Grafové algoritmy

Zbyněk Křivka, Tomáš Masopust

Aktualizováno: 29. listopadu 2017

Obsah

Úvod
Grafy
Reprezentace grafů
Prohledávání do šířky
Prohledávání do hloubky
    Topologické uspořádání
    Silně souvislé komponenty (Strongly Connected Components)
Minimální kostry
Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů
    Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů v acyklických grafech
Nejkratší cesty ze všech uzlů do všech ostatních uzlů
Toky v síti
Řez v síti
Maximální párování v bipartitním grafu
Barvení grafů
    Hranové barvení grafů
    (Vrcholové) barvení grafů
    Chromatický polynom
Eulerovské tahy
Hamiltonovské cesty a kružnice

Literatura

- Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: *Introduction to algorithms.* The MIT Press and McGraw-Hill, 2001.
- Gibbons: *Algorithmic Graph Theory.* Cambridge University Press, 1985.
- Demel: *Grafy a jejich aplikace.* Academia, 2002.

Materiály

- Slajdy k přednáškám
- Text generovaný z přednáškových slajdů
- Příklady k procvičení, Sbírka úloha
- Záznamy?

Organizace výuky

- přednášky (2/3 + 0/1) – Zbyněk Křivka
- konzultace – viz stránky vyučujících
- projekt (25 bodů) – Zbyněk Křivka + Lucie Charvát
- půlsemestrální písemka (15 bodů) – v polovině semestru
- zkouška (60 bodů) — 3+1 termíny, minimum 25 bodů

Více k projektu

- rozdělení do týmů po 2 studentech
- na zadání se registruje celý tým (kapitán)
- demonstrační aplikace, ověření časové složitosti, rešerše, vlastní zadání
- prezentace řešení na poslední přednášce/konzultaci
- implementační jazyk po dohodě s cvičící(m) (C/C++, Java, C#, Python, ...)

Úvod

Základní pojmy

- Neformálně, algoritmus je dobře definovaná výpočetní procedura, která přijímá nějaké hodnoty (množinu hodnot) jako vstup a produkuje nějakou hodnotu (množinu hodnot) jako výstup.

- Algoritmus je tedy posloupnost výpočetních kroků, které transformují vstup na výstup.

- Datová struktura je způsob, jak uložit a organizovat data tak, aby k nim bylo co nejvíce ulehčeno přistupování a modifikování.

Požadavky kladené na algoritmy

- Algoritmus skončí pro každý (správně zadaný) vstup.
- Výstup algoritmu je korektní.

- Čas ani paměť nejsou neomezeny.
- Existuje mnoho řešení určitého problému, ty se však dramaticky liší svojí efektivností.
- Velký důraz kladen na časovou a prostorovou efektivnost.

Složitost algoritmu

Časová složitost algoritmu:

- Maximální počet "primitivních" kroků vykonaných daným algoritmem nad všemi vstupy stejné "velikosti", tj. počet kroků v nejhorším případě.
- Popsána funkcí závislou na velikosti vstupu, $T(n)$.

Prostorová složitost algoritmu:

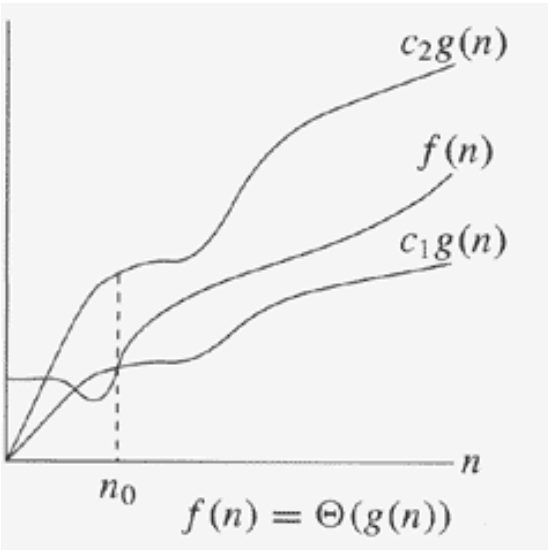
- Maximální velikost obsazené paměti během výpočtu algoritmu nad všemi vstupy stejné "velikosti".
- Popsána funkcí závislou na velikosti vstupu, $S(n)$.

n může být obecně vektor hodnot.

Θ-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $\Theta(g(n)) = \{f(n) :$ existují $c_1, c_2, n_0 > 0$ takové, že $0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ pro $n \geq n_0\}$.



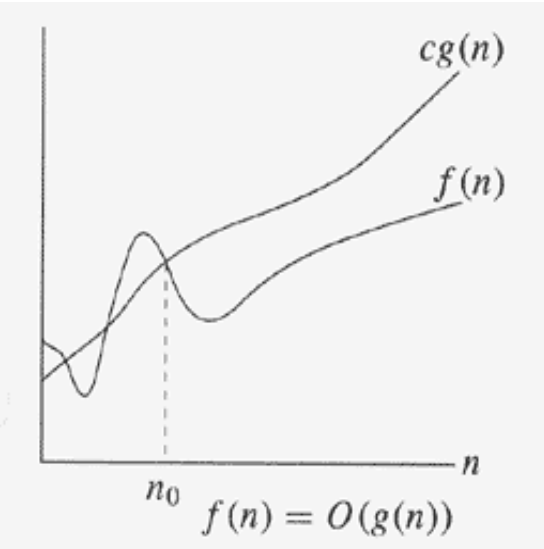
Obrázek: Θ-notace.

