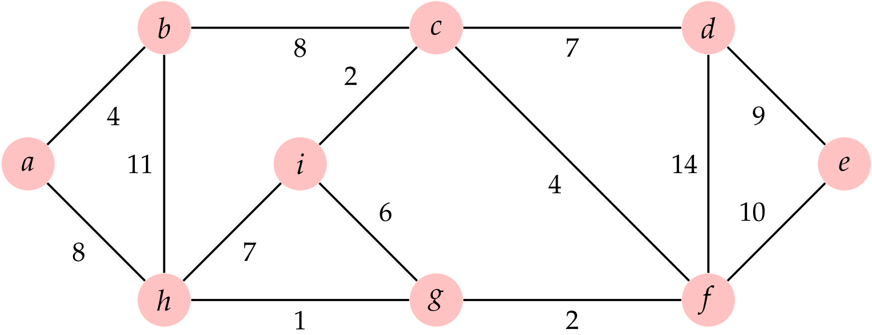
- Řádek 1: $O(1)$, Řádek 4: $O(m \log m)$. Řádky 2-3: n-krát složitost MAKE-SET – závisí na implementaci. Řádky 5-8: $O(m)$-krát FIND-SET a UNION
- Toto celkem $O((m+n)\alpha(n))$, α je velmi pomalu rostoucí funkce.
- G souvislý dává $m \geq n-1$. Proto množinové operace berou $O(m\alpha(n))$. Protože $\alpha(n) = O(\log n) = O(\log m)$, celková složitost je $O(m \log m)$

Kruskalův algoritmus – Složitost

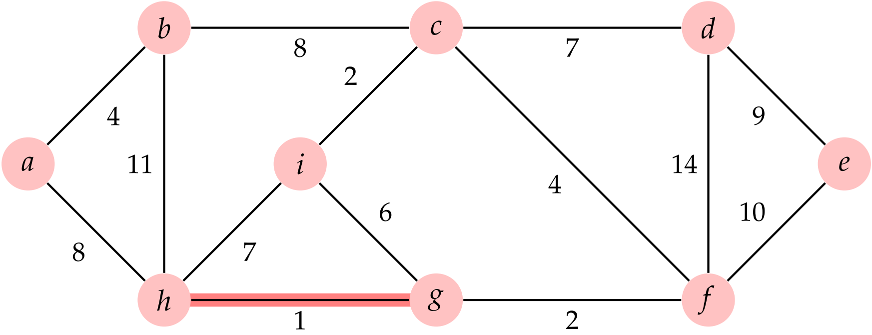
```
KRUSKAL-MST(G, w)
1  A ← ∅
2  for každý uzel v ∈ V
3       do MAKE-SET(v)
4  uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
5  for každou hranu (u, v) ∈ E branou v neklesajícím uspořádání podle w
6       do if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7              then A ← A ∪ {(u, v)}
8                   UNION(u, v)
9  return A
```

- Řádek 1: $O(1)$, Řádek 4: $O(m \log m)$. Řádky 2-3: n-krát složitost MAKE-SET – závisí na implementaci. Řádky 5-8: $O(m)$-krát FIND-SET a UNION
- Toto celkem $O((m+n)\alpha(n))$, α je velmi pomalu rostoucí funkce.
- G souvislý dává $m \geq n-1$. Proto množinové operace berou $O(m\alpha(n))$. Protože $\alpha(n) = O(\log n) = O(\log m)$, celková složitost je $O(m \log m)$
- Když si jestě všimneme, že $m < n^2$, je $\log m = O(\log n)$, proto celkem $O(m \log n)$.

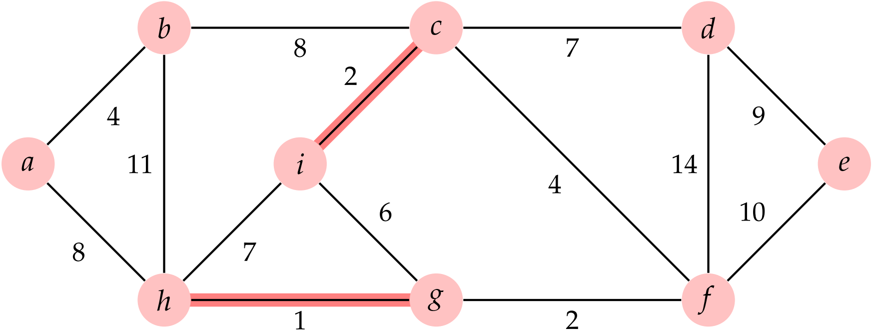
Kruskalův algoritmus – příklad



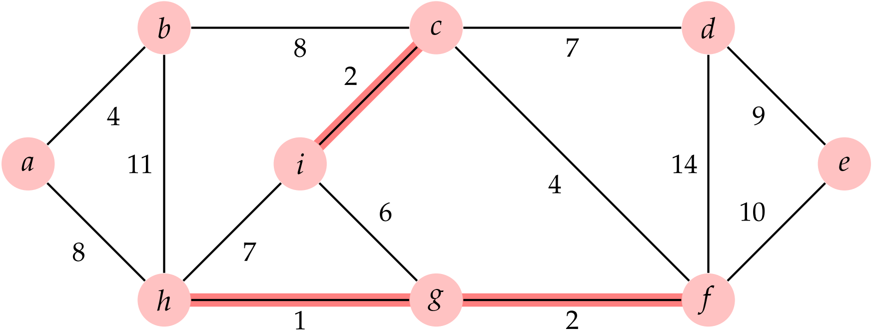
Kruskalův algoritmus – příklad



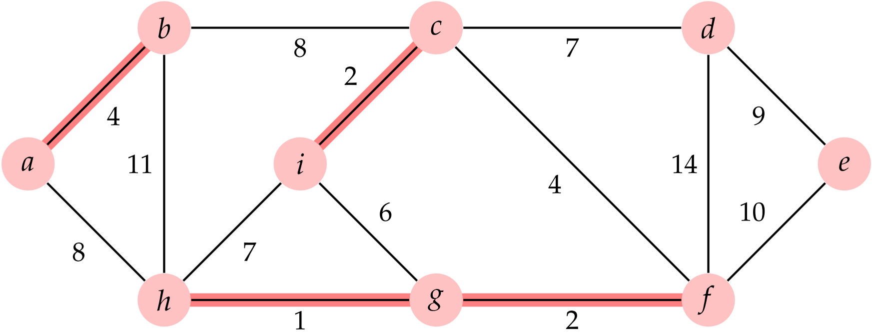
Kruskalův algoritmus – příklad



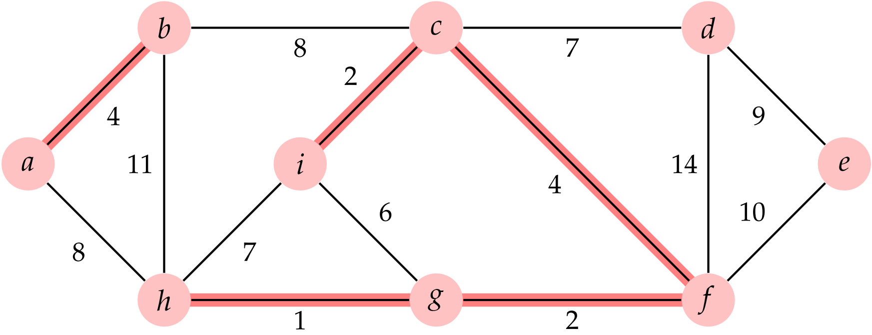
Kruskalův algoritmus – příklad



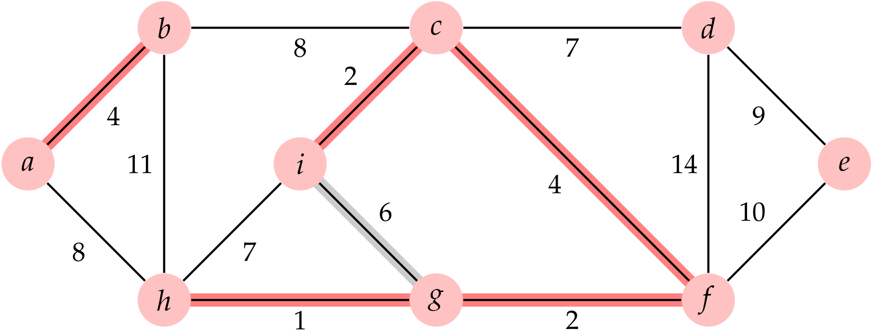
Kruskalův algoritmus – příklad



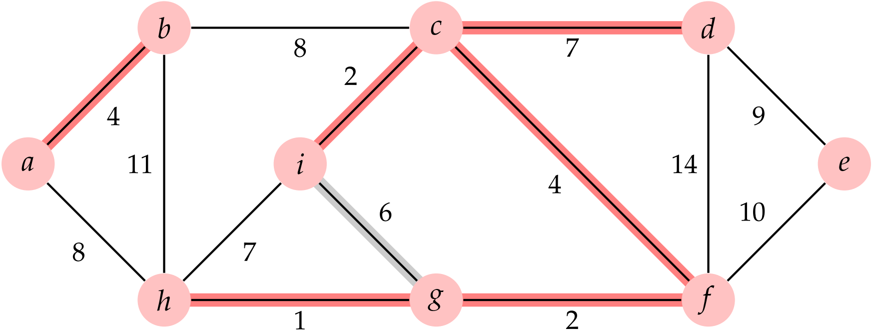
Kruskalův algoritmus – příklad



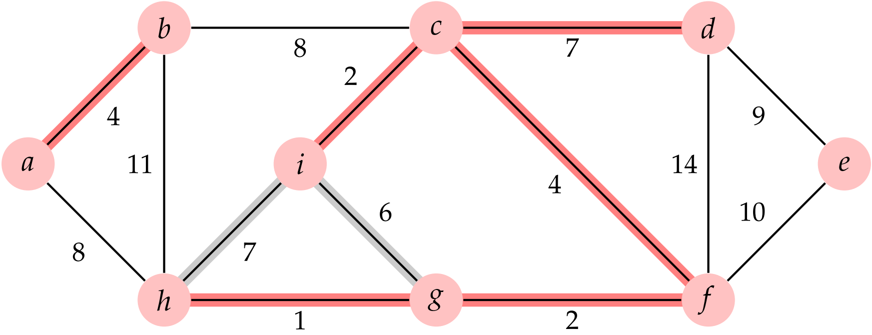
Kruskalův algoritmus – příklad



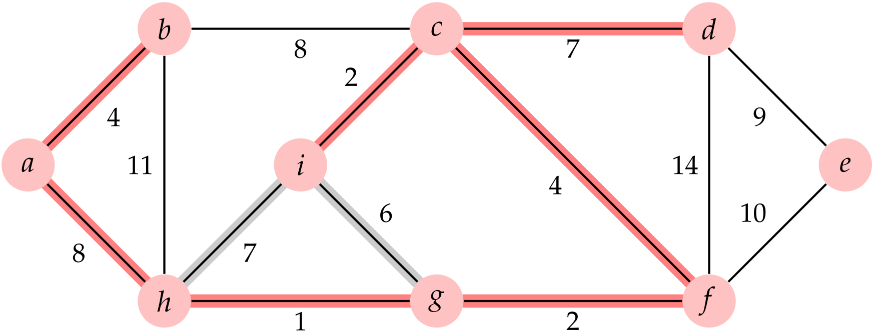
Kruskalův algoritmus – příklad



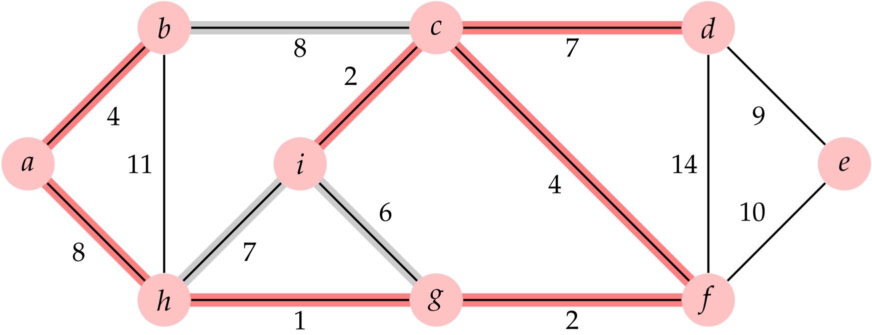
Kruskalův algoritmus – příklad



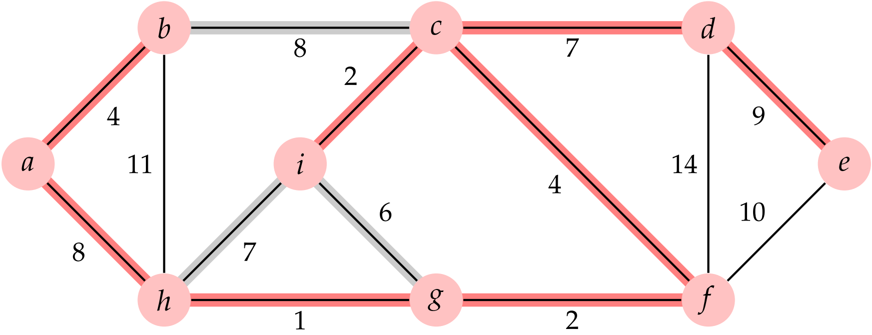
Kruskalův algoritmus – příklad



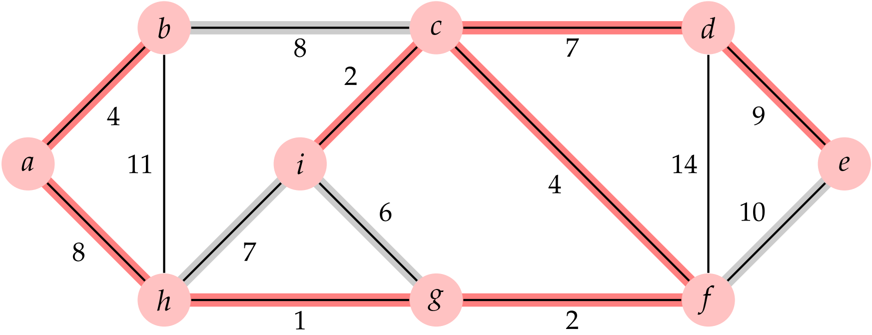
Kruskalův algoritmus – příklad



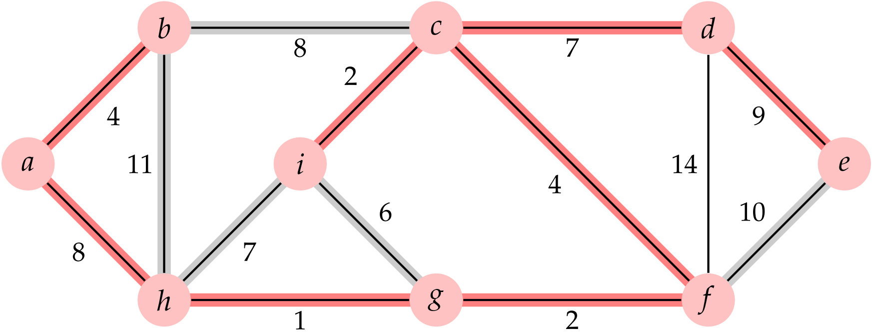
Kruskalův algoritmus – příklad



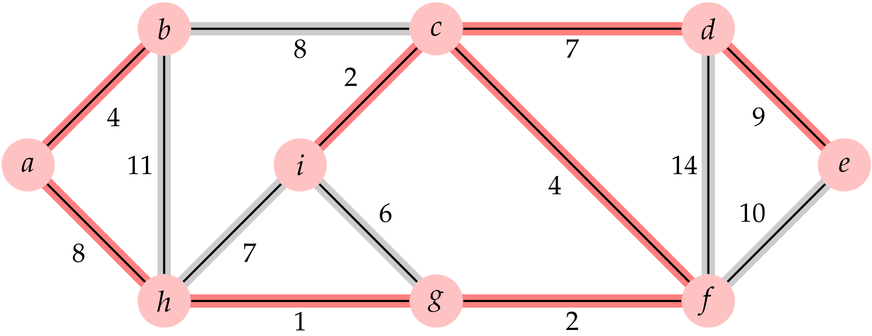
Kruskalův algoritmus – příklad



Kruskalův algoritmus – příklad



Kruskalův algoritmus – příklad



Primův algoritmus

```
PRIM-MST(G, w, r)
for každý u ∈ V
    do key[u] ← ∞
       π[u] ← NIL
key[r] ← 0
Q ← V
while Q ≠ ∅
      do u ← EXTRACT-MIN(Q)
         for každý v ∈ Adj[u]
             do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
                   then π[v] ← u
                        key[v] ← w(u, v)
```

Invariant:

- $A = \{(v, \pi[v]) : v \in V - \{r\} - Q\}$.
- v v min. kostře, pak $v \in V - Q$.
- $v \in Q$. Pokud $\pi[v] \neq NIL$, pak $key[v] < \infty$ a $key[v]$ je hodnota lehké hrany $(v, \pi[v])$ spojující v s uzlem již v min. kostře.

Primův algoritmus – Složitost

```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7          do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8             for každý v ∈ Adj[u]
9                 do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                      then π[v] ← u
11                           key[v] ← w(u, v)
```

- Řádky 1-5: $O(n)$ za použití binární haldy.

Primův algoritmus – Složitost

```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8           for každý v ∈ Adj[u]
9               do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                     then π[v] ← u
11                          key[v] ← w(u, v)
```

- Řádky 1-5: $O(n)$ za použití binární haldy.
- **while** cyklus se proved n-krát a protože EXTRACT-MIN bere $O(\log n)$, je ceklová složitost všech volání EXTRACT-MIN $O(n \log n)$.

Primův algoritmus – Složitost

```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8           for každý v ∈ Adj[u]
9               do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                     then π[v] ← u
11                          key[v] ← w(u, v)
```

- Řádky 1-5: $O(n)$ za použití binární haldy.
- **while** cyklus se proved n-krát a protože EXTRACT-MIN bere $O(\log n)$, je ceklová složitost všech volání EXTRACT-MIN $O(n \log n)$.
- **for** cyklus se provede $O(m)$-krát, protože délka všech seznamů sousedů je dohromady $2m$.
- Řádek 9 se dá udělat v čase $O(1)$.

Primův algoritmus – Složitost

```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8           for každý v ∈ Adj[u]
9               do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                     then π[v] ← u
11                          key[v] ← w(u, v)
```

- Řádky 1-5: $O(n)$ za použití binární haldy.
- **while** cyklus se proved n-krát a protože EXTRACT-MIN bere $O(\log n)$, je ceklová složitost všech volání EXTRACT-MIN $O(n \log n)$.
- **for** cyklus se provede $O(m)$-krát, protože délka všech seznamů sousedů je dohromady $2m$.
- Řádek 9 se dá udělat v čase $O(1)$.
- Řádek 11 bere $O(\log n)$ – provést operaci DECREASE-KEY v Q.

Primův algoritmus – Složitost

```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7         do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8            for každý v ∈ Adj[u]
9                do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                     then π[v] ← u
11                          key[v] ← w(u, v)
```

- Řádky 1-5: $O(n)$ za použití binární haldy.
- **while** cyklus se proved n-krát a protože EXTRACT-MIN bere $O(\log n)$, je ceklová složitost všech volání EXTRACT-MIN $O(n \log n)$.
- **for** cyklus se provede $O(m)$-krát, protože délka všech seznamů sousedů je dohromady $2m$.
- Řádek 9 se dá udělat v čase $O(1)$.
- Řádek 11 bere $O(\log n)$ – provést operaci DECREASE-KEY v Q.
- Celkem tedy $O(n \log n + m \log n) = O(m \log n)$.

Primův algoritmus – Složitost

- Použitím Fibonacciho haldy se dá složitost vylepšit.

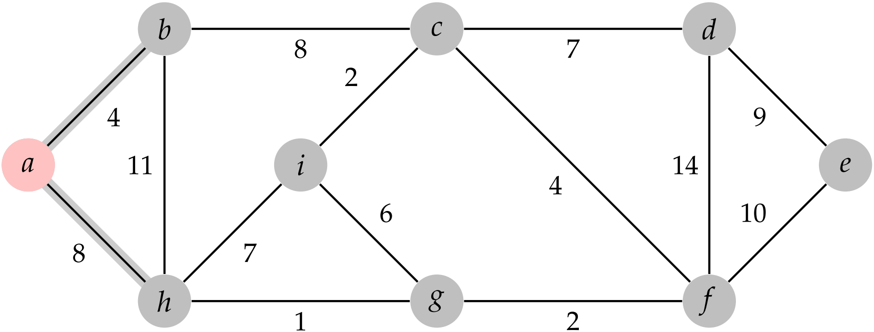
Primův algoritmus – Složitost

- Použitím Fibonacciho haldy se dá složitost vylepšit.
- Operace Extract-Min v čase $O(\log n)$
- Operace Decrease-Key v čase $O(1)$.

Primův algoritmus – Složitost

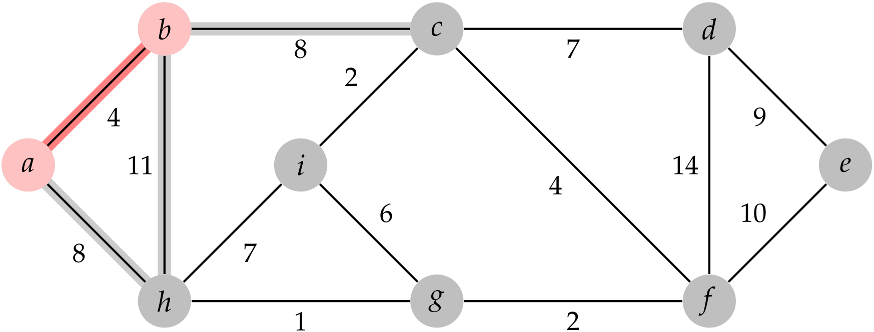
- Použitím Fibonacciho haldy se dá složitost vylepšit.
- Operace Extract-Min v čase $O(\log n)$
- Operace Decrease-Key v čase $O(1)$.
- Celková složitost je pak $O(m + n \log n)$.

Primův algoritmus – příklad



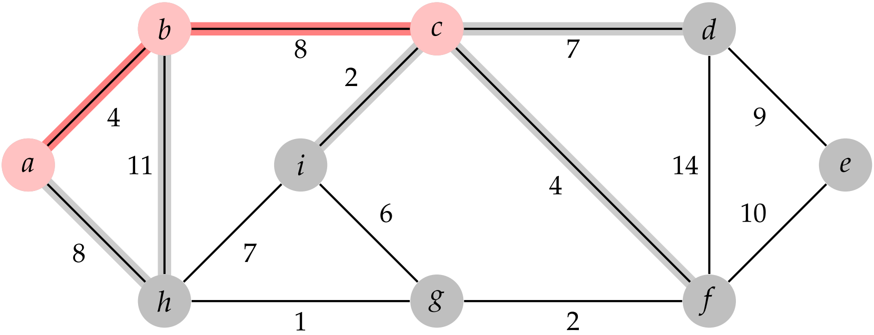
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



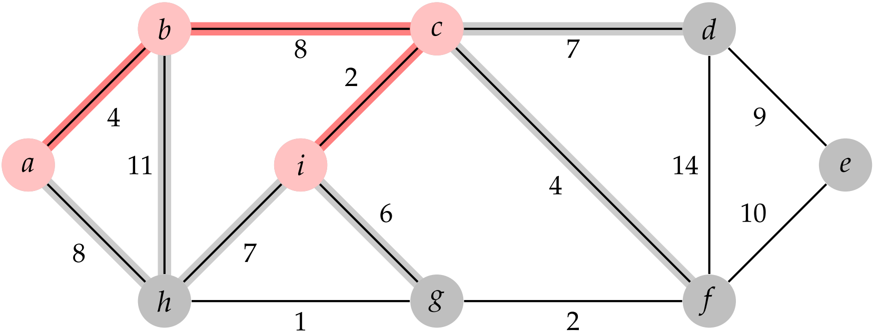
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



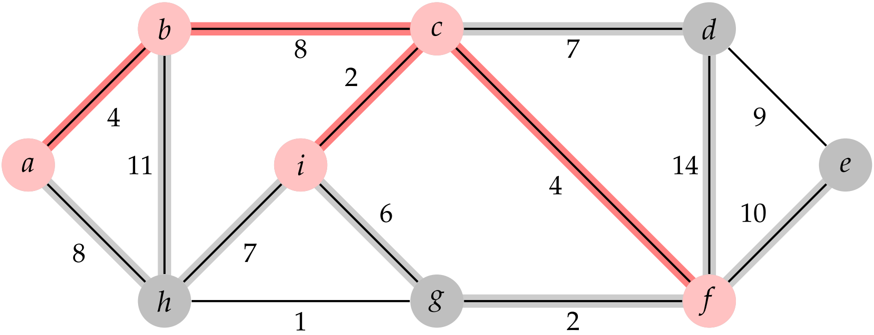
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



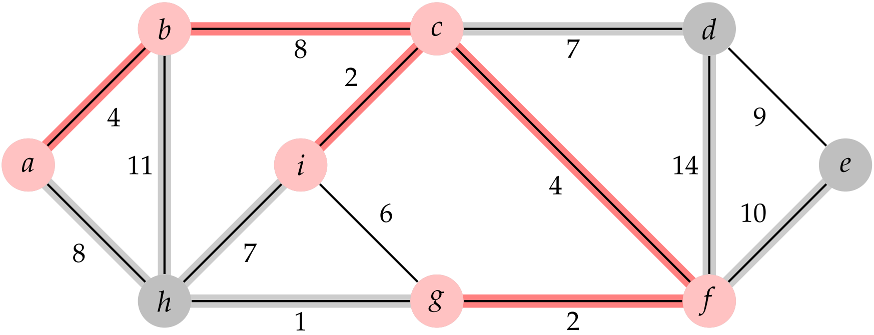
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



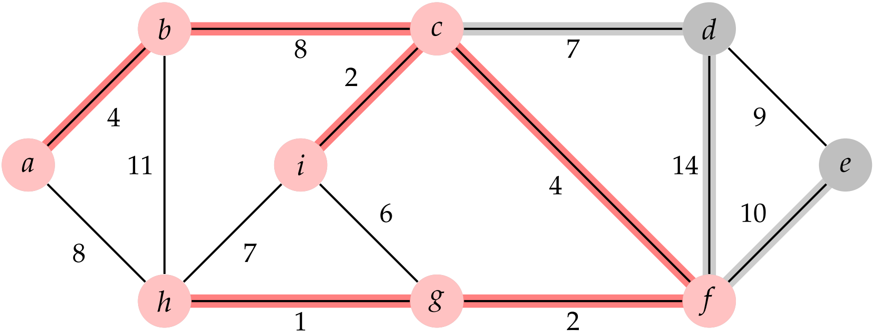
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



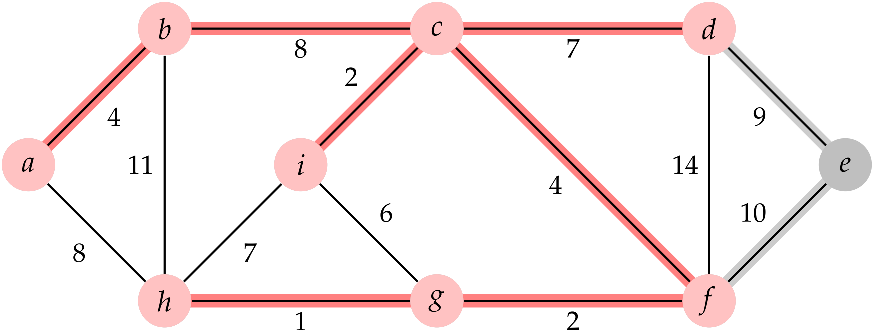
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



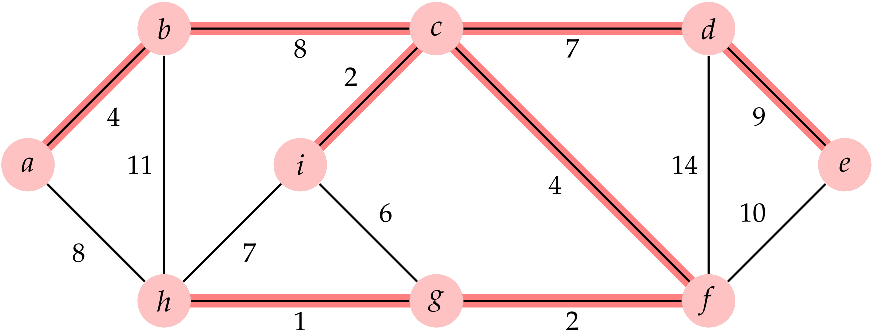
Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Primův algoritmus – příklad



Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $w : E \to \mathbb{R}$.

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $w : E \to \mathbb{R}$.

- Cena cesty $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je suma

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $w : E \to \mathbb{R}$.

- Cena cesty $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je suma

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- Cena nejkratší cesty z u do v je

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\leadsto} v\} & \text{pokud ex. cesta z } u \text{ do } v \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$$

- Nejkratší cesta z u do v je pak libovolná cesta p z u do v s $w(p) = \delta(u, v)$.

Nejkratší cesty – varianty

- Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů
- Nejkratší cesty ze všech uzlů do jednoho – převrácením orientace hran
- Z jednoho do jednoho – existuje asymptoticky rychlejší řešení než pomocí výše zmíněných?
- Ze všech do všech – existuje rychlejší řešení než výše zmíněné spuštěné pro každý uzel.

Podcesty nejkratších cest

Lemma 18.
Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf s váhovou funkcí* $w : E \to \mathbb{R}$. *Nechť* $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ *je nejkratší cesta z* v_1 *do* v_k. *Pro* $1 \leq i \leq j \leq k$, $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ *je podcesta cesty* p *z* v_i *do* v_j. *Pak* p_{ij} *je nejkratší cesta z* v_i *do* v_j.

Důkaz.

$\square$

Podcesty nejkratších cest

Lemma 18.
Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf s váhovou funkcí* $w : E \to \mathbb{R}$*. Nechť* $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ *je nejkratší cesta z* v_1 *do* v_k*. Pro* $1 \le i \le j \le k$, $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ *je podcesta cesty* p *z* v_i *do* v_j*. Pak* p_{ij} *je nejkratší cesta z* v_i *do* v_j*.*

Důkaz.

- p je $v_1 \overset{p_{1i}}{\leadsto} v_i \overset{p_{ij}}{\leadsto} v_j \overset{p_{jk}}{\leadsto} v_k$ kde $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$.

$\square$

Podcesty nejkratších cest

Lemma 18.
Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf s váhovou funkcí* $w : E \to \mathbb{R}$. *Nechť* $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ *je nejkratší cesta z* v_1 *do* v_k.
Pro $1 \leq i \leq j \leq k$, $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ *je podcesta cesty* p *z* v_i *do* v_j.
Pak p_{ij} *je nejkratší cesta z* v_i *do* v_j.

Důkaz.

- p je $v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$ kde $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$.
- Nechť ex. p'_{ij} z v_i do v_j s $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$.

$\square$

Podcesty nejkratších cest

Lemma 18.
Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf s váhovou funkcí* $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. *Nechť* $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ *je nejkratší cesta z* v_1 *do* v_k. *Pro* $1 \leq i \leq j \leq k$, $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ *je podcesta cesty* p *z* v_i *do* v_j. *Pak* p_{ij} *je nejkratší cesta z* v_i *do* v_j.

Důkaz.

- p je $v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$ kde $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$.
- Nechť ex. p'_{ij} z v_i do v_j s $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$.
- Pak $v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p'_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$ kde $w(p_{1i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk}) < w(p)$. Spor.

$\square$

Záporné hrany

- Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak pro všechna $v \in V$, $\delta(s, v)$ zůstává dobře definována (i když má zápornou hodnotu).

Záporné hrany

- Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak pro všechna $v \in V$, $\delta(s, v)$ zůstává dobře definována (i když má zápornou hodnotu).

- Pokud G obsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak δ nezůstává dobře definována – stále prochází cyklem a snižuje hodnotu.
- Pokud ex. záporný cyklus na nějaké cestě z s do v, definujeme $\delta(s, v) = -\infty$.

Záporné hrany

- Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak pro všechna $v \in V$, $\delta(s, v)$ zůstává dobře definována (i když má zápornou hodnotu).
- Pokud G obsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak δ nezůstává dobře definována – stále prochází cyklem a snižuje hodnotu.
- Pokud ex. záporný cyklus na nějaké cestě z s do v, definujeme $\delta(s, v) = -\infty$.
- Pozn. nejkratší cesta vždy existuje, ne však nejkratší sled. Algoritmy pracují se sledy, proto výše zmíněný problém.

Reprezentace nejkratších cest

- $G = (V, E)$ graf.
- $\pi[v]$ označuje předchůdce v na nejkratší cestě.
- Pro vypsání můžeme použít proceduru $\textsc{Print-Path}(G, s, v)$ (viz dříve)

Reprezentace nejkratších cest

- $G = (V, E)$ graf.
- $\pi[v]$ označuje předchůdce v na nejkratší cestě.
- Pro vypsání můžeme použít proceduru $\textsc{Print-Path}(G, s, v)$ (viz dříve)

- Podgraf předchůdců $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ je indukovaný hodnotami π
  - $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq NIL\} \cup \{s\}$
  - $E_\pi = \{(\pi[v], v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\}$

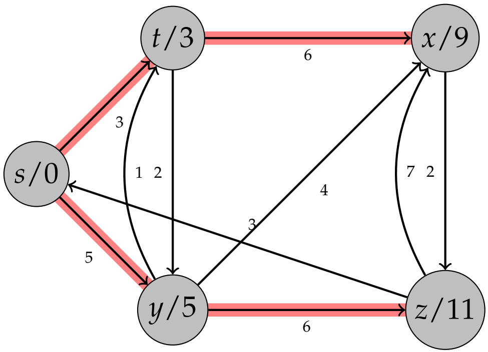
Reprezentace nejkratších cest

- $G = (V, E)$ graf.
- $\pi[v]$ označuje předchůdce v na nejkratší cestě.
- Pro vypsání můžeme použít proceduru $\textsc{Print-Path}(G, s, v)$ (viz dříve)

- Podgraf předchůdců $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ je indukovaný hodnotami π
  - $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq NIL\} \cup \{s\}$
  - $E_\pi = \{(\pi[v], v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\}$

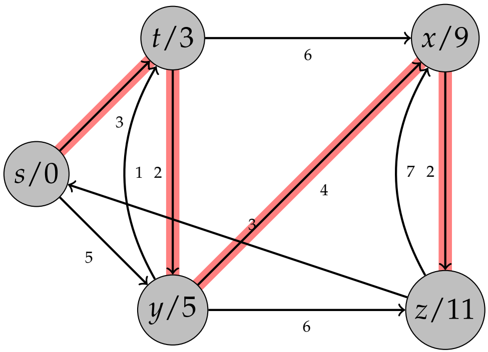
- V okamžiku dokončení výpočtu algoritmu je G_π strom nejkratších cest. Tj. kořenový strom obsahující nejkratší cesty ze zdroje s do všech ostatních uzlů.

Nejedinečnost nejkratších cest – příklad



Obrázek: Nejkratší cesty.

Nejedinečnost nejkratších cest – příklad



Obrázek: Nejkratší cesty.

Relaxace

- $d[v]$ – odhad nejkratší cesty

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

for každý $v \in V$
  do $d[v] \leftarrow \infty$
    $\pi[v] \leftarrow \mathrm{NIL}$
$d[s] \leftarrow 0$

- Složitost $\Theta(n)$.

Relaxace

- $d[v]$ – odhad nejkratší cesty

INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)

for každý $v \in V$
  do $d[v] \leftarrow \infty$
    $\pi[v] \leftarrow$ NIL
$d[s] \leftarrow 0$

- Složitost $\Theta(n)$.

RELAX(u, v, w)

if $d[v] > d[u] + w(u, v)$
  then $d[v] \leftarrow d[u] + w(u, v)$
    $\pi[v] \leftarrow u$

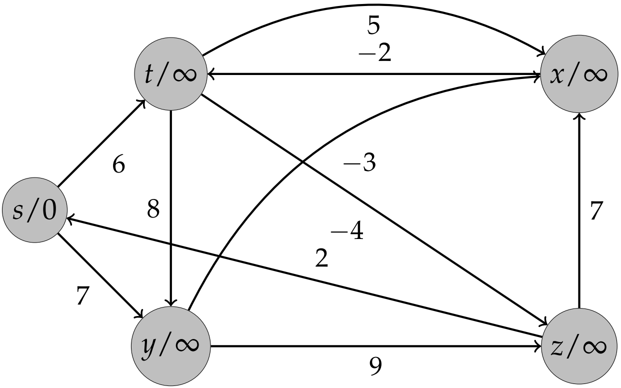
Algoritmus Bellman-Ford

Algoritmus Bellman-Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
  for i ← 1 to n − 1
      do for každou hranu (u, v) ∈ E
              do RELAX(u, v, w)
  for každou hranu (u, v) ∈ E
      do if d[v] > d[u] + w(u, v)
            then return FALSE
  return TRUE
```

- Pokud vrátí FALSE, G obsahuje zápornou kružnici.
- Pokud vrátí TRUE, má v π uloženy nejkratší cesty.

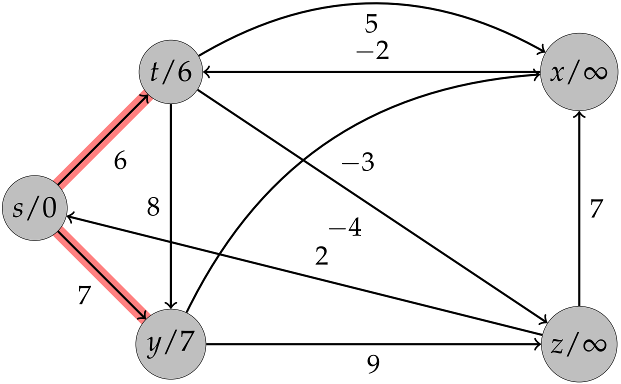
Bellman-Ford – příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- Pokud $(u,v) \in E$ je označená, pak $\pi[v] = u$
- Hrany se relaxují v tomto pořadí:
  $(t,x),(t,y),(t,z),(x,t),(y,x),(y,z),(z,x),(z,s),(s,t),(s,y)$.

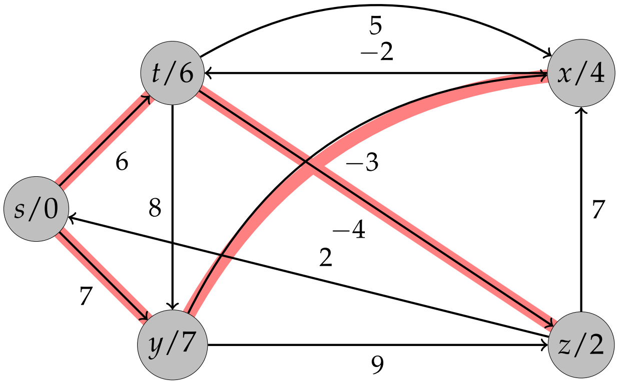
Bellman-Ford – příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- Pokud $(u, v) \in E$ je označená, pak $\pi[v] = u$
- Hrany se relaxují v tomto pořadí: $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$.

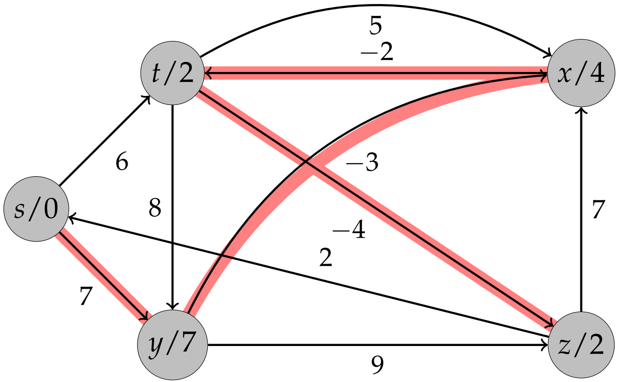
Bellman-Ford – příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- Pokud $(u,v) \in E$ je označená, pak $\pi[v] = u$
- Hrany se relaxují v tomto pořadí: $(t,x),(t,y),(t,z),(x,t),(y,x),(y,z),(z,x),(z,s),(s,t),(s,y)$.

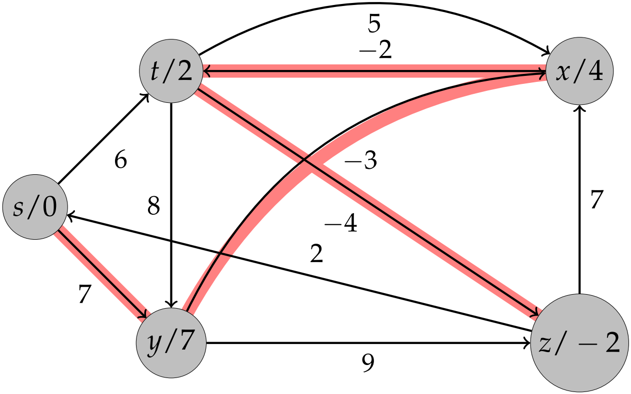
Bellman-Ford – příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- Pokud $(u, v) \in E$ je označená, pak $\pi[v] = u$
- Hrany se relaxují v tomto pořadí: $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$.

Bellman-Ford – příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- Pokud $(u, v) \in E$ je označená, pak $\pi[v] = u$
- Hrany se relaxují v tomto pořadí: $(t, x), (t, y), (t, z), (x, t), (y, x), (y, z), (z, x), (z, s), (s, t), (s, y)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Složitost

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  for i ← 1 to n − 1
3       do for každou hranu (u, v) ∈ E
4               do RELAX(u, v, w)
5  for každou hranu (u, v) ∈ E
6       do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7              then return FALSE
8  return TRUE
```

- Řádek 1 bere $\Theta(n)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Složitost

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  for i ← 1 to n − 1
3      do for každou hranu (u, v) ∈ E
4              do RELAX(u, v, w)
5  for každou hranu (u, v) ∈ E
6      do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7            then return FALSE
8  return TRUE
```

- Řádek 1 bere $\Theta(n)$.
- Řádky 2-4 berou $n-1$-krát $\Theta(m)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Složitost

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  for i ← 1 to n − 1
3      do for každou hranu (u, v) ∈ E
4             do RELAX(u, v, w)
5  for každou hranu (u, v) ∈ E
6      do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7            then return FALSE
8  return TRUE
```

- Řádek 1 bere $\Theta(n)$.
- Řádky 2-4 berou $n - 1$-krát $\Theta(m)$.
- Řádky 5-7 berou $\Theta(m)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Složitost

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  for i ← 1 to n − 1
3      do for každou hranu (u, v) ∈ E
4             do RELAX(u, v, w)
5  for každou hranu (u, v) ∈ E
6      do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7            then return FALSE
8  return TRUE
```

- Řádek 1 bere $\Theta(n)$.
- Řádky 2-4 berou $n - 1$-krát $\Theta(m)$.
- Řádky 5-7 berou $\Theta(m)$.
- Celkem $\Theta(mn)$.

Lemma 19.

Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem* s *a váhovou funkcí* $w : E \to \mathbb{R}$ *a předpokládejme, že* G *neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z* s*. Pak po* $n-1$ *opakování* **for***-cyklu na řádcích 2-4* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro všechny* $v \in V$ *dosažitelné z* s*.* **Pozn.** $d[v] = \infty$*, pak* v *nedosažitelný z* s*.*

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.

Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem s a váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$ a předpokládejme, že G neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z s. Pak po $n - 1$ opakování **for***-cyklu na řádcích 2-4 $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ dosažitelné z s.* **Pozn.** *$d[v] = \infty$, pak v nedosažitelný z s.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.

Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem s a váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$ a předpokládejme, že G neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z s. Pak po $n - 1$ opakování **for***-cyklu na řádcích 2-4 $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ dosažitelné z s.* **Pozn.** *$d[v] = \infty$, pak v nedosažitelný z s.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z s do v; $s = v_0$ a $v = v_k$.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.

Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem* s *a váhovou funkcí* $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ *a předpokládejme, že* G *neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z* s*. Pak po* $n-1$ *opakování* **for***-cyklu na řádcích 2-4* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro všechny* $v \in V$ *dosažitelné z* s*.* **Pozn.** $d[v] = \infty$*, pak* v *nedosažitelný z* s*.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z s do v; $s = v_0$ a $v = v_k$.
- p má nejvýše $n-1$ hran, proto $k \leq n-1$.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.
Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem* s *a váhovou funkcí* $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ *a předpokládejme, že* G *neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z* s*. Pak po* $n-1$ *opakování* **for**-*cyklu na řádcích 2-4* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro všechny* $v \in V$ *dosažitelné z* s*.* **Pozn.** $d[v] = \infty$*, pak* v *nedosažitelný z* s*.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z s do v; $s = v_0$ a $v = v_k$.
- p má nejvýše $n-1$ hran, proto $k \leq n-1$.
- Každá z $n-1$ iterací na řádcích 2-4 relaxuje všech m hran.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.
Nechť $G = (V, E)$ *je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem* s *a váhovou funkcí* $w : E \to \mathbb{R}$ *a předpokládejme, že* G *neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z* s*. Pak po* $n-1$ *opakování* **for***-cyklu na řádcích 2-4* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro všechny* $v \in V$ *dosažitelné z* s*.* **Pozn.** $d[v] = \infty$*, pak* v *nedosažitelný z* s*.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z s do v; $s = v_0$ a $v = v_k$.
- p má nejvýše $n-1$ hran, proto $k \leq n-1$.
- Každá z $n-1$ iterací na řádcích 2-4 relaxuje všech m hran.
- Mezi hranami relaxovanými v i-tém kroku je i hrana (v_{i-1}, v_i) a po tomto kroku platí $d[v_i] = \delta(s, v_i)$. (Dokažte indukcí.)

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.
Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem s a váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$ a předpokládejme, že G neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z s. Pak po $n-1$ opakování **for***-cyklu na řádcích 2-4 $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ dosažitelné z s.* **Pozn.** *$d[v] = \infty$, pak v nedosažitelný z s.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z s do v; $s = v_0$ a $v = v_k$.
- p má nejvýše $n-1$ hran, proto $k \leq n-1$.
- Každá z $n-1$ iterací na řádcích 2-4 relaxuje všech m hran.
- Mezi hranami relaxovanými v i-tém kroku je i hrana (v_{i-1}, v_i) a po tomto kroku platí $d[v_i] = \delta(s, v_i)$. (Dokažte indukcí.)
- Tedy po k-té iteraci je $d[v_k] = \delta(s, v_k)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 20 (Korektnost I).

- *Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s, algoritmus vrací* $\textsc{True}$ *a* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro všechny* $v \in V$.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 20 (Korektnost I).

- *Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s, algoritmus vrací* $\textsc{True}$ *a* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro všechny* $v \in V$*.*

Důkaz.

- Nechť G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s.

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 20 (Korektnost I).

- *Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s, algoritmus vrací* $\textsc{True}$ *a $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$.*

Důkaz.

- Nechť G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s.
- Po ukončení algoritmu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ (Lemma 19)

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 20 (Korektnost I).

- *Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s, algoritmus vrací* $\textsc{True}$ *a $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$.*

Důkaz.

- Nechť G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s.
- Po ukončení algoritmu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ (Lemma 19)
- Navíc, $d[v] = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v) = d[u] + w(u, v)$. Proto algoritmus vrací $\textsc{True}$.

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* FALSE.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* FALSE.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* FALSE.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.
- Pak $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$.

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* FALSE.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.
- Pak $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$.
- Sporem – alg. vrací TRUE, tj. $d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud* G *obsahuje záp. cyklus dosažitelný z* s*, alg. vrací* $\textsc{False}$.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.
- Pak $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$.
- Sporem – alg. vrací $\textsc{True}$, tj. $d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Pak ale $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \leq \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$.

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* $\textsc{False}$.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.
- Pak $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$.
- Sporem – alg. vrací $\textsc{True}$, tj. $d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Pak ale $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \leq \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$.
- Protože $v_0 = v_k$, máme $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}]$.

$\square$

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Theorem 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* $\textsc{False}$.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.
- Pak $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$.
- Sporem – alg. vrací $\textsc{True}$, tj. $d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Pak ale $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \leq \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$.
- Protože $v_0 = v_k$, máme $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}]$.
- Jelikož pro $i = 1, 2, \ldots, k$ je $d[v_i] < \infty$, máme $0 \leq \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$. Spor.

$\square$

Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů v acyklických grafech

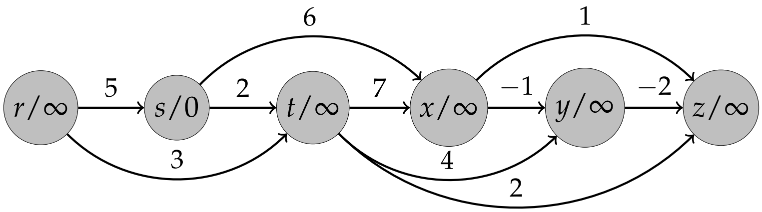
Nejkratší cesty v acyklických grafech

- Pro acyklické grafy existuje rychlejší metoda než Bellman-Ford.

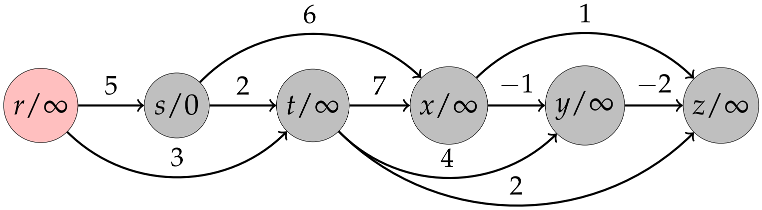
```
DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
1  Topologicky uspořádej uzly grafu G
2  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
3  for každý uzel u, brané podle topologického uspořádání
4       do for každý uzel v ∈ Adj[u]
5              do RELAX(u, v, w)
```

- Časová složitost $\Theta(n+m)$.
  - Časová složitost topologického uspořádání je $\Theta(n+m)$.
  - Řádek dva má složitost $\Theta(n)$.
  - Řádky 3-5 projdou každou hranu právě jednou, tj. vnitřní cyklus se provede m-krát. RELAX je konstantní.

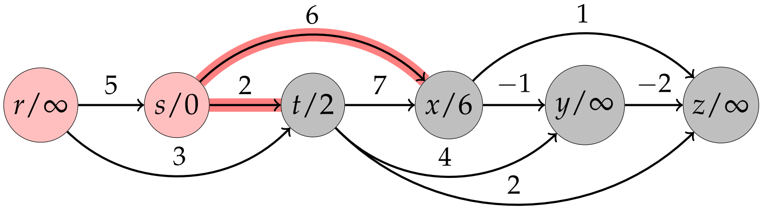
Příklad



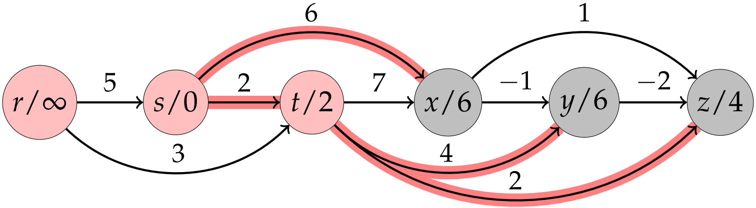
Příklad



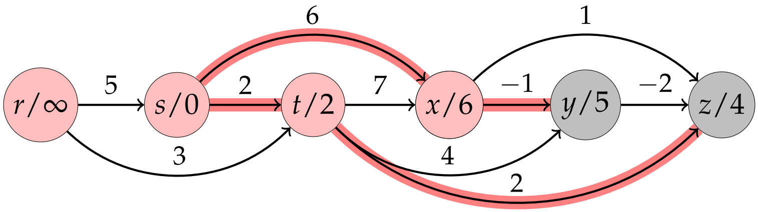
Příklad



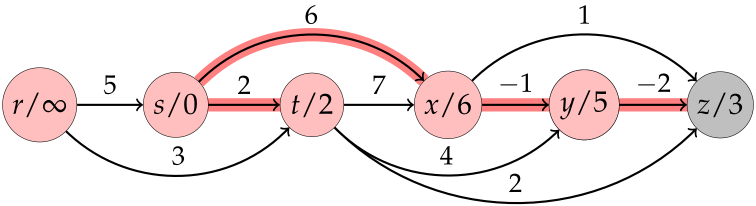
Příklad



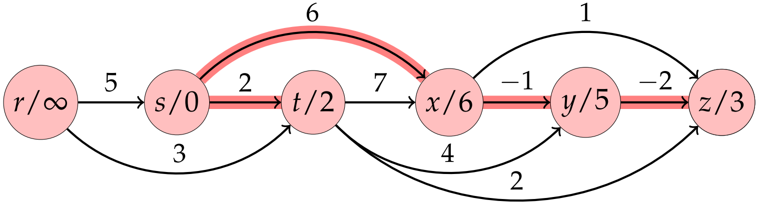
Příklad



Příklad



Příklad



Korektnost

Theorem 22.
Pokud ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ *má zdrojový uzel* s *a žádný cyklus, pak* DAG-SHORTEST-PATHS *procedura vypočítá* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro* $v \in V$.

Korektnost

Theorem 22.
Pokud ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ *má zdrojový uzel* s *a žádný cyklus, pak* DAG-SHORTEST-PATHS *procedura vypočítá* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro* $v \in V$.

Důkaz.

- Pokud v nedosažitelný z s, pak $d[v] = \delta(s, v) = \infty$.

□

Korektnost

Theorem 22.
Pokud ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ má zdrojový uzel s a žádný cyklus, pak DAG-SHORTEST-PATHS *procedura vypočítá $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.*

Důkaz.

- Pokud v nedosažitelný z s, pak $d[v] = \delta(s, v) = \infty$.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, kde $s = v_0$ a $v = v_k$.

$\square$

Korektnost

Theorem 22.
Pokud ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ má zdrojový uzel s a žádný cyklus, pak DAG-SHORTEST-PATHS *procedura vypočítá $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.*

Důkaz.

- Pokud v nedosažitelný z s, pak $d[v] = \delta(s, v) = \infty$.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, kde $s = v_0$ a $v = v_k$.
- Jelikož algoritmus prochází uzly podle topologického uspořádání, jsou hrany p relaxovány v pořadí $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.

□

Korektnost

Theorem 22.
Pokud ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ má zdrojový uzel s a žádný cyklus, pak DAG-SHORTEST-PATHS *procedura vypočítá $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.*

Důkaz.

- Pokud v nedosažitelný z s, pak $d[v] = \delta(s, v) = \infty$.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, kde $s = v_0$ a $v = v_k$.
- Jelikož algoritmus prochází uzly podle topologického uspořádání, jsou hrany p relaxovány v pořadí $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Z toho plyne, že $d[v_i] = \delta(s, v_i)$ po ukončení algoritmu (dokažte).

$\square$

Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus

- Pouze pro ohodnocené orientované grafy bez záporných ohodnocení.
- $w(u,v) \geq 0$ pro každou hranu $(u,v) \in E$.

Dijkstrův algoritmus

- Pouze pro ohodnocené orientované grafy bez záporných ohodnocení.
- $w(u,v) \geq 0$ pro každou hranu $(u,v) \in E$.

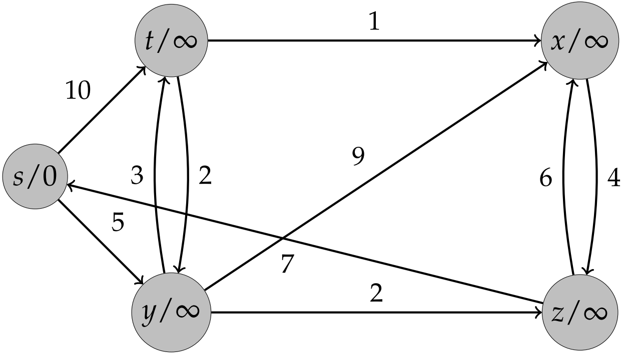
- Je možno jej naimplementovat tak, že jeho časová složitost je nižší než algoritmu Bellman-Ford.

Dijkstrův algoritmus

- S je množina uzlů, jejichž nejkratší vzdálenost od s již byla vypočtena.
- Q je prioritní fronta; uzel s min. d-hodnotou na vrcholu fronty.

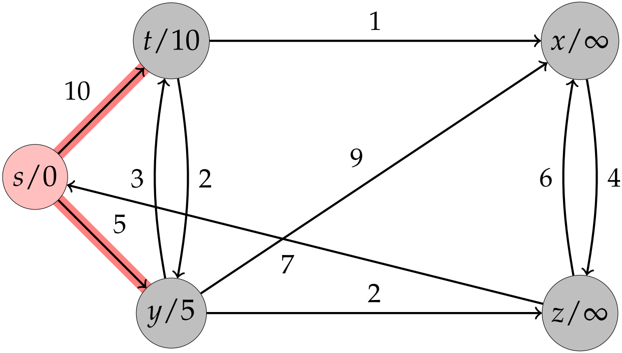
```
DIJKSTRA(G, w, s)
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
S ← ∅
Q ← V
while Q ≠ ∅
        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
           S ← S ∪ {u}
           for každý uzel v ∈ Adj[u]
               do RELAX(u, v, w)
```

Dijkstrův algoritmus – příklad



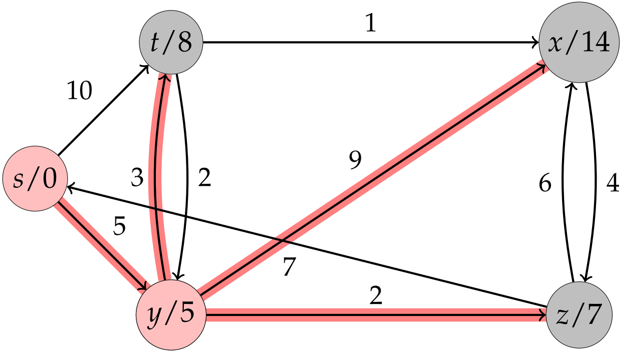
Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Dijkstrův algoritmus – příklad



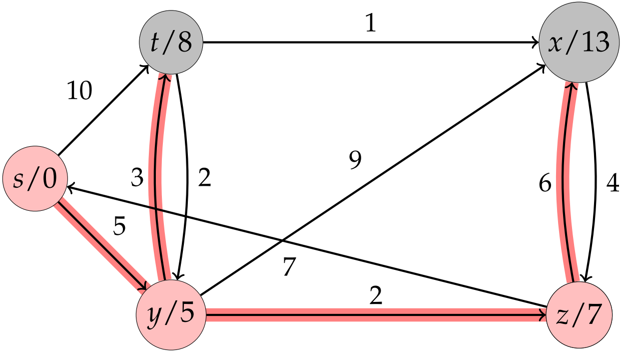
Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Dijkstrův algoritmus – příklad



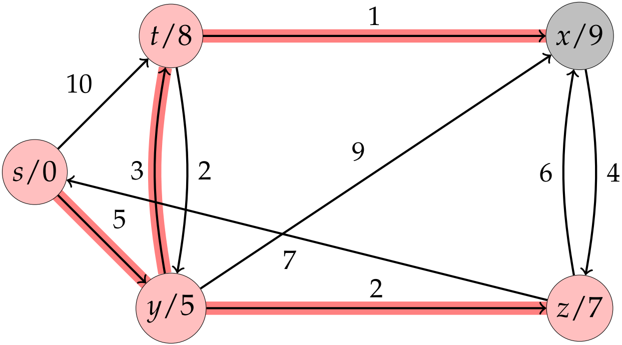
Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Dijkstrův algoritmus – příklad



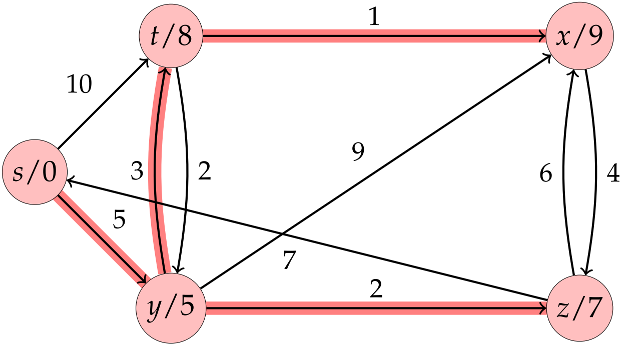
Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Dijkstrův algoritmus – příklad



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Dijkstrův algoritmus – příklad



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ *bez záporných hran s zdojem* s, *skončí a* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro* $v \in V$.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.
- Nechť u je první uzel pro nějž $d[u] \neq \delta(s, u)$ v okamžiku přidání do S.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.
- Nechť u je první uzel pro nějž $d[u] \neq \delta(s, u)$ v okamžiku přidání do S.
- Pak musí být $u \neq s$, protože s je přidaný jako první do S a $d[s] = \delta(s, s) = 0$ platí v okamžiku přidání s do S.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.
- Nechť u je první uzel pro nějž $d[u] \neq \delta(s, u)$ v okamžiku přidání do S.
- Pak musí být $u \neq s$, protože s je přidaný jako první do S a $d[s] = \delta(s, s) = 0$ platí v okamžiku přidání s do S.
- Protože $u \neq s$, je $S \neq \emptyset$ (těsně) před přidáním u.

Korektnost

Theorem 23.
Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.
- Nechť u je první uzel pro nějž $d[u] \neq \delta(s, u)$ v okamžiku přidání do S.
- Pak musí být $u \neq s$, protože s je přidaný jako první do S a $d[s] = \delta(s, s) = 0$ platí v okamžiku přidání s do S.
- Protože $u \neq s$, je $S \neq \emptyset$ (těsně) před přidáním u.
- Z předpokladu $d[u] \neq \delta(s, u)$ plyne existence cesty z s do u – jinak je $d[u] = \delta(s, u) = \infty$.

Korektnost

Theorem 23.

Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran s zdojem s, skončí a $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.
- Nechť u je první uzel pro nějž $d[u] \neq \delta(s, u)$ v okamžiku přidání do S.
- Pak musí být $u \neq s$, protože s je přidaný jako první do S a $d[s] = \delta(s, s) = 0$ platí v okamžiku přidání s do S.
- Protože $u \neq s$, je $S \neq \emptyset$ (těsně) před přidáním u.
- Z předpokladu $d[u] \neq \delta(s, u)$ plyne existence cesty z s do u – jinak je $d[u] = \delta(s, u) = \infty$.
- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.

$\square$

Korektnost

Pokračování důkazu.

- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.
- Těsně před přidáním u do S spojuje p uzel $s \in S$ s uzlem $u \in V - S$.

□

Korektnost

Pokračování důkazu.

- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.
- Těsně před přidáním u do S spojuje p uzel $s \in S$ s uzlem $u \in V - S$.
- Rozložme p následovně:

$$s \overset{p_1}{\leadsto} x \longrightarrow y \overset{p_2}{\leadsto} u\,,$$

kde y je první uzel na cestě, který leží ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.

□

Korektnost

Pokračování důkazu.

- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.
- Těsně před přidáním u do S spojuje p uzel $s \in S$ s uzlem $u \in V - S$.
- Rozložme p následovně:

$$s \overset{p_1}{\leadsto} x \longrightarrow y \overset{p_2}{\leadsto} u \,,$$

  kde y je první uzel na cestě, který leží ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- Podle přepokladu máme, že $d[x] = \delta(s, x)$ v okamžiku přidání x do S.

□

Korektnost

Pokračování důkazu.

- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.
- Těsně před přidáním u do S spojuje p uzel $s \in S$ s uzlem $u \in V - S$.
- Rozložme p následovně:

$$s \overset{p_1}{\leadsto} x \longrightarrow y \overset{p_2}{\leadsto} u\,,$$

  kde y je první uzel na cestě, který leží ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- Podle přepokladu máme, že $d[x] = \delta(s, x)$ v okamžiku přidání x do S.
- Jelikož v tomto okamžiku byla hrana (x, y) relaxována, $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S (dokažte).

$\square$

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \longrightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \to y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\leadsto} x \to y \overset{p_2}{\leadsto} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$.
- Tedy, $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$.
- Tedy, $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$.
- Protože však oba uzly $y, u \in V - S$ v okamžiku, kdy u byl vybrán, je $d[u] \leq d[y]$.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\leadsto} x \rightarrow y \overset{p_2}{\leadsto} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$.
- Tedy, $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$.
- Protože však oba uzly $y, u \in V - S$ v okamžiku, kdy u byl vybrán, je $d[u] \leq d[y]$.
- Celkem tedy $d[u] = \delta(s, u)$. Spor – špatný předpoklad.

□

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\leadsto} x \to y \overset{p_2}{\leadsto} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$.
- Tedy, $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$.
- Protože však oba uzly $y, u \in V - S$ v okamžiku, kdy u byl vybrán, je $d[u] \leq d[y]$.
- Celkem tedy $d[u] = \delta(s, u)$. Spor – špatný předpoklad.
- V okamžiku ukončení je $Q = \emptyset$. Jelikož $Q = V - S$ (rozmyslete si), je $S = V$. Proto $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \rightarrow y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho přechůdce na p.
- $d[y] = \delta(s, y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s, y) \leq \delta(s, u)$.
- Tedy, $d[y] = \delta(s, y) \leq \delta(s, u) \leq d[u]$.
- Protože však oba uzly $y, u \in V - S$ v okamžiku, kdy u byl vybrán, je $d[u] \leq d[y]$.
- Celkem tedy $d[u] = \delta(s, u)$. Spor – špatný předpoklad.
- V okamžiku ukončení je $Q = \emptyset$. Jelikož $Q = V - S$ (rozmyslete si), je $S = V$. Proto $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.
- Hotovo – uff. . . .

Složitost Dijkstrova algoritmu

Prioritní fronta implementována pomocí pole

- INSERT a DECREASE-KEY čas $O(1)$.
- EXTRACT-MIN čas $O(n)$, provede se pro každý uzel (řádek 5).

Složitost Dijkstrova algoritmu

Prioritní fronta implementována pomocí pole

- INSERT a DECREASE-KEY čas $O(1)$.
- EXTRACT-MIN čas $O(n)$, provede se pro každý uzel (řádek 5).
- RELAX na řádku 8 se provede m-krát.

Složitost Dijkstrova algoritmu

Prioritní fronta implementována pomocí pole

- Insert a Decrease-Key čas $O(1)$.
- Extract-Min čas $O(n)$, provede se pro každý uzel (řádek 5).
- Relax na řádku 8 se provede m-krát.

- Celkem $O(n^2 + m) = O(n^2)$.

Složitost Dijkstrova algoritmu

Prioritní fronta implementována pomocí pole

- $\textsc{Insert}$ a $\textsc{Decrease-Key}$ čas $O(1)$.
- $\textsc{Extract-Min}$ čas $O(n)$, provede se pro každý uzel (řádek 5).
- $\textsc{Relax}$ na řádku 8 se provede m-krát.

- Celkem $O(n^2 + m) = O(n^2)$.

- Pro řídké grafy, $|E| = o(n^2/\log n)$, lze dostat časovou složitost $O(m \log n)$ (pomocí binární haldy).

Složitost Dijkstrova algoritmu

Prioritní fronta implementována pomocí pole

- Insert a Decrease-Key čas $O(1)$.
- Extract-Min čas $O(n)$, provede se pro každý uzel (řádek 5).
- Relax na řádku 8 se provede m-krát.

- Celkem $O(n^2 + m) = O(n^2)$.

- Pro řídké grafy, $|E| = o(n^2/\log n)$, lze dostat časovou složitost $O(m \log n)$ (pomocí binární haldy).

- Obecně, použitím Fibonacciho haldy dostaneme časovou složitost $O(n \log n + m)$.

Nejkratší cesty ze všech uzlů do všech ostatních uzlů

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $f : E \to \mathbb{R}$.

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.

- Možno n-krát použít algoritmus pro nalezení nejkratší cesty z daného uzlu do všech ostatních.
- Dijkstrův algoritmus: Čas $O(n^3 + nm) = O(n^3)$ pro pole, či $O(n^2 \log n + nm)$ pro Fibonacciho haldu.

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $f : E \to \mathbb{R}$.

- Možno n-krát použít algoritmus pro nalezení nejkratší cesty z daného uzlu do všech ostatních.
- Dijkstrův algoritmus: Čas $O(n^3 + nm) = O(n^3)$ pro pole, či $O(n^2 \log n + nm)$ pro Fibonacciho haldu.
- Pokud povolíme záporné hrany, musíme použít algoritmus Bellman-Ford, tj. čas $O(n^2 m)$, což je na hustých grafech $O(n^4)$.

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.
- Zatím se omezíme na grafy bez záporných cyklů.

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.
- Zatím se omezíme na grafy bez záporných cyklů.

- Výsledek v matici $D = (d_{ij})$, kde $d_{ij} = \delta(i,j)$ po ukončení algoritmu.

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.
- Zatím se omezíme na grafy bez záporných cyklů.

- Výsledek v matici $D = (d_{ij})$, kde $d_{ij} = \delta(i,j)$ po ukončení algoritmu.
- Matice předchůdců $\Pi(\pi_{ij})$, kde π_{ij} je

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.
- Zatím se omezíme na grafy bez záporných cyklů.

- Výsledek v matici $D = (d_{ij})$, kde $d_{ij} = \delta(i,j)$ po ukončení algoritmu.
- Matice předchůdců $\Pi(\pi_{ij})$, kde π_{ij} je
  1. NIL, pokud $i = j$ nebo neexistuje cesta z i do j,

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } j \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.
- Zatím se omezíme na grafy bez záporných cyklů.

- Výsledek v matici $D = (d_{ij})$, kde $d_{ij} = \delta(i,j)$ po ukončení algoritmu.
- Matice předchůdců $\Pi(\pi_{ij})$, kde π_{ij} je
  1. NIL, pokud $i = j$ nebo neexistuje cesta z i do j,
  2. předchůdce j na nějaké nejkratší cestě z i.

Výpis nejkratších cest

```
PRINT-ALL-SHORTEST-PATH(Π, i, j)
if i = j
   then print i
   else if π_ij = NIL
           then print "Cesta z" i "do" j "neexistuje!"
           else  PRINT-ALL-SHORTEST-PATH(Π, i, π_ij)
                 print j
```

Násobení matic

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.
- Nechť p je nejkratší cesta z i do j, která má m' hran.

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.
- Nechť p je nejkratší cesta z i do j, která má m' hran.
- Pokud p nemá záporný cyklus, pak $m' < \infty$.

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.
- Nechť p je nejkratší cesta z i do j, která má m' hran.
- Pokud p nemá záporný cyklus, pak $m' < \infty$.
- Pro $i = j$ je $m' = 0$ a $w_{ij} = \delta(i, j) = 0$.

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.
- Nechť p je nejkratší cesta z i do j, která má m' hran.
- Pokud p nemá záporný cyklus, pak $m' < \infty$.
- Pro $i = j$ je $m' = 0$ a $w_{ij} = \delta(i,j) = 0$.
- Pro $i \neq j$ rozložme cestu p takto:

$$i \overset{p'}{\rightsquigarrow} k \rightarrow j\,,$$

kde p' má $m' - 1$ hran.

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.
- Nechť p je nejkratší cesta z i do j, která má m' hran.
- Pokud p nemá záporný cyklus, pak $m' < \infty$.
- Pro $i = j$ je $m' = 0$ a $w_{ij} = \delta(i,j) = 0$.
- Pro $i \neq j$ rozložme cestu p takto:

  $$i \overset{p'}{\leadsto} k \to j\,,$$

  kde p' má $m' - 1$ hran.
- p' je nejkratší cesta z i do k – rozmyslete – proto $\delta(i,j) = \delta(i,k) + w_{kj}$.

Násobení matic – rekurze

- Nechť $l_{ij}^{(m)}$ je miniální ohodnocení ze všech cest z i do j, které obsahují nejvýše m hran.

Násobení matic – rekurze

- Nechť $l_{ij}^{(m)}$ je miniální ohodnocení ze všech cest z i do j, které obsahují nejvýše m hran.
- $m = 0$ právě když $i = j$. Tedy $l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ \infty & \text{pro } i \neq j \end{cases}$

Násobení matic – rekurze

- Nechť $l_{ij}^{(m)}$ je miniální ohodnocení ze všech cest z i do j, které obsahují nejvýše m hran.
- $m = 0$ právě když $i = j$. Tedy $l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ \infty & \text{pro } i \neq j \end{cases}$
- $l_{ij}^{(m)} = \min(l_{ij}^{(m-1)}, \min_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}) = \min_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}$.

Násobení matic – rekurze

- Nechť $l_{ij}^{(m)}$ je miniální ohodnocení ze všech cest z i do j, které obsahují nejvýše m hran.
- $m = 0$ právě když $i = j$. Tedy $l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ \infty & \text{pro } i \neq j \end{cases}$
- $l_{ij}^{(m)} = \min(l_{ij}^{(m-1)}, \min_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}) = \min_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}$.
- Nejkratší cesta z i do j má nejvýše $n - 1$ hran, proto

$$\delta(i, j) = l_{ij}^{(n-1)} = l_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n+1)} = \dots.$$

(Když tam není záporný cyklus.)

Násobení matic – výpočet

- Vstupní matice $W = (w_{ij})$.

Násobení matic – výpočet

- Vstupní matice $W = (w_{ij})$.
- Vypočteme matice $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(n-1)}$, kde pro $m = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$L^{(m)} = (l_{ij}^{(m)}) .$$

Násobení matic – výpočet

- Vstupní matice $W = (w_{ij})$.
- Vypočteme matice $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(n-1)}$, kde pro $m = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$L^{(m)} = (l_{ij}^{(m)}) \,.$$

- $L^{(n-1)}$ pak obsahuje hodnoty nejkratších cest.

Násobení matic – výpočet

- Vstupní matice $W = (w_{ij})$.
- Vypočteme matice $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(n-1)}$, kde pro $m = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$L^{(m)} = (l_{ij}^{(m)}) \,.$$

- $L^{(n-1)}$ pak obsahuje hodnoty nejkratších cest.
- $l_{ij}^{(1)} = w_{ij}$, tj. $L^{(1)} = W$.

Srdce algoritmu

EXTEND-SHORTEST-PATHS(L, W)

$n \leftarrow rows[L]$
Nechť $L' = (l'_{ij})$ je matice řádu n
for $i \leftarrow 1$ **to** n
  do for $j \leftarrow 1$ **to** n
    do $l'_{ij} \leftarrow \infty$
      for $k \leftarrow 1$ **to** n
        do $l'_{ij} \leftarrow \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
return L'

- $rows[L]$ značí počet řádků L.
- Časová složitost $\Theta(n^3)$.

Konečně souvislost s násobením matic

- Nechť $C = A \cdot B$, kde A a B jsou matice řádu n.

Konečně souvislost s násobením matic

- Nechť $C = A \cdot B$, kde A a B jsou matice řádu n.
- Pak
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Konečně souvislost s násobením matic

- Nechť $C = A \cdot B$, kde A a B jsou matice řádu n.
- Pak
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$
- Pro srovnání
$$l_{ij}^{(m)} = \min_{1 \le k \le n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}$$

Najděte 4 rozdíly (mimo názvu)

EXTEND-SHORTEST-PATHS(L, W)

$n \leftarrow rows[L]$
Nechť $L' = (l'_{ij})$ je matice řádu n
for $i \leftarrow 1$ **to** n
    do for $j \leftarrow 1$ **to** n
        do $l'_{ij} \leftarrow \infty$
            for $k \leftarrow 1$ **to** n
                do $l'_{ij} \leftarrow \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
return L'

MATRIX-MULTIPLY(A, B)

$n \leftarrow rows[A]$
Nechť C je matice řádu n
for $i \leftarrow 1$ **to** n
    do for $j \leftarrow 1$ **to** n
        do $c_{ij} \leftarrow 0$
            for $k \leftarrow 1$ **to** n
                do $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$
return C

Zase násobení matic

- Označme $A \cdot B$ matici vypočtenou procedurou $\textsc{Extend-Shortest-Paths}(A, B)$.

Zase násobení matic

- Označme $A \cdot B$ matici vypočtenou procedurou $\textsc{Extend-Shortest-Paths}(A, B)$.
- Pak počítáme sekvenci matic

$$\begin{array}{ccccc} L^{(1)} & = & L^{(0)} \cdot W & = & W \\ L^{(2)} & = & L^{(1)} \cdot W & = & W^2 \\ L^{(3)} & = & L^{(2)} \cdot W & = & W^3 \\ & & \vdots & & \\ L^{(n-1)} & = & L^{(n-2)} \cdot W & = & W^{n-1} \end{array}$$

kde W^{n-1} obsahuje hodnoty nejkratších cest.

Pomalá metoda

SLOW-ALL-SHORTEST-PATHS(W)

$n \leftarrow rows[W]$
$L^{(1)} \leftarrow W$
for $m \leftarrow 2$ **to** $n - 1$
    do $L^{(m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS$(L^{(m-1)}, W)$
return $L^{(n-1)}$

- Složitost $\Theta(n^4)$.

Rychlá (rychlejší) metoda

- Jak zrychlit?

Rychlá (rychlejší) metoda

- Jak zrychlit?
- Pokud nemáme záporný cyklus, pak $L^{(m)} = L^{(n-1)}$ pro $m \geq n - 1$.

Rychlá (rychlejší) metoda

- Jak zrychlit?
- Pokud nemáme záporný cyklus, pak $L^{(m)} = L^{(n-1)}$ pro $m \geq n-1$.
- Násobení matic definované procedurou Extend-Shortest-Paths je asociativní.

Rychlá (rychlejší) metoda

- Jak zrychlit?
- Pokud nemáme záporný cyklus, pak $L^{(m)} = L^{(n-1)}$ pro $m \geq n-1$.
- Násobení matic definované procedurou $\textsc{Extend-Shortest-Paths}$ je asociativní.
- Nemusíme tedy počítat $n-1$ násobení, ale pouze $\lceil \log n - 1 \rceil$

Rychlá (rychlejší) metoda

- Jak zrychlit?
- Pokud nemáme záporný cyklus, pak $L^{(m)} = L^{(n-1)}$ pro $m \geq n-1$.
- Násobení matic definované procedurou EXTEND-SHORTEST-PATHS je asociativní.
- Nemusíme tedy počítat $n-1$ násobení, ale pouze $\lceil \log n - 1 \rceil$
- Počítáme sekvenci matic

$$\begin{array}{rclcl}
L^{(1)} & = & W & & \\
L^{(2)} & = & W^2 & & \\
L^{(4)} & = & W^4 & = & W^2 \cdot W^2 \\
L^{(8)} & = & W^8 & = & W^4 \cdot W^4 \\
 & & \vdots & & \\
L^{(2^{\lceil \log n-1 \rceil})} & = & W^{(2^{\lceil \log n-1 \rceil})} & = & W^{2^{\lceil \log n-1 \rceil -1}} \cdot W^{2^{\lceil \log n-1 \rceil -1}}
\end{array}$$

Protože $2^{\lceil \log n-1 \rceil} \geq n-1$, je $L^{(2^{\lceil \log n-1 \rceil})} = L^{(n-1)}$.

Rychlá (rychlejší) metoda

FAST-ALL-SHORTEST-PATHS(W)

$n \leftarrow rows[W]$
$L^{(1)} \leftarrow W$
$m \leftarrow 1$
while $m < n - 1$
  do $L^{(2m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS$(L^{(m)}, L^{(m)})$
    $m \leftarrow 2m$
return $L^{(m)}$

- Složitost $\Theta(n^3 \log n)$.

Floyd-Warshallův algoritmus

Floyd-Warshallův algoritmus

- Připouštíme záporné hrany.
- Avšak předpokládáme, že nemáme záporné cykly.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Pro $i, j \in V$, uvažme všechny cesty z i do j, kde vnitřní uzly jsou z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Pro $i, j \in V$, uvažme všechny cesty z i do j, kde vnitřní uzly jsou z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- Nechť p je nejkratší taková cesta.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Pro $i, j \in V$, uvažme všechny cesty z i do j, kde vnitřní uzly jsou z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- Nechť p je nejkratší taková cesta.
- Floyd-Warshallův algoritmus využívá vztahu mezi cestou p a nejkratší cestou z i do j, která má vnitřní uzly z množiny $\{1, 2, \ldots, k-1\}$.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Pro $i, j \in V$, uvažme všechny cesty z i do j, kde vnitřní uzly jsou z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- Nechť p je nejkratší taková cesta.
- Floyd-Warshallův algoritmus využívá vztahu mezi cestou p a nejkratší cestou z i do j, která má vnitřní uzly z množiny $\{1, 2, \ldots, k-1\}$.
  - k není vnitřní uzel p, pak všechny vnitřní uzly p jsou z $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Tedy nejkratší cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ je rovněž nejkratší cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \dots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Pro $i, j \in V$, uvažme všechny cesty z i do j, kde vnitřní uzly jsou z množiny $\{1, 2, \dots, k\}$.
- Nechť p je nejkratší taková cesta.
- Floyd-Warshallův algoritmus využívá vztahu mezi cestou p a nejkratší cestou z i do j, která má vnitřní uzly z množiny $\{1, 2, \dots, k-1\}$.
  - k není vnitřní uzel p, pak všechny vnitřní uzly p jsou z $\{1, 2, \dots, k-1\}$. Tedy nejkratší cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \dots, k-1\}$ je rovněž nejkratší cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \dots, k\}$.
  - k je vnitřní uzel p, pak $i \overset{p_1}{\rightsquigarrow} k \overset{p_2}{\rightsquigarrow} j$. Přitom p_1 je nejkratší cesta z i do k s vnitřními uzly z $\{1, 2, \dots, k-1\}$ a p_2 je nejkratší cesta z k do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \dots, k-1\}$.

Rekurze

- Nechť $d_{ij}^{(k)}$ je ohodnocení nejkratší cesty z i do j, která má vnitřní uzly pouze z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.

Rekurze

- Nechť $d_{ij}^{(k)}$ je ohodnocení nejkratší cesty z i do j, která má vnitřní uzly pouze z množiny $\{1, 2, \dots, k\}$.
- $k = 0$ právě když $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$. Tedy

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{pro } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

Rekurze

- Nechť $d_{ij}^{(k)}$ je ohodnocení nejkratší cesty z i do j, která má vnitřní uzly pouze z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- $k = 0$ právě když $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$. Tedy

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{pro } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

- Protože všechny vnitřní uzly jsou z množiny $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, matice $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ dává $d_{ij}^{(n)} = \delta(i, j)$ pro $i, j \in V$.

Výpočet

FLOYD-WARSHALL(W)

$n \leftarrow rows[W]$

$D^{(0)} \leftarrow W$

for $k \leftarrow 1$ **to** n

  do for $i \leftarrow 1$ **to** n

    do for $j \leftarrow 1$ **to** n

      do $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$

return $D^{(n)}$

- Složitost $\Theta(n^3)$.

Konstrukce nejkratší cesty

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{pro } i = j \text{ nebo } w_{ij} = \infty \\ i & \text{pro } i \neq j \text{ a } w_{ij} < \infty \end{cases}$$

Konstrukce nejkratší cesty

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{pro } i = j \text{ nebo } w_{ij} = \infty \\ i & \text{pro } i \neq j \text{ a } w_{ij} < \infty \end{cases}$$

Pro $k \geq 1$,

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{pro } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{pro } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

Transitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Transitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Transitivní uzávěr grafu G je graf $G^* = (V, E^*)$, kde

$$E^* = \{(i, j) : \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } G\} .$$

Transitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Transitivní uzávěr grafu G je graf $G^* = (V, E^*)$, kde

$$E^* = \{(i, j) : \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } G\}.$$

- Ohodnoťme hrany hodnotou 1 a spusťme Floyd-Warshallův algoritmus ($\Theta(n^3)$).

Transitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \dots, n\}$.
- Transitivní uzávěr grafu G je graf $G^* = (V, E^*)$, kde

$$E^* = \{(i, j) : \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } G\} .$$

- Ohodnoťme hrany hodnotou 1 a spusťme Floyd-Warshallův algoritmus ($\Theta(n^3)$).
  - Pokud existuje cesta z i do j, pak $d_{ij} < n$.

Transitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Transitivní uzávěr grafu G je graf $G^* = (V, E^*)$, kde

$$E^* = \{(i, j) : \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } G\} .$$

- Ohodnoťme hrany hodnotou 1 a spusťme Floyd-Warshallův algoritmus ($\Theta(n^3)$).
  - Pokud existuje cesta z i do j, pak $d_{ij} < n$.
  - Jinak je $d_{ij} = \infty$.

Transitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Transitivní uzávěr grafu G je graf $G^* = (V, E^*)$, kde

$$E^* = \{(i, j) : \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } G\}.$$

- Ohodnoťme hrany hodnotou 1 a spusťme Floyd-Warshallův algoritmus ($\Theta(n^3)$).
  - Pokud existuje cesta z i do j, pak $d_{ij} < n$.
  - Jinak je $d_{ij} = \infty$.
- Lze trochu vylepšit. . . .

Transitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.

Transitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.
- Definujme $t_{ij}^{(k)}$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tak, že je rovno 1 pokud existuje cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k\}$, 0 jinak.

Transitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.
- Definujme $t_{ij}^{(k)}$, $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tak, že je rovno 1 pokud existuje cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1,2,\ldots,k\}$, 0 jinak.
- Tedy

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{pro } i = j \text{ nebo } (i,j) \in E \end{cases}$$

Transitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.
- Definujme $t_{ij}^{(k)}$, $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tak, že je rovno 1 pokud existuje cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1,2,\ldots,k\}$, 0 jinak.
- Tedy

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{pro } i = j \text{ nebo } (i,j) \in E \end{cases}$$

a pro $k \geq 1$,

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right) .$$

Transitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.
- Definujme $t_{ij}^{(k)}$, $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tak, že je rovno 1 pokud existuje cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1,2,\ldots,k\}$, 0 jinak.
- Tedy

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{pro } i = j \text{ nebo } (i,j) \in E \end{cases}$$

  a pro $k \geq 1$,

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right) .$$

- Stejně jako ve Floyd-Warshallově algoritmu máme tři **for**-cykly, tedy složitost $\Theta(n^3)$. Proč je lepší?

Transitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.
- Definujme $t_{ij}^{(k)}$, $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tak, že je rovno 1 pokud existuje cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1,2,\ldots,k\}$, 0 jinak.
- Tedy
$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{pro } i = j \text{ nebo } (i,j) \in E \end{cases}$$

  a pro $k \geq 1$,
$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right) .$$
- Stejně jako ve Floyd-Warshallově algoritmu máme tři **for**-cykly, tedy složitost $\Theta(n^3)$. Proč je lepší?
- Protože logické operace na bitech obvykle rychlejší než aritmetické operace na integerech. Navíc, v paměti jen bity, ne bajty.

Toky v síti

Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,

Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- kde každá hrana $(u, v) \in E$ má nezápornou kapacitu $c(u, v) \geq 0$.

Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- kde každá hrana $(u, v) \in E$ má nezápornou kapacitu $c(u, v) \geq 0$.
- Nechť $c(u, v) = 0$ pokud $(u, v) \notin E$.

Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- kde každá hrana $(u, v) \in E$ má nezápornou kapacitu $c(u, v) \geq 0$.
- Nechť $c(u, v) = 0$ pokud $(u, v) \notin E$.
- Jsou specifikovány dva uzly: zdroj s a spotřebič t

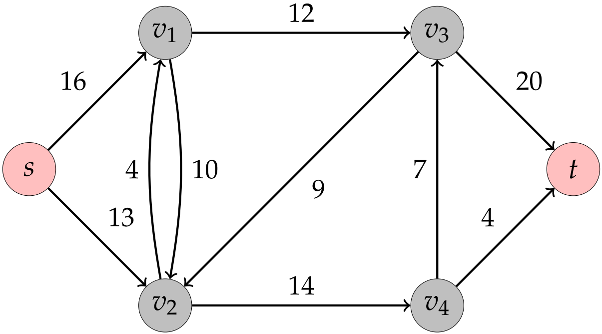
Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- kde každá hrana $(u, v) \in E$ má nezápornou kapacitu $c(u, v) \geq 0$.
- Nechť $c(u, v) = 0$ pokud $(u, v) \notin E$.
- Jsou specifikovány dva uzly: zdroj s a spotřebič t
- Každý uzel leží na cestě z s do t, tj. $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$ pro každý $v \in V$.

Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- kde každá hrana $(u, v) \in E$ má nezápornou kapacitu $c(u, v) \geq 0$.
- Nechť $c(u, v) = 0$ pokud $(u, v) \notin E$.
- Jsou specifikovány dva uzly: zdroj s a spotřebič t
- Každý uzel leží na cestě z s do t, tj. $s \leadsto v \leadsto t$ pro každý $v \in V$.
- Síť je tedy souvislý graf a $m \geq n - 1$.

Síť – příklad



Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:

Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:

    1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u, v) \leq c(u, v)$.

Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:

  1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$.
  2. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.

Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:

  1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$.
  2. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.
  3. Pro každé $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$.

Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:
  1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$.
  2. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.
  3. Pro každé $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$.
- Poslední podmínka říká, že to, co vtéká do uzlu u z něj také vytéká.

Tok v síti

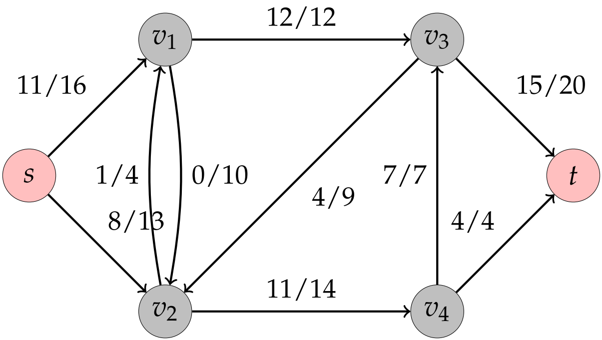
- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:
  1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$.
  2. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.
  3. Pro každé $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$.
- Poslední podmínka říká, že to, co vtéká do uzlu u z něj také vytéká.
- $f(u,v)$ se nazývá tok z uzlu u do uzlu v.

Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující:
  1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$.
  2. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.
  3. Pro každé $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$.
- Poslední podmínka říká, že to, co vtéká do uzlu u z něj také vytéká.
- $f(u,v)$ se nazývá tok z uzlu u do uzlu v.
- Velikost toku je definována jako

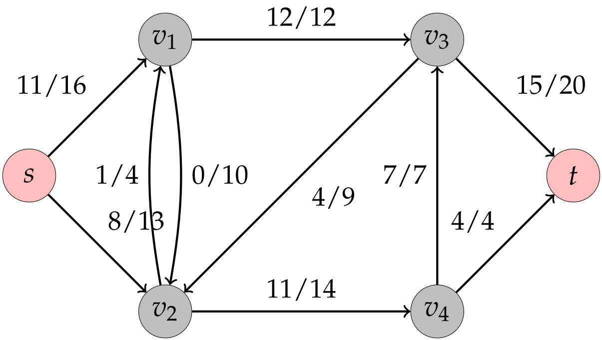
$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)\,.$$

Tok v síti – příklad



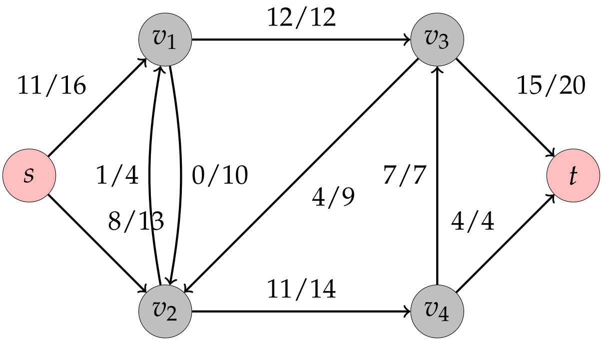
- Na hranách jsou hodnoty $f(u,v)/c(u,v)$.

Tok v síti – příklad



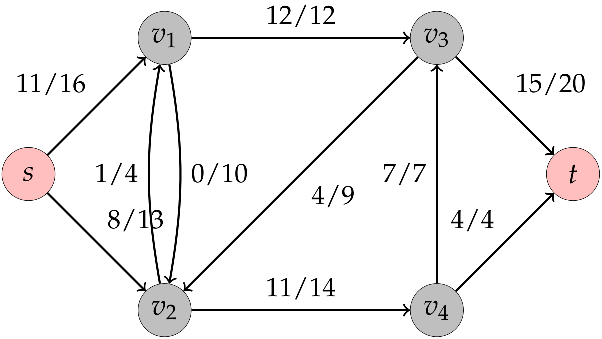
- Na hranách jsou hodnoty $f(u,v)/c(u,v)$.
- Ověřte, že jde o tok v síti.

Tok v síti – příklad



- Na hranách jsou hodnoty $f(u,v)/c(u,v)$.
- Ověřte, že jde o tok v síti.
- $|f| =???$

Tok v síti – příklad

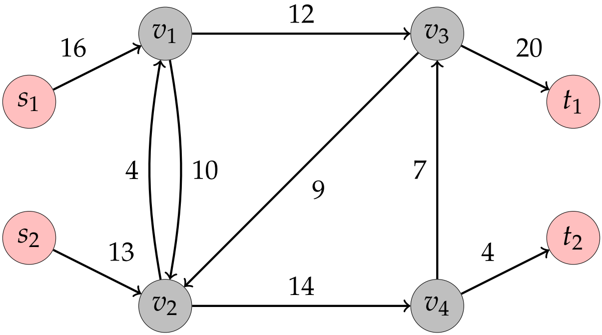


- Na hranách jsou hodnoty $f(u,v)/c(u,v)$.
- Ověřte, že jde o tok v síti.
- $|f| = ???$
- $|f| = 19$.

Maximální tok

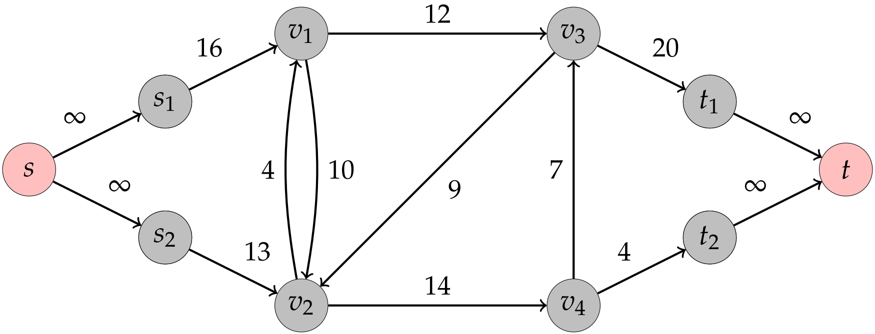
- Máme danou síť G se zdrojem s a spotřebičem t.
- Hledáme tok maximální velikosti.

Více zdrojů a spotřebičů



- Co s tím?

Více zdrojů a spotřebičů



- Co s tím?
- Vytvoříme nový zdroj a spotřebič a nastavíme novým hranám kapacitu c na ∞.

Práce s toky

- Pro $X, Y \subseteq V$, definujme $f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$.

Práce s toky

- Pro $X, Y \subseteq V$, definujme $f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$.
- Pak platí, že $|f| = f(s, V)$.

Práce s toky

- Pro $X, Y \subseteq V$, definujme $f(X,Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$.
- Pak platí, že $|f| = f(s,V)$.
- Pro $X \subseteq V$, $f(X,X) = 0$ — s každým $f(u,v)$ máme i $f(v,u)$.

Práce s toky

- Pro $X, Y \subseteq V$, definujme $f(X,Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$.
- Pak platí, že $|f| = f(s,V)$.
- Pro $X \subseteq V$, $f(X,X) = 0$ — s každým $f(u,v)$ máme i $f(v,u)$.
- Pro $X, Y \subseteq V$, $f(X,Y) = -f(Y,X)$.

Práce s toky

- Pro $X, Y \subseteq V$, definujme $f(X,Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$.
- Pak platí, že $|f| = f(s, V)$.
- Pro $X \subseteq V$, $f(X,X) = 0$ — s každým $f(u,v)$ máme i $f(v,u)$.
- Pro $X, Y \subseteq V$, $f(X,Y) = -f(Y,X)$.
- Pro $X, Y, Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$,

$$f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

a

$$f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)\,.$$

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V,t)$.

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V, t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s, V)$
- Víme $f(V, V) = f(s, V) + f(V - s, V)$ – výše.

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$
- Víme $f(V,V) = f(s,V) + f(V-s,V)$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = f(V,V) - f(V-s,V)$.

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$
- Víme $f(V,V) = f(s,V) + f(V-s,V)$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = f(V,V) - f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V) = 0$ – výše.

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$
- Víme $f(V,V) = f(s,V) + f(V-s,V)$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = f(V,V) - f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V) = 0$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = -f(V-s,V)$.

Práce s toky – příklad

Dokažte, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$
- Víme $f(V,V) = f(s,V) + f(V-s,V)$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = f(V,V) - f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V) = 0$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = -f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V-s) = f(V,t) + f(V,V-s-t)$ – výše.

Práce s toky – příklad

Dokažte, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$
- Víme $f(V,V) = f(s,V) + f(V-s,V)$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = f(V,V) - f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V) = 0$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = -f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V-s) = f(V,t) + f(V,V-s-t)$ – výše.
- Z přechozího a vlastnosti toku víme, že $f(V,V-s-t) = -f(V-s-t,V) = -\sum_{u\in V-\{s,t\}} \sum_{v\in V} f(u,v) = -\sum_{u\in V-\{s,t\}} 0 = 0$.

Práce s toky – příklad

Dokaže, že $|f| = f(V, t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s, V)$
- Víme $f(V, V) = f(s, V) + f(V - s, V)$ – výše.
- Tedy $f(s, V) = f(V, V) - f(V - s, V)$.
- Víme $f(V, V) = 0$ – výše.
- Tedy $f(s, V) = -f(V - s, V)$.
- Víme $f(V, V - s) = f(V, t) + f(V, V - s - t)$ – výše.
- Z přechozího a vlastnosti toku víme, že $f(V, V - s - t) = -f(V - s - t, V) = -\sum_{u \in V - \{s,t\}} \sum_{v \in V} f(u, v) = -\sum_{u \in V - \{s,t\}} 0 = 0$.
- Tedy $|f| = f(V, t)$.

Ford-Fulkersonova metoda

Ford-Fulkersonova metoda

- Pro nalezení maximálního toku v síti.

Ford-Fulkersonova metoda

- Pro nalezení maximálního toku v síti.
- Ne algoritmus, protože existuje několik implementací s odlišnou složitostí.

Ford-Fulkersonova metoda

- Pro nalezení maximálního toku v síti.
- Ne algoritmus, protože existuje několik implementací s odlišnou složitostí.

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
inicializuj f(u, v) = 0 pro u, v ∈ V
while existuje zlepšující cesta p
        do zlepši tok f podle p
return f
```

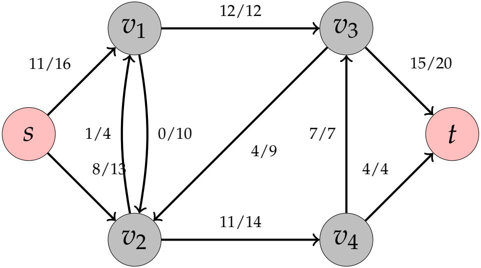
Ford-Fulkersonova metoda

- Pro nalezení maximálního toku v síti.
- Ne algoritmus, protože existuje několik implementací s odlišnou složitostí.

FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
inicializuj $f(u, v) = 0$ pro $u, v \in V$
while existuje zlepšující cesta p
    do zlepši tok f podle p
return f

- Zlepšující cesta je cesta z s do t, kde můžeme zvětšit tok.

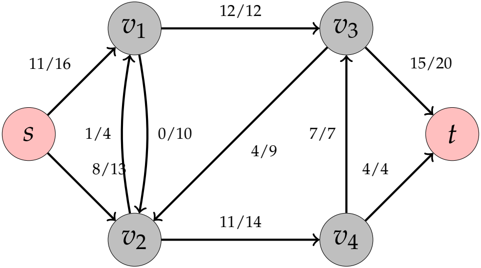
Reziduální síť



- Reziduální kapacita hrany (u, v) je

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)\,.$$

Reziduální síť

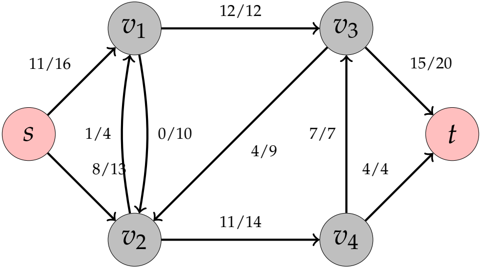


- Reziduální kapacita hrany (u, v) je

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) \, .$$

- Např. $c_f(s, v_1) = 16 - 11 = 5$.

Reziduální síť



- Reziduální kapacita hrany (u, v) je

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) .$$

- Např. $c_f(s, v_1) = 16 - 11 = 5$.
- Tok $f(u, v)$ tedy může být zlepšen až o 5 jednotek.

Reziduální síť

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f je tok v síti G.

Reziduální síť

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f je tok v síti G.
- Reziduální síť sítě G indukovaná tokem f je síť $G_f = (V, E_f)$, kde

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}.$$

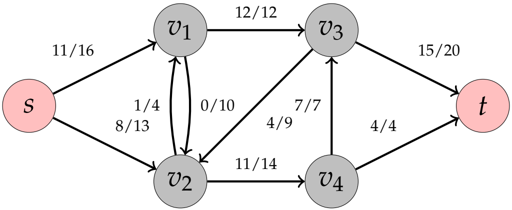
Reziduální síť

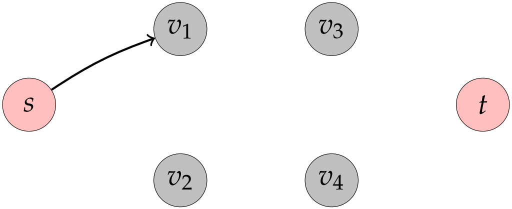
- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f je tok v síti G.
- Reziduální síť sítě G indukovaná tokem f je síť $G_f = (V, E_f)$, kde

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}.$$

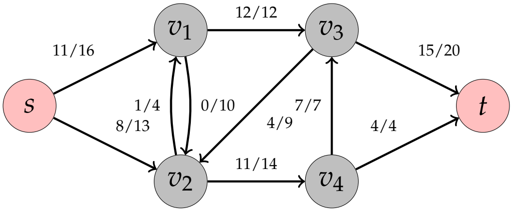
- Platí, že $|E_f| \leq 2|E|$ – rozmyslete.

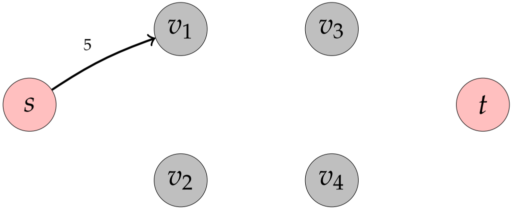
Síť a její reziduální síť



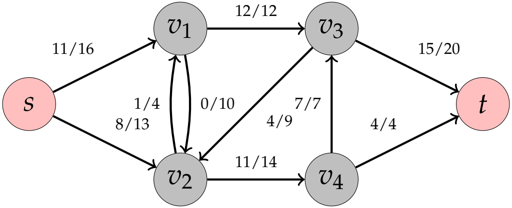


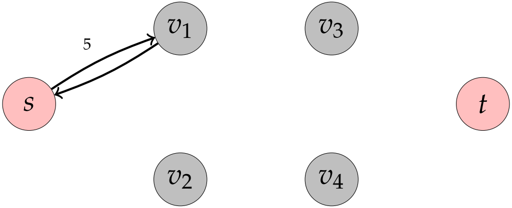
Síť a její reziduální síť



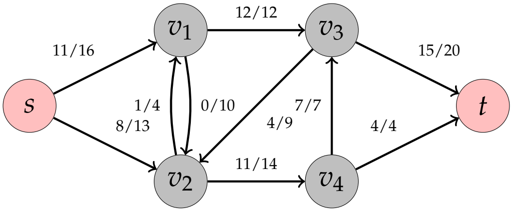


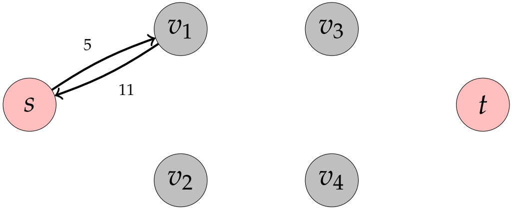
Síť a její reziduální síť



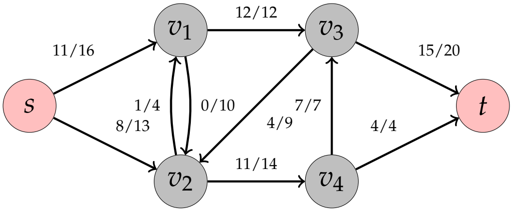


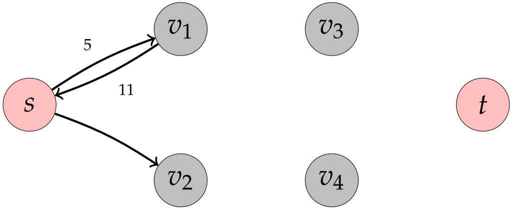
Síť a její reziduální síť



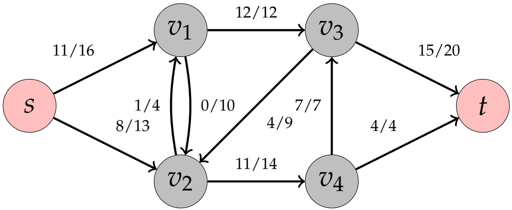


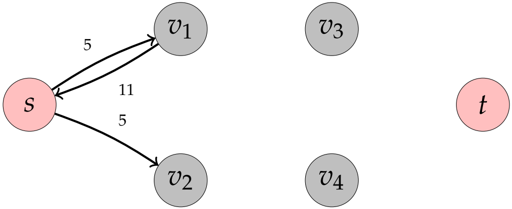
Síť a její reziduální síť



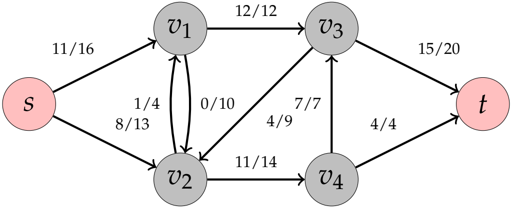


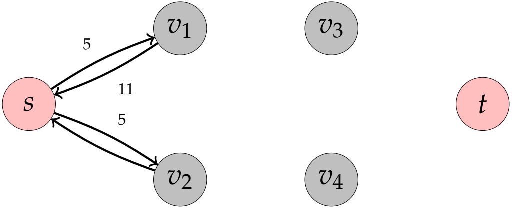
Síť a její reziduální síť



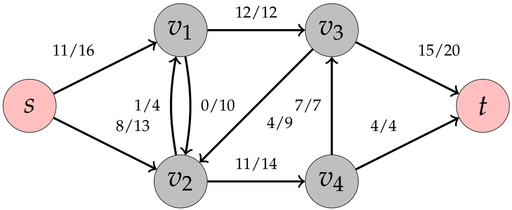


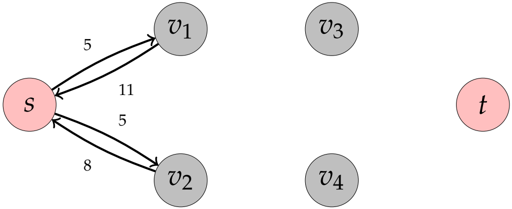
Síť a její reziduální síť



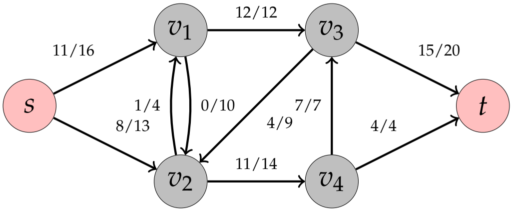


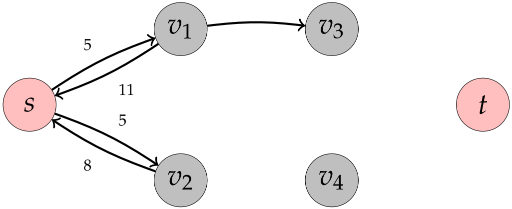
Síť a její reziduální síť



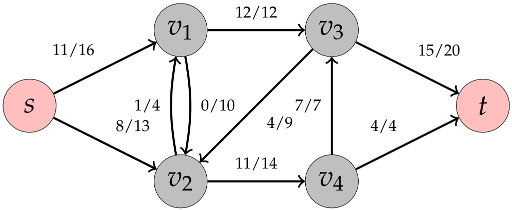


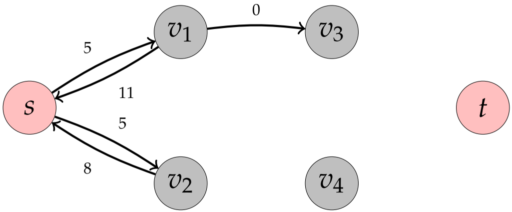
Síť a její reziduální síť



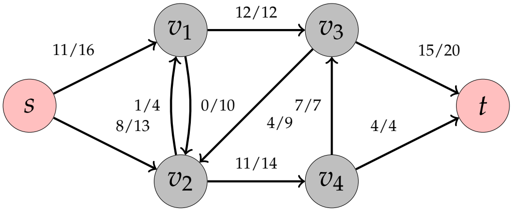


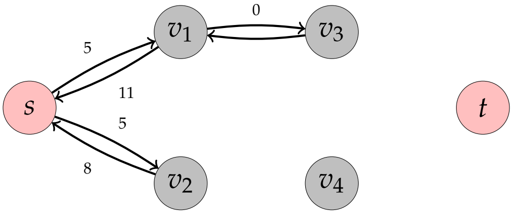
Síť a její reziduální síť



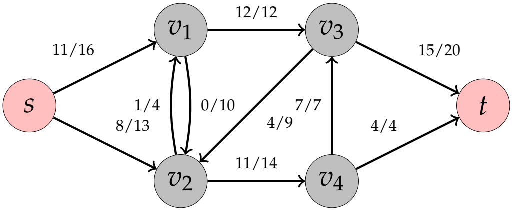


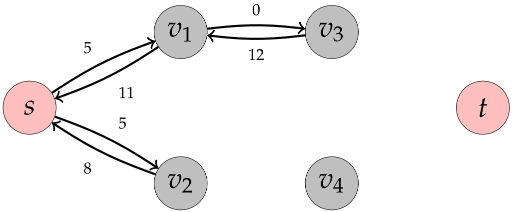
Síť a její reziduální síť



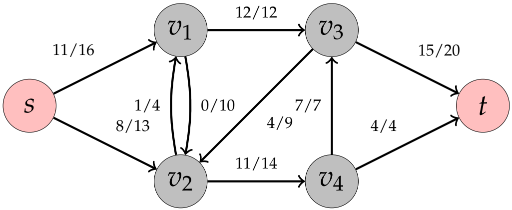


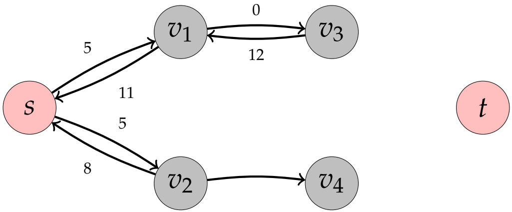
Síť a její reziduální síť



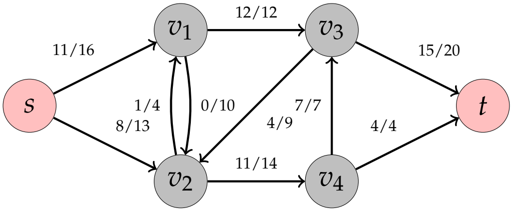


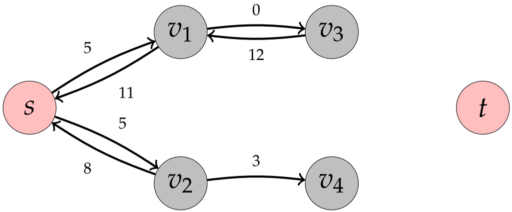
Síť a její reziduální síť



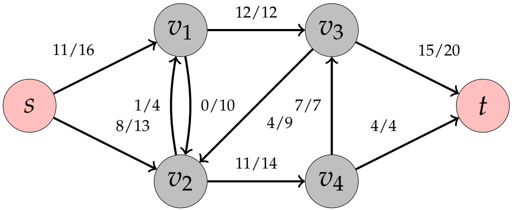


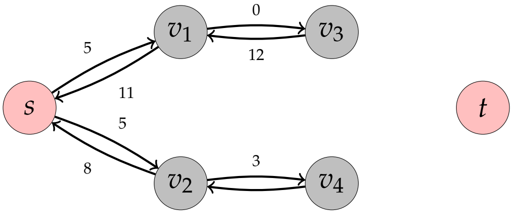
Síť a její reziduální síť



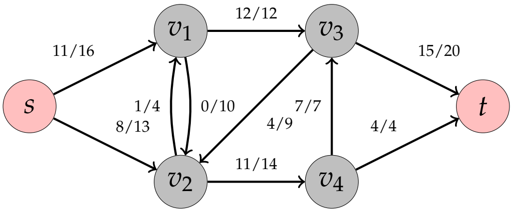


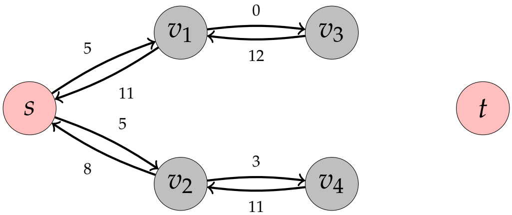
Síť a její reziduální síť



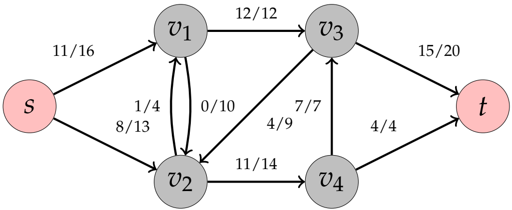


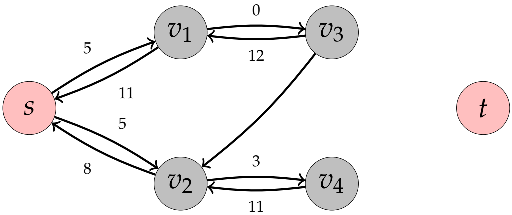
Síť a její reziduální síť



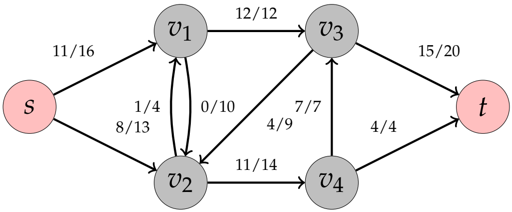


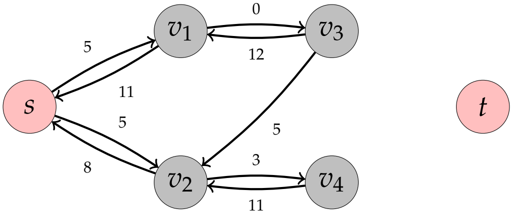
Síť a její reziduální síť



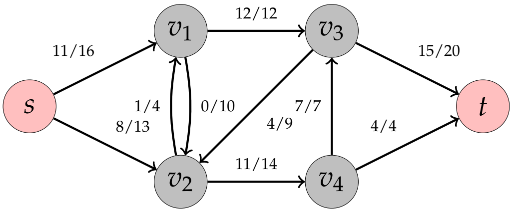


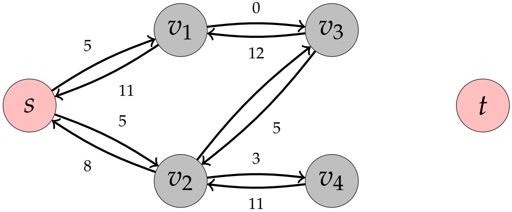
Síť a její reziduální síť



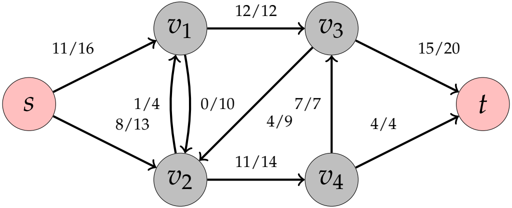


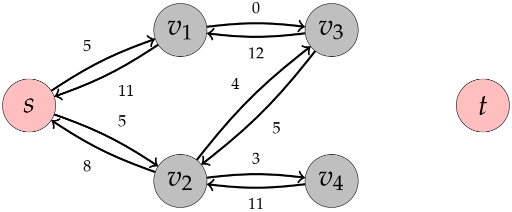
Síť a její reziduální síť



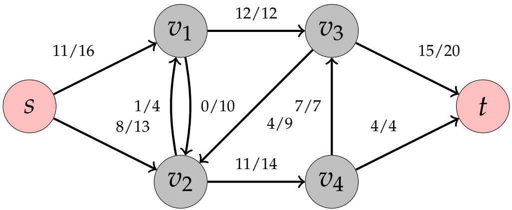


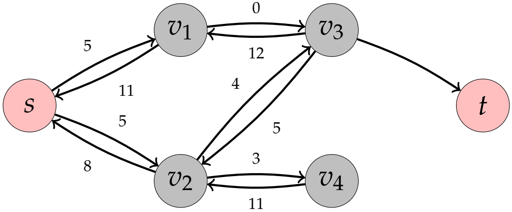
Síť a její reziduální síť



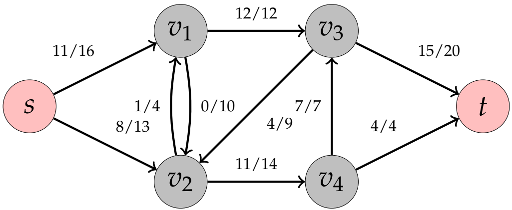


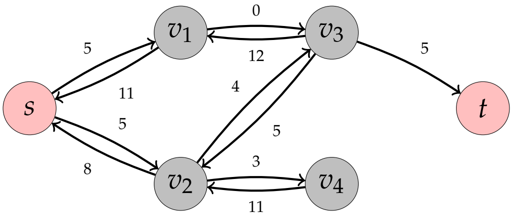
Síť a její reziduální síť



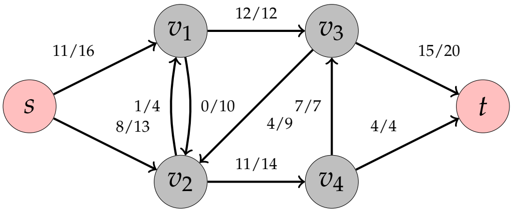


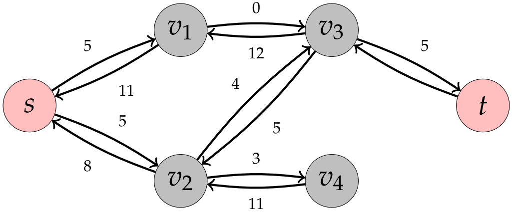
Síť a její reziduální síť



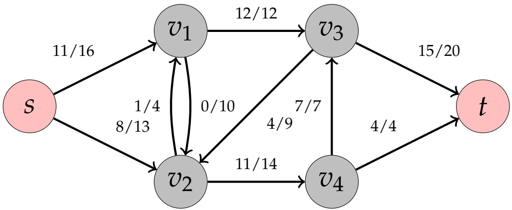


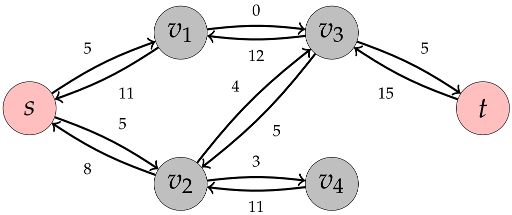
Síť a její reziduální síť



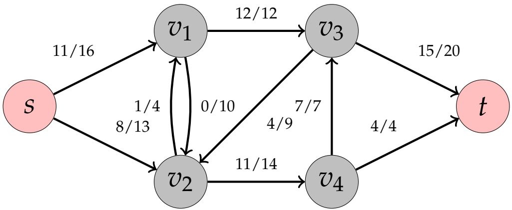


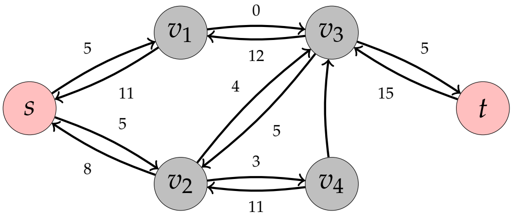
Síť a její reziduální síť



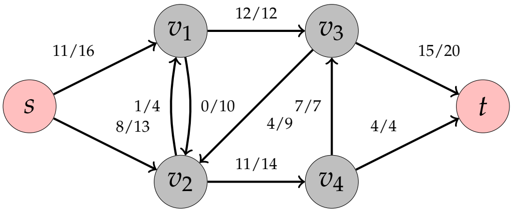


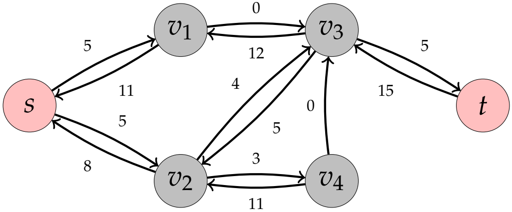
Síť a její reziduální síť



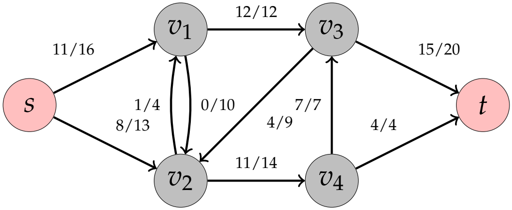


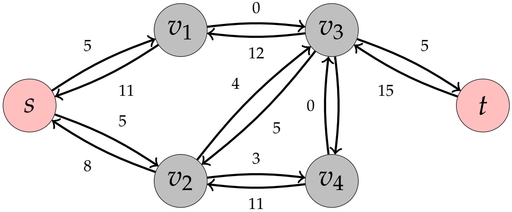
Síť a její reziduální síť



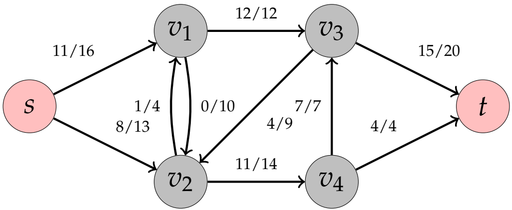


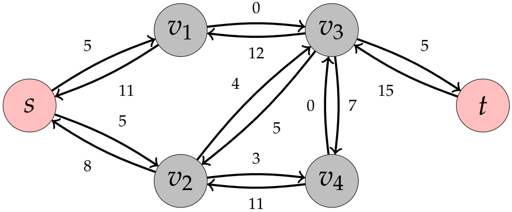
Síť a její reziduální síť



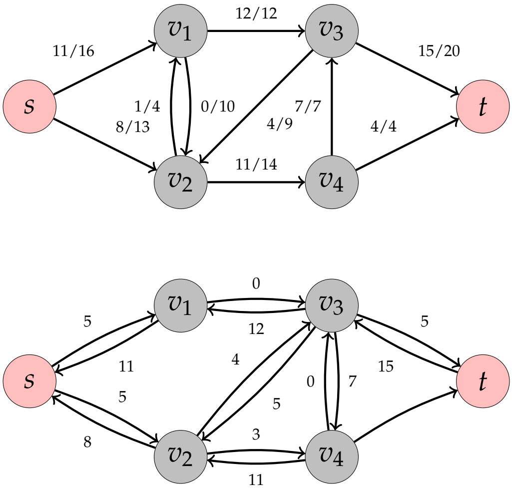


Síť a její reziduální síť

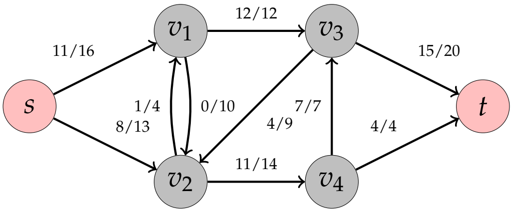


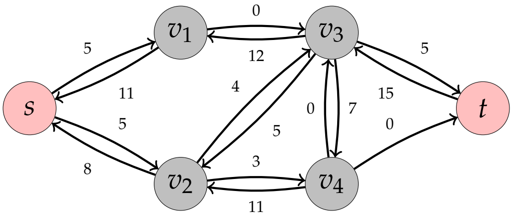


Síť a její reziduální síť

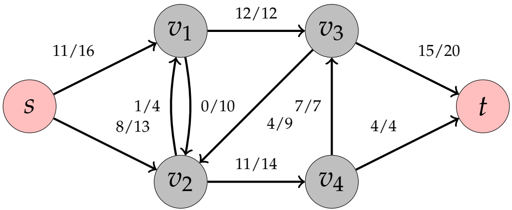


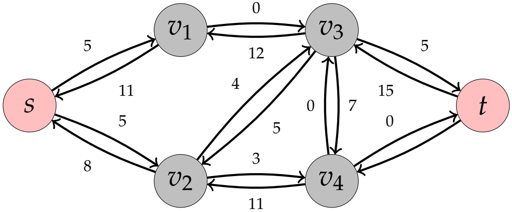
Síť a její reziduální síť



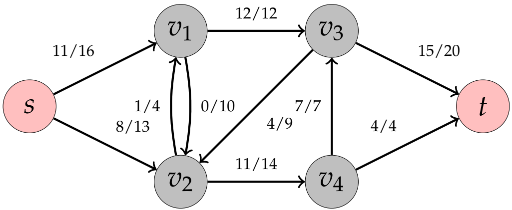


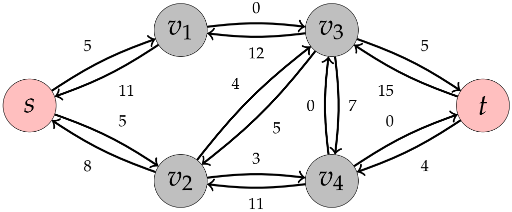
Síť a její reziduální síť



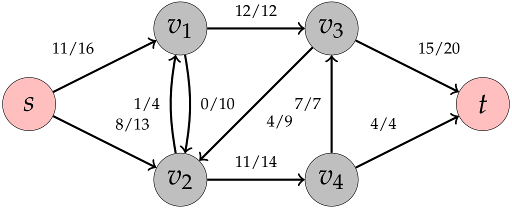


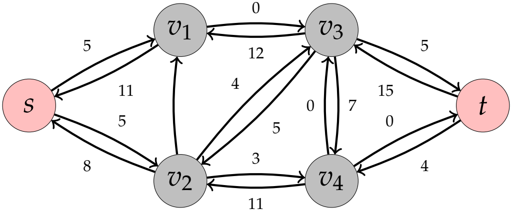
Síť a její reziduální síť



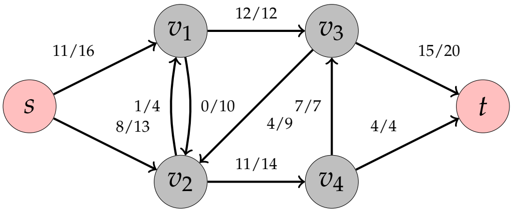


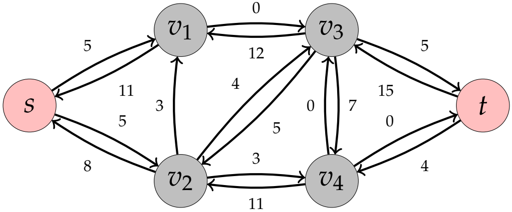
Síť a její reziduální síť



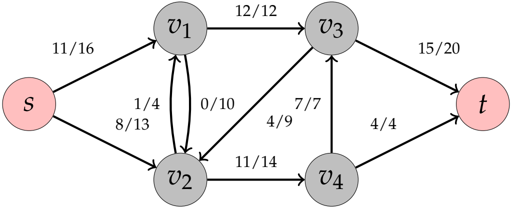


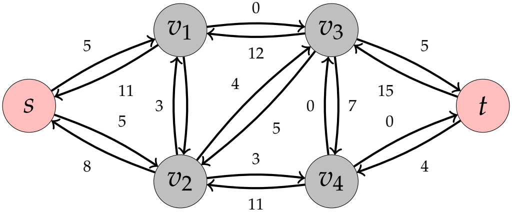
Síť a její reziduální síť



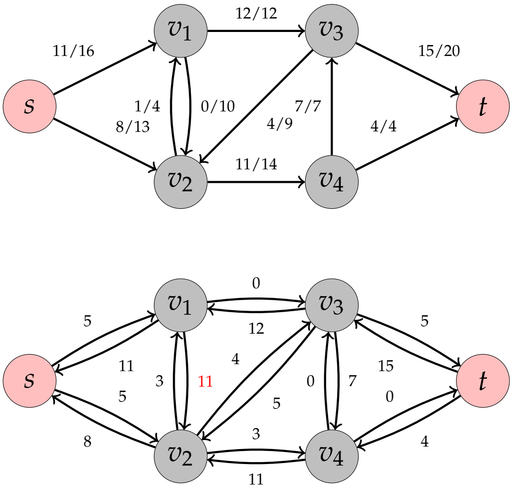


Síť a její reziduální síť

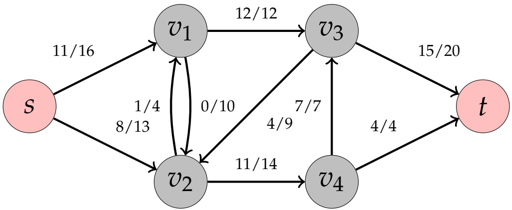


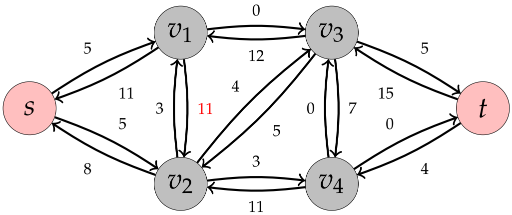


Síť a její reziduální síť



Síť a její reziduální síť





- Pozor! $f(v_1, v_2) = 0 + (-1)$, proto $c_f(v_1, v_2) = 10 - (-1) = 11$.

Reziduální síť

Lemma 24.
Nechť $G = (V, E)$ *je síť a* f *je tok v* G. *Nechť* G_f *je residuální síť* G *indukovaná* f *a nechť* f' *je tok v* G_f.
Pak $f + f'$ *je tok v* G *s hodnotou* $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Důkaz.

- Spočívá v ověření podmínek z definice toku.

□

Podmínka 1

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) \leq c(u,v)$.

Důkaz.

- $f'(u,v) \leq c_f(u,v)$.

$\square$

Podmínka 1

Chceme ukázat $(f + f')(u, v) \leq c(u, v)$.

Důkaz.

- $f'(u, v) \leq c_f(u, v)$.
- $(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v)$

$\square$

Podmínka 1

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) \leq c(u,v)$.

Důkaz.

- $f'(u,v) \leq c_f(u,v)$.
- $$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v)\\ &\leq f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v))\end{aligned}$$

□

Podmínka 1

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) \leq c(u,v)$.

Důkaz.

- $f'(u,v) \leq c_f(u,v)$.
- $$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v) \\ &\leq f(u,v) + (c(u,v) - f(u,v)) \\ &= c(u,v).\end{aligned}$$

□

Podmínka 2

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) = -(f+f')(u,v)$.

Důkaz.

- $(f+f')(u,v) = f(u,v) + f'(u,v)$

$\square$

Podmínka 2

Chceme ukázat $(f + f')(u, v) = -(f + f')(u, v)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned}(f + f')(u, v) &= f(u, v) + f'(u, v)\\ &= -f(v, u) - f'(v, u,)\end{aligned}$$

$\square$

Podmínka 2

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) = -(f+f')(u,v)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v)\\ &= -f(v,u) - f'(v,u,)\\ &= -(f(v,u) + f'(v,u,))\end{aligned}$$

□

Podmínka 2

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) = -(f+f')(u,v)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v) + f'(u,v)\\ &= -f(v,u) - f'(v,u,)\\ &= -(f(v,u) + f'(v,u,))\\ &= -(f+f')(v,u).\end{aligned}$$

$\square$

Podmínka 3

Chceme ukázat, že pro $u \in V - \{s, t\}$, $\sum_{v \in V} (f + f')(u, v) = 0$.

Důkaz.

- $\sum_{v \in V} (f + f')(u, v) = \sum_{v \in V} (f(u, v) + f'(u, v))$

$\square$

Podmínka 3

Chceme ukázat, že pro $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} (f + f')(u,v) = 0$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned}\sum_{v \in V} (f + f')(u,v) &= \sum_{v \in V} (f(u,v) + f'(u,v)) \\ &= \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} f'(u,v)\end{aligned}$$

$\square$

Podmínka 3

Chceme ukázat, že pro $u \in V - \{s, t\}$, $\sum_{v \in V} (f + f')(u, v) = 0$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} \sum_{v \in V} (f + f')(u, v) &= \sum_{v \in V} (f(u, v) + f'(u, v)) \\ &= \sum_{v \in V} f(u, v) + \sum_{v \in V} f'(u, v) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Velikost výsledného toku

- $|f + f'| = \sum_{v \in V} (f + f')(s, v)$

Velikost výsledného toku

- $$\begin{aligned} |f + f'| &= \sum_{v \in V} (f + f')(s, v) \\ &= \sum_{v \in V} (f(s, v) + f'(s, v)) \end{aligned}$$

Velikost výsledného toku

- $$\begin{aligned} |f+f'| &= \sum_{v\in V}(f+f')(s,v) \\ &= \sum_{v\in V}(f(s,v)+f'(s,v)) \\ &= \sum_{v\in V} f(s,v) + \sum_{v\in V} f'(s,v) \end{aligned}$$

Velikost výsledného toku

- $$\begin{aligned} |f+f'| &= \sum_{v\in V}(f+f')(s,v) \\ &= \sum_{v\in V}(f(s,v)+f'(s,v)) \\ &= \sum_{v\in V} f(s,v) + \sum_{v\in V} f'(s,v) \\ &= |f| + |f'|. \end{aligned}$$

Zlepšující cesta – příklad

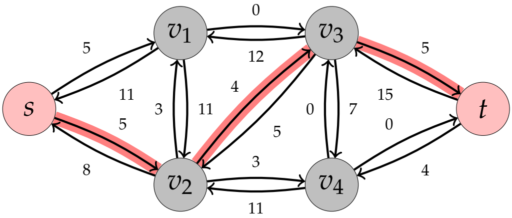
- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f tok.

Zlepšující cesta – příklad

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f tok.
- Zlepšující cesta p je jednoduchá cesta z s do t.

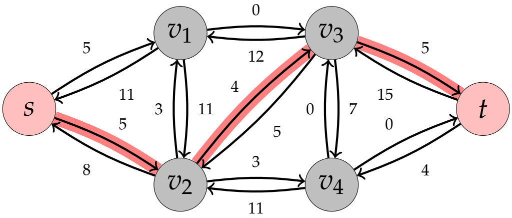
Zlepšující cesta – příklad

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f tok.
- Zlepšující cesta p je jednoduchá cesta z s do t.



Zlepšující cesta – příklad

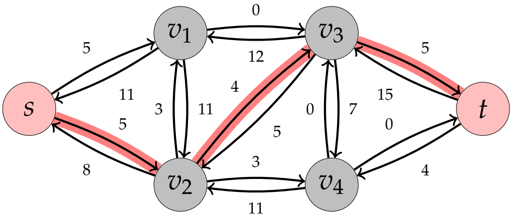
- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f tok.
- Zlepšující cesta p je jednoduchá cesta z s do t.



- Pomocí této cesty můžeme zlepšit tok o 4 jednotky.

Zlepšující cesta – příklad

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f tok.
- Zlepšující cesta p je jednoduchá cesta z s do t.



- Pomocí této cesty můžeme zlepšit tok o 4 jednotky.
- Reziduální kapacita zlepšující cesty p je

$$c_f(p) = \min\{c_f(u,v) : (u,v) \text{ je na cestě } p\} .$$

Lemma 25.
Nechť $G = (V, E)$ *je síť,* f *její tok a* p *zlepšující cesta v* G_f*. Definujme funkci*

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{pro } (u, v) \text{ na } p \\ -c_f(p) & \text{pro } (v, u) \text{ na } p \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak f_p *je tok v* G_f *velikosti* $|f_p| = c_f(p) > 0$*.*

Důkaz.
DÚ. $\square$

Lemma 25.

Nechť $G = (V, E)$ *je síť,* f *její tok a* p *zlepšující cesta v* G_f*. Definujme funkci*

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{pro } (u,v) \text{ na } p \\ -c_f(p) & \text{pro } (v,u) \text{ na } p \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Pak f_p *je tok v* G_f *velikosti* $|f_p| = c_f(p) > 0$*.*

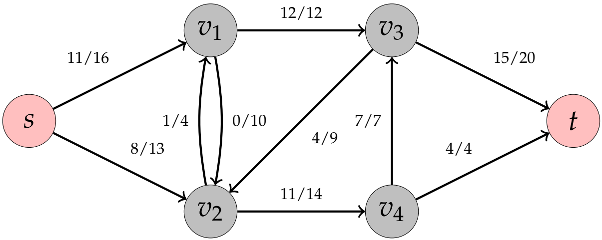
Důkaz.

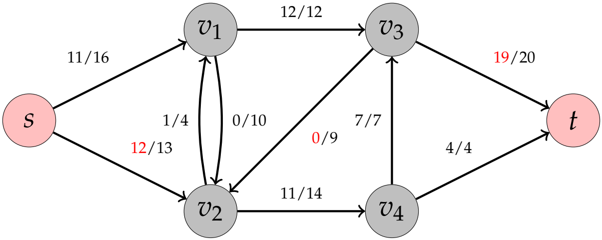
DÚ. $\square$

Corollary 26.

Nechť $f' = f + f_p$*. Pak* f' *je tok v* G *velikosti* $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$*.*

Reziduální síť a její zlepšení o 4 na $s \rightsquigarrow v_2 \rightsquigarrow v_3 \rightsquigarrow t$





Řez v síti

Řez v síti

- Řez v síti $G = (V, E)$ je rozklad množiny V na S a $T = V - S$ takový, že $s \in S$ a $t \in T$.

Řez v síti

- Řez v síti $G = (V, E)$ je rozklad množiny V na S a $T = V - S$ takový, že $s \in S$ a $t \in T$.
- Tok řezem je definován jako $f(S, T)$.

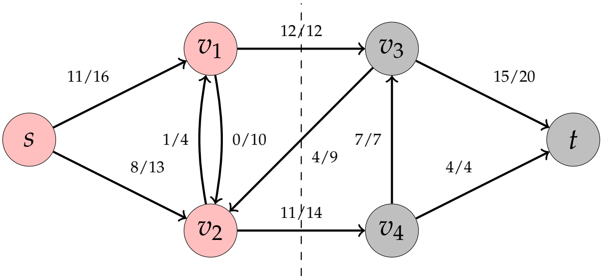
Řez v síti

- Řez v síti $G = (V, E)$ je rozklad množiny V na S a $T = V - S$ takový, že $s \in S$ a $t \in T$.
- Tok řezem je definován jako $f(S, T)$.
- Kapacita řezu (S, T) je $c(S, T)$.

Řez v síti

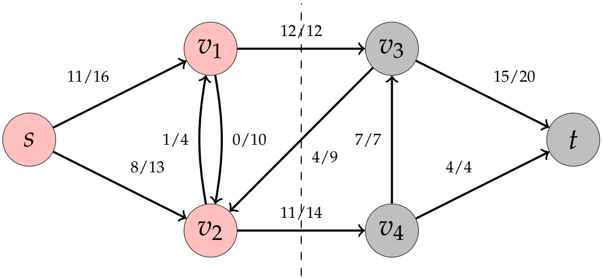
- Řez v síti $G = (V, E)$ je rozklad množiny V na S a $T = V - S$ takový, že $s \in S$ a $t \in T$.
- Tok řezem je definován jako $f(S, T)$.
- Kapacita řezu (S, T) je $c(S, T)$.
- Minimální řez je řez s minimální kapacitou.

Řez v síti – příklad



- Tok řezem $f(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\}) = f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) = 12 + (-4) + 11 = 19$.

Řez v síti – příklad



- Tok řezem $f(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\}) = f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) = 12 + (-4) + 11 = 19.$
- kapacita řezu $c(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\}) = c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) = 12 + 14 = 26.$

Vlastnosti

Lemma 27.
Nechť f je tok v G se zdrojem s s spotřebičem t a nechť (S,T) je řez G. Pak $|f| = f(S,T)$.

Důkaz.

- $f(S,T) = f(S,V) - f(S,S)$

□

Vlastnosti

Lemma 27.
Nechť f je tok v G se zdrojem s s spotřebičem t a nechť (S,T) je řez G. Pak $|f| = f(S,T)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Lemma 27.
Nechť f je tok v G se zdrojem s s spotřebičem t a nechť (S,T) je řez G. Pak $|f| = f(S,T)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-s,V) \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Lemma 27.
Nechť f *je tok v* G *se zdrojem* s *s spotřebičem* t *a nechť* (S, T) *je řez* G*.*
Pak $|f| = f(S, T)$*.*

Důkaz.

- $$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-s,V) \\ &= f(s,V) \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Lemma 27.
Nechť f je tok v G se zdrojem s s spotřebičem t a nechť (S,T) je řez G. Pak $|f| = f(S,T)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S-s,V) \\ &= f(s,V) \\ &= |f| \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Corollary 28.

Velikost libovolného toku f v G je shora omezena kapacitou libovolného řezu v G.

Důkaz.

- $|f| = f(S,T))$

□

Vlastnosti

Corollary 28.

Velikost libovolného toku f v G je shora omezena kapacitou libovolného řezu v G.

Důkaz.

- $$|f| = f(S,T)) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v)$$

$\square$

Vlastnosti

Corollary 28.

Velikost libovolného toku f v G je shora omezena kapacitou libovolného řezu v G.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} |f| &= f(S,T)) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \\ &\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Corollary 28.

Velikost libovolného toku f v G je shora omezena kapacitou libovolného řezu v G.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} |f| &= f(S,T)) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \\ &\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Corollary 28.

Velikost libovolného toku f v G je shora omezena kapacitou libovolného řezu v G.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} |f| &= f(S,T)) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \\ &\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$

$\square$

Velikost maximálního toku je vždy nejvýše kapacita minimálního řezu.

Hlavní věta

Nechť f je to v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(1) \Rightarrow (2)$:

$\square$

Hlavní věta

Nechť f je to v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(1) \Rightarrow (2)$:
  - Nechť f je maximální a p je zlepšující cesta v G.

$\square$

Hlavní věta

Nechť f je to v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(1) \Rightarrow (2)$:
  - Nechť f je maximální a p je zlepšující cesta v G.
  - Pak ale $f + f_p$ je tok v G a $|f + f_p| > |f|$. Spor.

$\square$

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S, T)$ pro nějaký řez (S, T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.
  - Nechť

$$S = \{v \in V : \text{existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ v } G_f\}$$

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S, T)$ pro nějaký řez (S, T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.
  - Nechť
$$S = \{v \in V : \text{existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ v } G_f\}$$
  - a nechť $T = V - S$.

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S, T)$ pro nějaký řez (S, T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.
  - Nechť
    $$S = \{v \in V : \text{existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ v } G_f\}$$
  - a nechť $T = V - S$.
  - Protože $s \in S$ a $t \in T$ je (S, T) řez v G.

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S, T)$ pro nějaký řez (S, T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.
  - Nechť
  $$S = \{v \in V : \text{existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ v } G_f\}$$
  - a nechť $T = V - S$.
  - Protože $s \in S$ a $t \in T$ je (S, T) řez v G.
  - Pro $u \in S$ a $v \in T$ máme $f(u, v) = c(u, v)$, jinak $(u, v) \in E_f$ a to dává $v \in S$.

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.
  - Nechť
  $$S = \{v \in V : \text{existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ v } G_f\}$$
  - a nechť $T = V - S$.
  - Protože $s \in S$ a $t \in T$ je (S,T) řez v G.
  - Pro $u \in S$ a $v \in T$ máme $f(u,v) = c(u,v)$, jinak $(u,v) \in E_f$ a to dává $v \in S$.
  - $|f| = f(S,T) = c(S,T)$.

Hlavní věta

Nechť f je to v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S, T)$ pro nějaký řez (S, T) v G.

Důkaz.

- $(3) \Rightarrow (1)$:

$\square$

Hlavní věta

Nechť f je to v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(3) \Rightarrow (1)$:
  - $|f| \leq c(S,T)$ pro libovolný řez (S,T).

$\square$

Hlavní věta

Nechť f je to v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(3) \Rightarrow (1)$:
  - $|f| \leq c(S,T)$ pro libovolný řez (S,T).
  - Z $|f| = c(S,T)$ plyne maximalita f.

□

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus

```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
1 for každou hranu (u, v) ∈ E
2     do f[u, v] ← 0
3        f[v, u] ← 0
4 while existuje cesta p z s do t v reziduální síti G_f
5     do c_f(p) ← min{c_f(u, v) : (u, v) na p}
6        for každou hranu (u, v) na p
7            do f[u, v] ← f[u, v] + c_f(p)
8               f[v, u] ← −f[u, v]
```

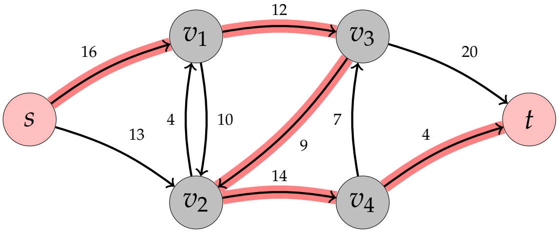
- Složitost závisí na řádku 4.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus

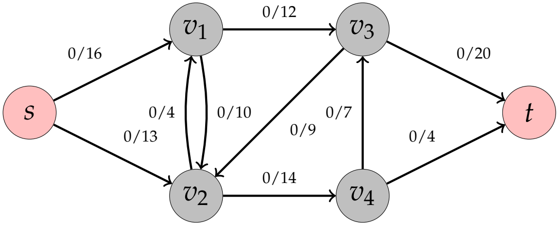
```
FORD-FULKERSON(G, s, t)
1  for každou hranu (u, v) ∈ E
2      do f[u, v] ← 0
3         f[v, u] ← 0
4  while existuje cesta p z s do t v reziduální síti G_f
5        do c_f(p) ← min{c_f(u, v) : (u, v) na p}
6           for každou hranu (u, v) na p
7               do f[u, v] ← f[u, v] + c_f(p)
8                  f[v, u] ← −f[u, v]
```

- Složitost závisí na řádku 4.
- Prohledávání do šířky dává složitost $O(nm^2)$ – tzv. Edmonds-Karp algoritmus.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

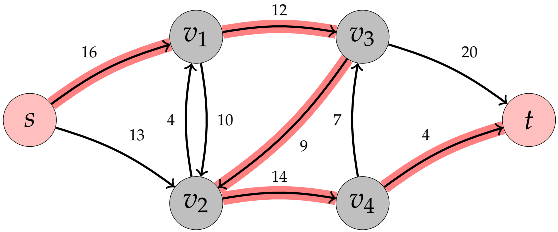


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

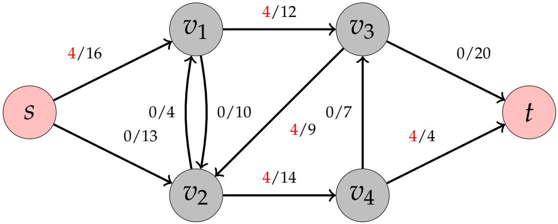


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

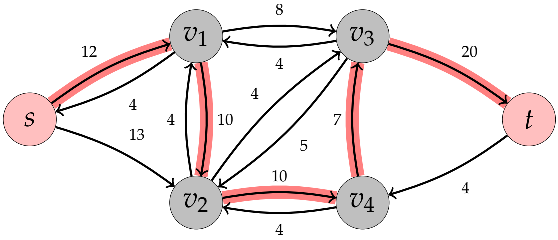


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

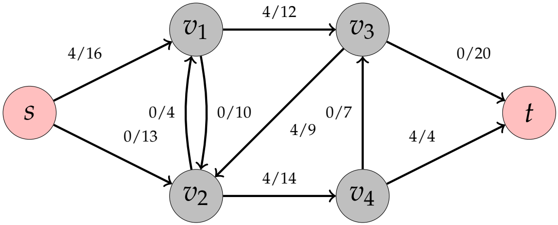


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

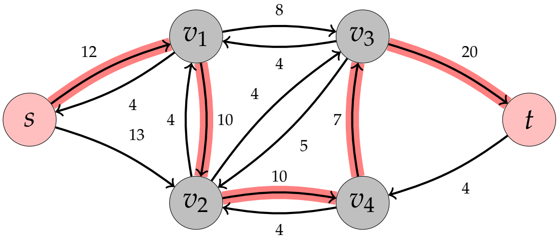


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

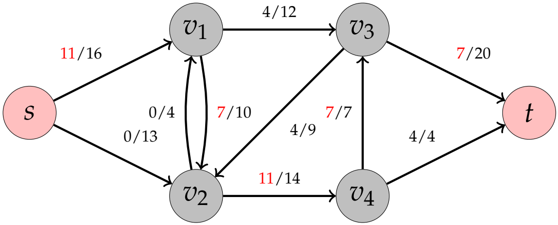


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

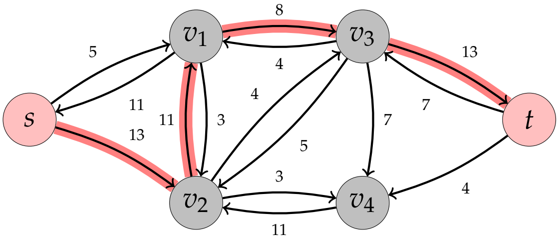


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

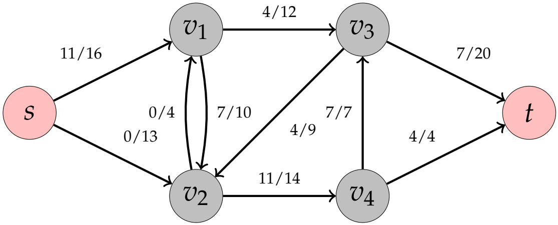


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

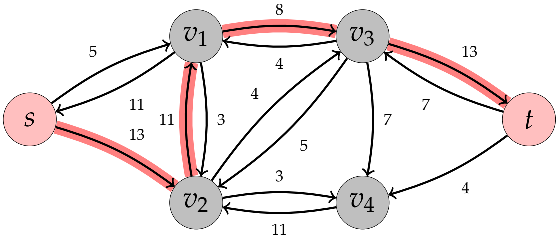


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

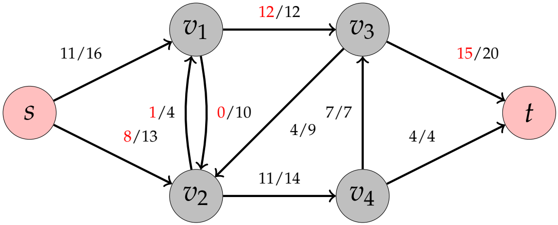


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

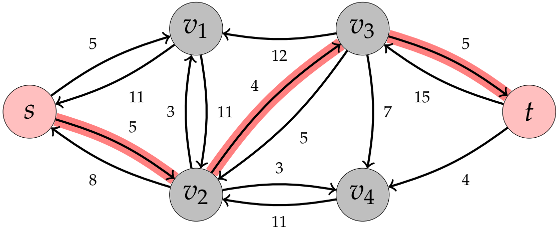


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

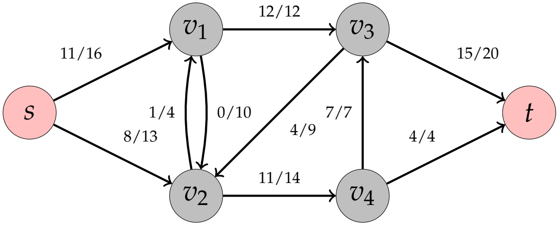


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

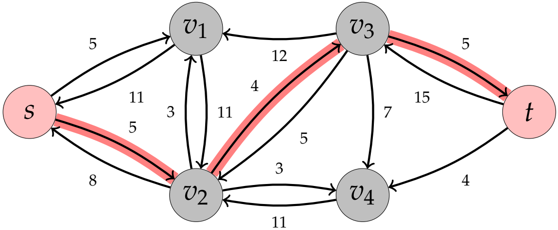


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

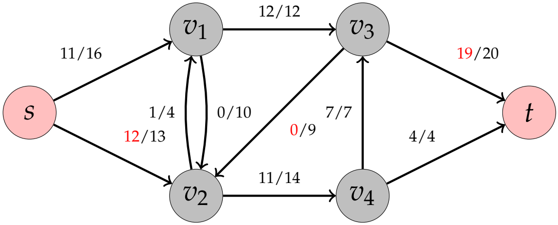


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad

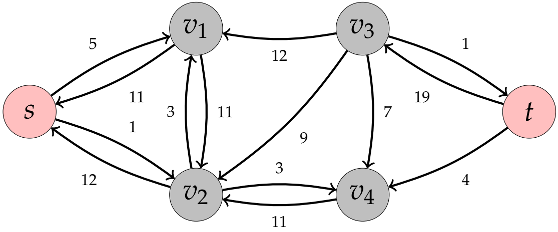


Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.

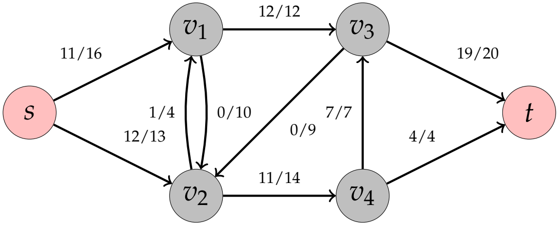


Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad



Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.



Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Maximální párování v bipartitním grafu

Maximální párování v bipartitním grafu

- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.

Maximální párování v bipartitním grafu

- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
- Párování v G je podmožina hran $M \subseteq E$ taková, že pro každý uzel $v \in V$, v je incidentní s nejvýše jednou hranou z M.

Maximální párování v bipartitním grafu

- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
- Párování v G je podmožina hran $M \subseteq E$ taková, že pro každý uzel $v \in V$, v je incidentní s nejvýše jednou hranou z M.
- Uzel je popárován, pokud je incidentní s nějakou hranou z M.

Maximální párování v bipartitním grafu

- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
- Párování v G je podmožina hran $M \subseteq E$ taková, že pro každý uzel $v \in V$, v je incidentní s nejvýše jednou hranou z M.
- Uzel je popárován, pokud je incidentní s nějakou hranou z M.
- Maximální párování je párování s maximální kardinalitou.

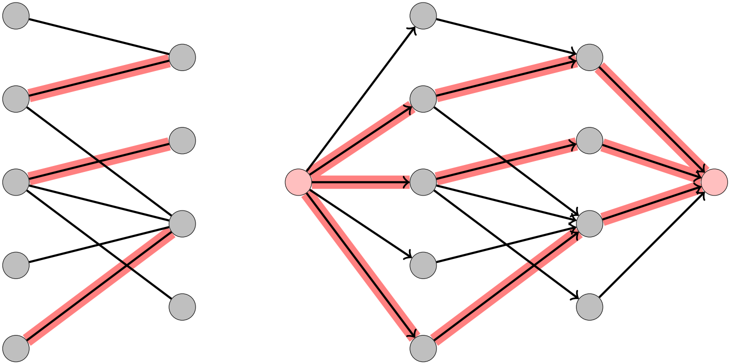
Maximální párování v bipartitním grafu

- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
- Párování v G je podmožina hran $M \subseteq E$ taková, že pro každý uzel $v \in V$, v je incidentní s nejvýše jednou hranou z M.
- Uzel je popárován, pokud je incidentní s nějakou hranou z M.
- Maximální párování je párování s maximální kardinalitou.
- Omezujeme se pouze na bipartitní grafy, tj. takové, kde V se dá rozložit na $V = L \cup R$, $R \cap L = \emptyset$, a $E \subseteq L \times R$.

Maximální párování v bipartitním grafu

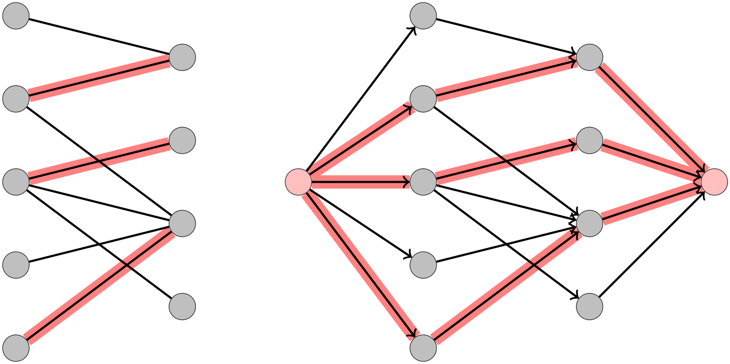
- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
- Párování v G je podmožina hran $M \subseteq E$ taková, že pro každý uzel $v \in V$, v je incidentní s nejvýše jednou hranou z M.
- Uzel je popárován, pokud je incidentní s nějakou hranou z M.
- Maximální párování je párování s maximální kardinalitou.
- Omezujeme se pouze na bipartitní grafy, tj. takové, kde V se dá rozložit na $V = L \cup R$, $R \cap L = \emptyset$, a $E \subseteq L \times R$.
- Použijeme Ford-Fulkersonovu metodu.

Transformace na problém nalezení maximálního toku



Obrázek: Bipartitní graf a odpovídající síť. Vyznačeno maximální párování a maximální tok (kapacita hran 1)

Transformace na problém nalezení maximálního toku



Obrázek: Bipartitní graf a odpovídající síť. Vyznačeno maximální párování a maximální tok (kapacita hran 1)

- Složitost $O(nm)$.

Barvení grafů

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.
- Cíl: obarvit hrany/uzly tak, aby žádné dvě incidentní hrany (dva incidentní uzly) neměly stejnou barvu.

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.
- Cíl: obarvit hrany/uzly tak, aby žádné dvě incidentní hrany (dva incidentní uzly) neměly stejnou barvu.
- Formálně, obarvení je funkce

$$f : E \to B$$

($f : V \to B$), kde B je nějaká množina barev a $f(e_1) \neq f(e_2)$ pro $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ($f(u) \neq f(v)$ pokud $\{u, v\}$ je hrana).

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.
- Cíl: obarvit hrany/uzly tak, aby žádné dvě incidentní hrany (dva incidentní uzly) neměly stejnou barvu.
- Formálně, obarvení je funkce

$$f : E \to B$$

  ($f : V \to B$), kde B je nějaká množina barev a $f(e_1) \neq f(e_2)$ pro $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ($f(u) \neq f(v)$ pokud $\{u, v\}$ je hrana).
- $\psi_e(G)$ značí minimální počet barev potřebný k hranovému obarvení G.

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.
- Cíl: obarvit hrany/uzly tak, aby žádné dvě incidentní hrany (dva incidentní uzly) neměly stejnou barvu.
- Formálně, obarvení je funkce

$$f : E \rightarrow B$$

  ($f : V \rightarrow B$), kde B je nějaká množina barev a $f(e_1) \neq f(e_2)$ pro $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ($f(u) \neq f(v)$ pokud $\{u, v\}$ je hrana).
- $\psi_e(G)$ značí minimální počet barev potřebný k hranovému obarvení G.
- $\psi_v(G)$ značí minimální počet barev potřebný k (vrcholovému) obarvení G.

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.
- Cíl: obarvit hrany/uzly tak, aby žádné dvě incidentní hrany (dva incidentní uzly) neměly stejnou barvu.
- Formálně, obarvení je funkce

$$f : E \rightarrow B$$

  ($f : V \rightarrow B$), kde B je nějaká množina barev a $f(e_1) \neq f(e_2)$ pro $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ($f(u) \neq f(v)$ pokud $\{u, v\}$ je hrana).
- $\psi_e(G)$ značí minimální počet barev potřebný k hranovému obarvení G.
- $\psi_v(G)$ značí minimální počet barev potřebný k (vrcholovému) obarvení G.
- Δ značí maximální stupeň grafu G.

Hranové barvení grafů

Hranové barvení grafů

- Jednoduché pozorování

Hranové barvení grafů

- Jednoduché pozorování
- $\Delta \leq \psi_e(G)$.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.
- Nechť všechny až na jednu hranu jsou obarveny nejvýše Δ barvami.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.
- Nechť všechny až na jednu hranu jsou obarveny nejvýše Δ barvami.
- Nechť (u, v) je neobavrená hrana.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.
- Nechť všechny až na jednu hranu jsou obarveny nejvýše Δ barvami.
- Nechť (u, v) je neobavrená hrana.
- Protože máme k dispozici Δ barev, alespoň jedna barva není incidentní s u a alespoň jedna není incidentní s v.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.
- Nechť všechny až na jednu hranu jsou obarveny nejvýše Δ barvami.
- Nechť (u, v) je neobavrená hrana.
- Protože máme k dispozici Δ barev, alespoň jedna barva není incidentní s u a alespoň jedna není incidentní s v.
- Pokud jsou tyto dvě barvy stejné, tak máme hotovo.

Hranové barvení grafů

Theorem 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.
- Nechť všechny až na jednu hranu jsou obarveny nejvýše Δ barvami.
- Nechť (u, v) je neobavrená hrana.
- Protože máme k dispozici Δ barev, alespoň jedna barva není incidentní s u a alespoň jedna není incidentní s v.
- Pokud jsou tyto dvě barvy stejné, tak máme hotovo.
- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.
- Protože (u, v) je hrana, patří u a v do různých komponent bipartitního grafu.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.
- Protože (u, v) je hrana, patří u a v do různých komponent bipartitního grafu.
- Pak ale každá cesta z u do v v $H_u(C_1, C_2)$ musí mít poslední hranu obarvenou C_2.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.
- Protože (u, v) je hrana, patří u a v do různých komponent bipartitního grafu.
- Pak ale každá cesta z u do v v $H_u(C_1, C_2)$ musí mít poslední hranu obarvenou C_2.
- Hrana obarvená C_2 však není incidentní s v, proto v není v $H_u(C_1, C_2)$.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.
- Protože (u, v) je hrana, patří u a v do různých komponent bipartitního grafu.
- Pak ale každá cesta z u do v v $H_u(C_1, C_2)$ musí mít poslední hranu obarvenou C_2.
- Hrana obarvená C_2 však není incidentní s v, proto v není v $H_u(C_1, C_2)$.
- Záměnou barev C_1 za C_2 a naopak v $H_u(C_1, C_2)$ dostaneme, že C_2 není incidentní s u.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.
- Protože (u, v) je hrana, patří u a v do různých komponent bipartitního grafu.
- Pak ale každá cesta z u do v v $H_u(C_1, C_2)$ musí mít poslední hranu obarvenou C_2.
- Hrana obarvená C_2 však není incidentní s v, proto v není v $H_u(C_1, C_2)$.
- Záměnou barev C_1 za C_2 a naopak v $H_u(C_1, C_2)$ dostaneme, že C_2 není incidentní s u.
- (u, v) tedy může být obarvena C_2. $\square$

Hranové barvení grafů

Theorem 30.
Pokud je G úplný graf s n uzly, pak $\psi_e(G) = \begin{cases} \Delta & n \textit{ sudé} \\ \Delta + 1 & n \textit{ liché} \end{cases}$

Důkaz

- Pokud je n liché, nakresleme graf jako pravidelný polygon (viz dále).

Hranové barvení grafů

Theorem 30.
Pokud je G úplný graf s n uzly, pak $\psi_e(G) = \begin{cases} \Delta & n \text{ sudé} \\ \Delta + 1 & n \text{ liché} \end{cases}$

Důkaz

- Pokud je n liché, nakresleme graf jako pravidelný polygon (viz dále).
- Obarvíme hraniční hrany barvami 1 až $n = \Delta + 1$.

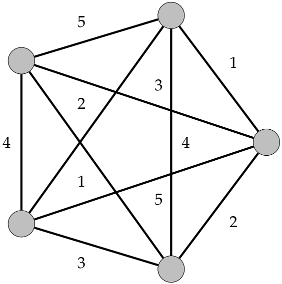
Hranové barvení grafů

Theorem 30.
Pokud je G úplný graf s n uzly, pak $\psi_e(G) = \begin{cases} \Delta & n \text{ sudé} \\ \Delta + 1 & n \text{ liché} \end{cases}$

Důkaz

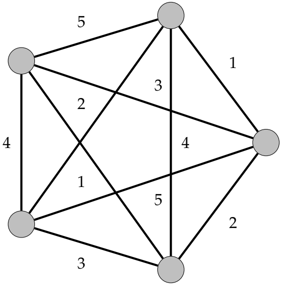
- Pokud je n liché, nakresleme graf jako pravidelný polygon (viz dále).
- Obarvíme hraniční hrany barvami 1 až $n = \Delta + 1$.
- Každá vnitřní hrana je obarvena stejně, jako s ní paralelní hrana.

Hranové barvení grafů



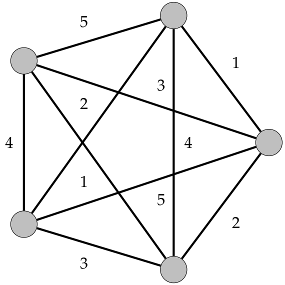
Hranové barvení grafů

- Nejde obarvit $\Delta = n - 1$ barvami:



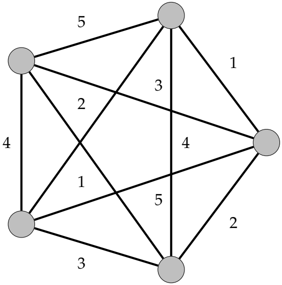
Hranové barvení grafů

- Nejde obarvit $\Delta = n - 1$ barvami:
- Pokud by šlo, pak protože G má $\frac{1}{2}n(n-1)$ hran, alespoň $\frac{1}{2}n$ hran by mělo stejnou barvu.



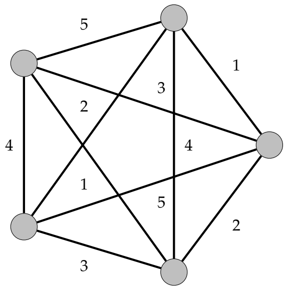
Hranové barvení grafů

- Nejde obarvit $\Delta = n - 1$ barvami:
- Pokud by šlo, pak protože G má $\frac{1}{2}n(n-1)$ hran, alespoň $\frac{1}{2}n$ hran by mělo stejnou barvu.
- Nechť $M \subseteq E$ taková, že žádné dvě hrany z M nejsou incidentní.



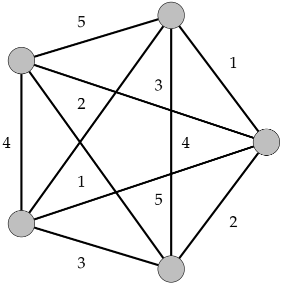
Hranové barvení grafů

- Nejde obarvit $\Delta = n - 1$ barvami:
- Pokud by šlo, pak protože G má $\frac{1}{2}n(n-1)$ hran, alespoň $\frac{1}{2}n$ hran by mělo stejnou barvu.
- Nechť $M \subseteq E$ taková, že žádné dvě hrany z M nejsou incidentní.
- Pak $|M| \leq \frac{1}{2}(n-1)$ – (dokažte).



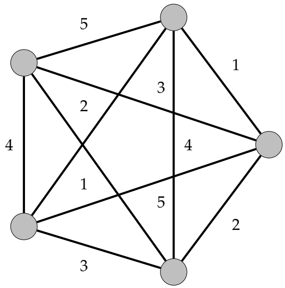
Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.



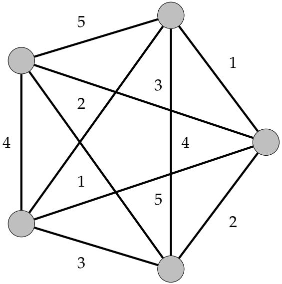
Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.
- Dívejme se na G jako na úplný graf G' na $n - 1$ uzlech s jedním uzlem navíc spojeným se všemi ostatními uzly.



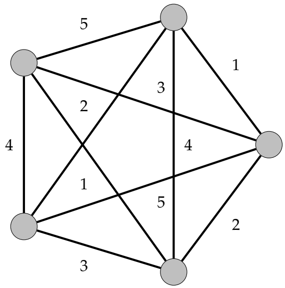
Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.
- Dívejme se na G jako na úplný graf G' na $n-1$ uzlech s jedním uzlem navíc spojeným se všemi ostatními uzly.
- Použijme předchozí postup na G'.



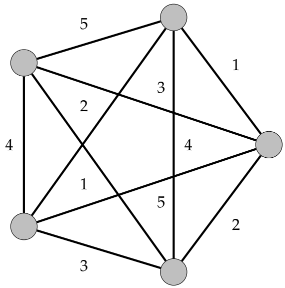
Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.
- Dívejme se na G jako na úplný graf G' na $n-1$ uzlech s jedním uzlem navíc spojeným se všemi ostatními uzly.
- Použijme předchozí postup na G'.
- V každém uzlu schází jedna barva.



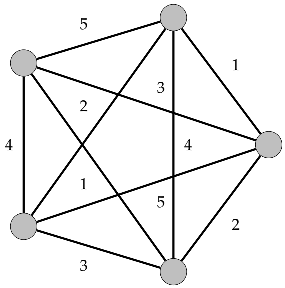
Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.
- Dívejme se na G jako na úplný graf G' na $n-1$ uzlech s jedním uzlem navíc spojeným se všemi ostatními uzly.
- Použijme předchozí postup na G'.
- V každém uzlu schází jedna barva.
- Tyto barvy jsou navzájem různe, proto můžeme ony nové hrany jimi obarvit.



Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.
- Dívejme se na G jako na úplný graf G' na $n-1$ uzlech s jedním uzlem navíc spojeným se všemi ostatními uzly.
- Použijme předchozí postup na G'.
- V každém uzlu schází jedna barva.
- Tyto barvy jsou navzájem různe, proto můžeme ony nové hrany jimi obarvit.
- Použito pouze $\Delta = n-1$ barev. $\square$



Hranové barvení grafů

Theorem 31.
Nechť G je prostý graf. Pak $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Hranové barvení grafů

Theorem 31.
Nechť G *je prostý graf. Pak* $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.
- Indukcí k počtu hran.

Hranové barvení grafů

Theorem 31.
Nechť G je prostý graf. Pak $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.
- Indukcí k počtu hran.
- Pro jednu hranu platí.

Hranové barvení grafů

Theorem 31.
Nechť G je prostý graf. Pak $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.
- Indukcí k počtu hran.
- Pro jednu hranu platí.
- Nechť tedy všechny hrany kromě hrany (v_0, v_1) jsou obarveny nejvýše $\Delta + 1$ barvami.

Hranové barvení grafů

Theorem 31.
Nechť G je prostý graf. Pak $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.
- Indukcí k počtu hran.
- Pro jednu hranu platí.
- Nechť tedy všechny hrany kromě hrany (v_0, v_1) jsou obarveny nejvýše $\Delta + 1$ barvami.
- Alespoň jedna barva není ve v_0 a alespoň jedna není ve v_1.

Hranové barvení grafů

Theorem 31.
Nechť G je prostý graf. Pak $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.
- Indukcí k počtu hran.
- Pro jednu hranu platí.
- Nechť tedy všechny hrany kromě hrany (v_0, v_1) jsou obarveny nejvýše $\Delta + 1$ barvami.
- Alespoň jedna barva není ve v_0 a alespoň jedna není ve v_1.
- Pokud jde o tutéž barvu, hotovo.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.
- Mějme tedy posloupnost $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_i)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i$, pro nějaké $i \geq 0$.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.
- Mějme tedy posloupnost $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_i)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i$, pro nějaké $i \geq 0$.
- Všimněme si, že máme nejvýše jednu hranu, (v_0, v), s barvou C_i.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.
- Mějme tedy posloupnost $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_i)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i$, pro nějaké $i \geq 0$.
- Všimněme si, že máme nejvýše jednu hranu, (v_0, v), s barvou C_i.
  - Pokud takové v existuje a $v \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, pak přidáme hranu (v_0, v_{i+1}), kde $v_{i+1} = v$, a C_{i+1} je barva, která není ve v_{i+1}.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.
- Mějme tedy posloupnost $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_i)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i$, pro nějaké $i \geq 0$.
- Všimněme si, že máme nejvýše jednu hranu, (v_0, v), s barvou C_i.
  - Pokud takové v existuje a $v \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, pak přidáme hranu (v_0, v_{i+1}), kde $v_{i+1} = v$, a C_{i+1} je barva, která není ve v_{i+1}.
  - Jinak ukončíme budování posloupnosti.

Hranové barvení grafů

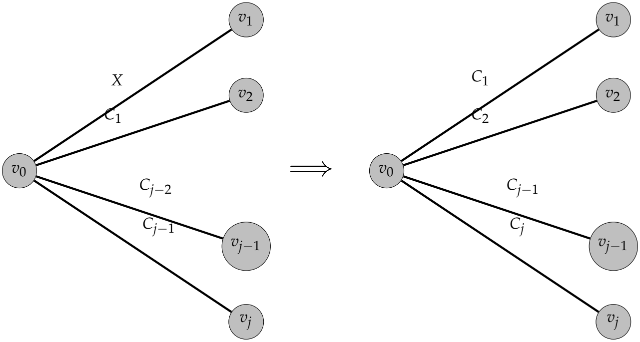
- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.
- Mějme tedy posloupnost $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_i)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i$, pro nějaké $i \geq 0$.
- Všimněme si, že máme nejvýše jednu hranu, (v_0, v), s barvou C_i.
  - Pokud takové v existuje a $v \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, pak přidáme hranu (v_0, v_{i+1}), kde $v_{i+1} = v$, a C_{i+1} je barva, která není ve v_{i+1}.
  - Jinak ukončíme budování posloupnosti.
- Každá posloupnost končí s nejvýše Δ prvky.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  i) Neexistuje hrana (v_0, v) s barvou C_j, pak uděláme následující přebarvení ($X \neq C_j$):



Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.
    - Pak pro $i < k$ přebarvíme hrany jako výše, tj. (v_0, v_i) dostane barvu C_i.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.
    - Pak pro $i < k$ přebarvíme hrany jako výše, tj. (v_0, v_i) dostane barvu C_i.
    - (v_0, v_k) zůstane neobavrená.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.
    - Pak pro $i < k$ přebarvíme hrany jako výše, tj. (v_0, v_i) dostane barvu C_i.
    - (v_0, v_k) zůstane neobavrená.
- Každá komponenta $H(C_0, C_j)$ – podgraf obsahující všechny hrany barvy C_0 a C_j – je buď cesta, nebo cyklus, protože každý uzel má nejvýše jednu hranu barvy C_0 a jednu barvy C_j.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.
    - Pak pro $i < k$ přebarvíme hrany jako výše, tj. (v_0, v_i) dostane barvu C_i.
    - (v_0, v_k) zůstane neobavrená.
- Každá komponenta $H(C_0, C_j)$ – podgraf obsahující všechny hrany barvy C_0 a C_j – je buď cesta, nebo cyklus, protože každý uzel má nejvýše jednu hranu barvy C_0 a jednu barvy C_j.
- Alespoň jedna barva z C_0 a C_j není v každém z uzlů v_0, v_k, v_j.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.
    - Pak pro $i < k$ přebarvíme hrany jako výše, tj. (v_0, v_i) dostane barvu C_i.
    - (v_0, v_k) zůstane neobavrená.
- Každá komponenta $H(C_0, C_j)$ – podgraf obsahující všechny hrany barvy C_0 a C_j – je buď cesta, nebo cyklus, protože každý uzel má nejvýše jednu hranu barvy C_0 a jednu barvy C_j.
- Alespoň jedna barva z C_0 a C_j není v každém z uzlů v_0, v_k, v_j.
- Proto ne všechny v jedné komponentě $H(C_0, C_j)$:

  $v_0 \xrightarrow{C_j} x \xrightarrow{X} y \ldots \xrightarrow{C_0} v_k$ a už se nedostaneme do v_j.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.
- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme

  - (v_0, v_i) barvou C_i, $k \leq i < j$,

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme

  - (v_0, v_i) barvou C_i, $k \leq i < j$,
  - (v_0, v_j) zůstane neobavrená.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme
  - (v_0, v_i) barvou C_i, $k \leq i < j$,
  - (v_0, v_j) zůstane neobavrená.

- Při přebarvení se nepoužila ani C_0, ani C_j, proto $H(C_0, C_j)$ nezměněno.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme
   - (v_0, v_i) barvou C_i, $k \leq i < j$,
   - (v_0, v_j) zůstane neobavrená.

- Při přebarvení se nepoužila ani C_0, ani C_j, proto $H(C_0, C_j)$ nezměněno.
- Opět $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_j}(C_0, C_j)$ a máme, že C_0 není ve v_j.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme
  - (v_0, v_i) barvou C_i, $k \leq i < j$,
  - (v_0, v_j) zůstane neobavrená.

- Při přebarvení se nepoužila ani C_0, ani C_j, proto $H(C_0, C_j)$ nezměněno.
- Opět $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_j}(C_0, C_j)$ a máme, že C_0 není ve v_j.
- Obarvíme (v_0, v_j) barvou C_0. $\square$

Hranové barvení grafů

- Předchozí důkaz dává polynomiální algoritmus.

Hranové barvení grafů

- Předchozí důkaz dává polynomiální algoritmus.
- Vidíte ho? :-)

Hranové barvení grafů

- Předchozí důkaz dává polynomiální algoritmus.
- Vidíte ho? :-)
- Jaká je složitost?

Hranové barvení grafů

- Předchozí důkaz dává polynomiální algoritmus.
- Vidíte ho? :-)
- Jaká je složitost?

- Problém, zda $\psi_e(G) = \Delta$ je NP-úplný.

(Vrcholové) barvení grafů

Barvení grafů

- Je graf obarvitelný nejvýše k barvami? je NP-úplný problém.

Barvení grafů

Theorem 32.
Libovolný (prostý) graf G lze obarvit $\Delta + 1$ barvami.

Důkaz.

- Indukcí k n.

□

Barvení grafů

Theorem 32.
Libovolný (prostý) graf G lze obarvit $\Delta + 1$ barvami.

Důkaz.

- Indukcí k n.
- $n = 1$, hotovo.

□

Barvení grafů

Theorem 32.
Libovolný (prostý) graf G lze obarvit $\Delta + 1$ barvami.

Důkaz.

- Indukcí k n.
- $n = 1$, hotovo.
- Pokud přidáme uzel u, pak bude spojen nejvýše s Δ jinými uzly.

□

Barvení grafů

Theorem 32.
Libovolný (prostý) graf G lze obarvit $\Delta + 1$ barvami.

Důkaz.

- Indukcí k n.
- $n = 1$, hotovo.
- Pokud přidáme uzel u, pak bude spojen nejvýše s Δ jinými uzly.
- Barev máme $\Delta + 1$, proto můžeme u obarvit nějakou barvou.

$\square$

Barvení grafů

- Ve většině případů ale platí, že $\psi_v(G) < \Delta + 1$.

Barvení grafů

- Ve většině případů ale platí, že $\psi_v(G) < \Delta + 1$.
- Příklad:

Barvení grafů

- Ve většině případů ale platí, že $\psi_v(G) < \Delta + 1$.
- Příklad:
- G planární, pak $\psi_v(G) \leq 4$, přitom $\Delta = k$, pro libovolné $k > 0$.

Barvení grafů

- Ve většině případů ale platí, že $\psi_v(G) < \Delta + 1$.
- Příklad:
- G planární, pak $\psi_v(G) \leq 4$, přitom $\Delta = k$, pro libovolné $k > 0$.
- Rychlosoutěž: Jaký algoritmus na obarvení uzlů vás napadne?

Chromatický polynom

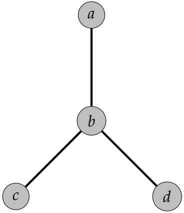
Chromatický polynom

- Nechť $P_k(G)$ označuje počet způsobů obarvení grafu G k barvami.

Chromatický polynom

- Nechť $P_k(G)$ označuje počet způsobů obarvení grafu G k barvami.
- $P_k(G)$ je polynom.

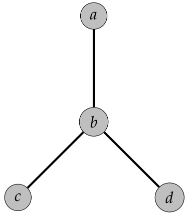
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_1.

- b ... dostane libovolnou z k barev.

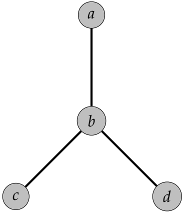
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_1.

- b . . . dostane libovolnou z k barev.
- a, c, d . . . libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.

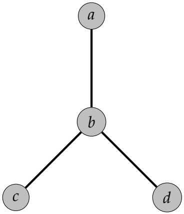
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_1.

- b ... dostane libovolnou z k barev.
- a, c, d ... libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- $P_k(G_1) = k(k-1)^3$

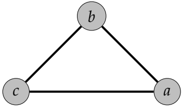
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_1.

- b ... dostane libovolnou z k barev.
- a, c, d ... libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- $P_k(G_1) = k(k-1)^3$
- Obecně, nechť T_n je strom na n uzlech. Pak $P_k(T_n) = k(k-1)^{n-1}$.

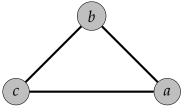
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.

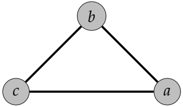
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.
- b . . . libovolnou z $k - 1$ zbývajících barev.

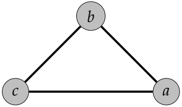
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- c ... libovolnou z $k-2$ zbývajících barev.

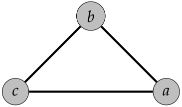
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.
- b . . . libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- c . . . libovolnou z $k-2$ zbývajících barev.
- $P_k(G_2) = k(k-1)(k-2)$

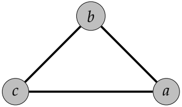
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- c ... libovolnou z $k-2$ zbývajících barev.
- $P_k(G_2) = k(k-1)(k-2)$
- Obecně, nechť K_n je úplný graf na n uzlech.

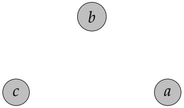
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- c ... libovolnou z $k-2$ zbývajících barev.
- $P_k(G_2) = k(k-1)(k-2)$
- Obecně, nechť K_n je úplný graf na n uzlech.
- Pak $P_k(K_n) = \frac{k!}{(k-n)!}$

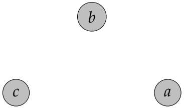
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2'.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.

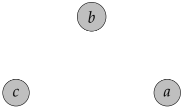
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2'.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.
- b . . . libovolnou z k barev.

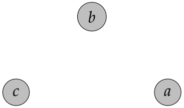
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2'.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.
- b . . . libovolnou z k barev.
- c . . . libovolnou z k barev.

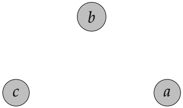
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2'.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z k barev.
- c ... libovolnou z k barev.
- $P_k(G_2') = k^3$

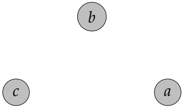
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G'_2.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z k barev.
- c ... libovolnou z k barev.
- $P_k(G'_2) = k^3$
- Obecně, nechť Φ_n je graf na n uzlech bez hran.

Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2'.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z k barev.
- c ... libovolnou z k barev.
- $P_k(G_2') = k^3$
- Obecně, nechť Φ_n je graf na n uzlech bez hran.
- Pak $P_k(\Phi_n) = k^n$

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.
- Nechť G je graf.

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.

- Nechť G je graf.
- Jak sestrojit $P_k(G)$?

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.

- Nechť G je graf.
- Jak sestrojit $P_k(G)$?

- Značení:

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.

- Nechť G je graf.
- Jak sestrojit $P_k(G)$?

- Značení:
- $G - (u, v)$ je graf vzniklý z G odebráním hrany (u, v)

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.

- Nechť G je graf.
- Jak sestrojit $P_k(G)$?

- Značení:
- $G - (u, v)$ je graf vzniklý z G odebráním hrany (u, v)
- $G \circ (u, v)$ je graf vzniklý z G sloučením uzlů u a v.

Chromatický polynom

Theorem 33.
Nechť (u,v) *je hrana v* G*, pak*

$$P_k(G) = P_k(G - (u,v)) - P_k(G \circ (u,v)) \, .$$

Důkaz.

- $P_k(G)$ je počet obarvení, kde u a v mají různou barvu.

□

Chromatický polynom

Theorem 33.
Nechť (u,v) *je hrana v* G*, pak*

$$P_k(G) = P_k(G - (u,v)) - P_k(G \circ (u,v)) \,.$$

Důkaz.

- $P_k(G)$ je počet obarvení, kde u a v mají různou barvu.
- Všechna tato obarvení jsou zahrnuta i v $P_k(G - (u,v))$.

□

Chromatický polynom

Theorem 33.
Nechť (u,v) *je hrana v* G, *pak*

$$P_k(G) = P_k(G - (u,v)) - P_k(G \circ (u,v)) \,.$$

Důkaz.

- $P_k(G)$ je počet obarvení, kde u a v mají různou barvu.
- Všechna tato obarvení jsou zahrnuta i v $P_k(G - (u,v))$.
- $P_k(G - (u,v))$ však navíc obsahuje i ta obarvení, kde u a v mají stejnou barvu.

$\square$

Chromatický polynom

Theorem 33.
Nechť (u, v) je hrana v G, pak

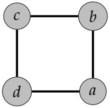
$$P_k(G) = P_k(G - (u, v)) - P_k(G \circ (u, v)) .$$

Důkaz.

- $P_k(G)$ je počet obarvení, kde u a v mají různou barvu.
- Všechna tato obarvení jsou zahrnuta i v $P_k(G - (u, v))$.
- $P_k(G - (u, v))$ však navíc obsahuje i ta obarvení, kde u a v mají stejnou barvu.
- Odečteme je tedy v $P_k(G \circ (u, v))$.

□

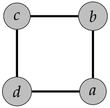
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_3.

- $P_k(G_3) = P_k(\Phi_4) - 4P_k(\Phi_3) + 6P_k(\Phi_2) - 3P_k(\Phi_1)$

Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_3.

- $$P_k(G_3) = P_k(\Phi_4) - 4P_k(\Phi_3) + 6P_k(\Phi_2) - 3P_k(\Phi_1)$$
  $$= k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

Chromatický polynom

Theorem 34.
Nechť (u, v) *je hrana v* G*, pak*

$$P_k(G) = P_k(G - (u, v)) - P_k(G \circ (u, v)) .$$

- Pokud má graf hodně hran, je lepší použít přeformulovanou variantu:

Chromatický polynom

Theorem 34.
Nechť (u,v) *je hrana v* G, *pak*

$$P_k(G) = P_k(G - (u,v)) - P_k(G \circ (u,v)) \,.$$

- Pokud má graf hodně hran, je lepší použít přeformulovanou variantu:
- $P_k(G) = P_k(G + (u,v)) + P_k((G + (u,v)) \circ (u,v))$

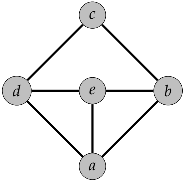
Chromatický polynom

Theorem 34.
Nechť (u, v) *je hrana v* G, *pak*

$$P_k(G) = P_k(G - (u, v)) - P_k(G \circ (u, v)) \, .$$

- Pokud má graf hodně hran, je lepší použít přeformulovanou variantu:
- $P_k(G) = P_k(G + (u, v)) + P_k((G + (u, v)) \circ (u, v))$
- tj., doplňujeme na úplný graf.

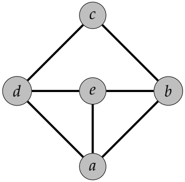
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_3.

- $P_k(G_4) = P_k(K_5) + 3P_k(K_4) + 2P_k(K_3)$

Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_3.

- $$\begin{aligned} P_k(G_4) &= P_k(K_5) + 3P_k(K_4) + 2P_k(K_3) \\ &= k(k-1)(k-2)(k^2-4k+5) \end{aligned}$$

Chromatický polynom

- Nyní máme, že $\psi_v(G)$ je minimální k takové, že $P_k(G) > 0$.

Chromatický polynom

- Nyní máme, že $\psi_v(G)$ je minimální k takové, že $P_k(G) > 0$.
- $\psi_v(G_3) = 2$

Chromatický polynom

- Nyní máme, že $\psi_v(G)$ je minimální k takové, že $P_k(G) > 0$.

- $\psi_v(G_3) = 2$
- $\psi_v(G_4) = ?$