- Obvykle píšeme $f(n) = \Theta(g(n))$ místo $f(n) \in \Theta(g(n))$.
- $\frac{1}{2}n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ – ověřte pro $c_1 = \frac{1}{14}, c_2 = \frac{1}{2}, n_0 = 7$.

O-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $O(g(n)) = \{f(n) :$ existují $c, n_0 > 0$ takové, že $0 \leq f(n) \leq cg(n)$ pro $n \geq n_0\}$.



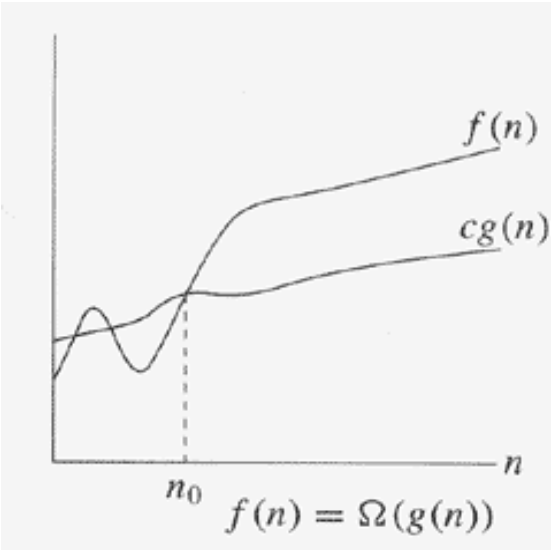
- $\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$.
- $n = O(n^2)$, ale $n \neq \Theta(n^2)$.

Obrázek: O-notace.

Ω-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $\Omega(g(n)) = \{f(n) :$ existují $c, n_0 > 0$ takové, že $0 \leq cg(n) \leq f(n)$ pro $n \geq n_0\}$.



Věta 1.
Pro libovolné funkce $f(n)$ a $g(n)$ platí $f(n) = \Theta(g(n))$, právě když $f(n) = O(g(n))$ a $f(n) = \Omega(g(n))$.

Obrázek: Ω-notace.

o-notace a ω-notace

Nechť $g(n)$ je funkce.

- $o(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq f(n) < cg(n)$ pro $n \geq n_0\}$.
- $\omega(g(n)) = \{f(n) :$ pro každé $c > 0$ existuje $n_0 > 0$ takové, že $0 \leq cg(n) < f(n)$ pro $n \geq n_0\}$.
- $f(n) \in \omega(g(n))$, právě když $g(n) \in o(f(n))$.

- $2n = o(n^2)$, ale $2n^2 \neq o(n^2)$.
- $f(n) = o(g(n))$, pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$.

- $n^2/2 = \omega(n)$, ale $n^2/2 \neq \omega(n^2)$.
- $f(n) = \omega(g(n))$, pokud $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$.

Vlastnosti

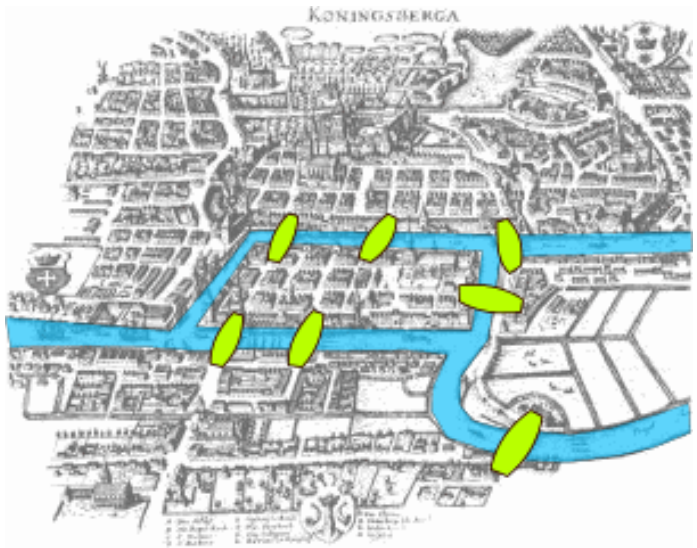
Nechť $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$ jsou (asymptoticky kladné) funkce.

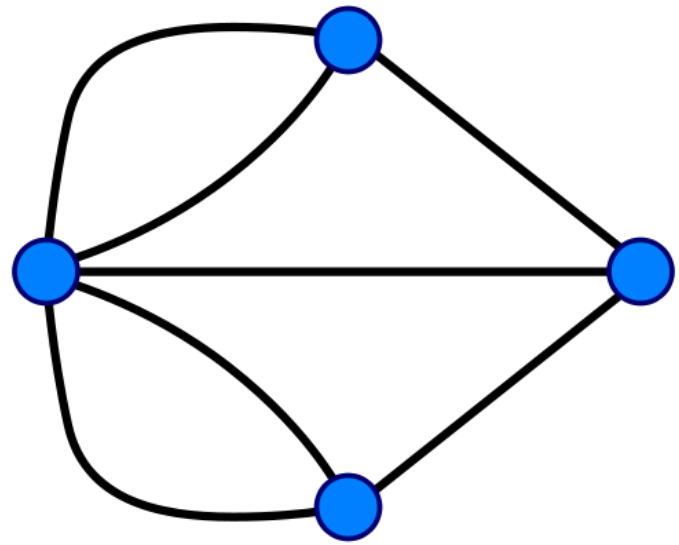
- Tranzitivita
  $f(n) = X(g(n))$ a $g(n) = X(h(n))$ implikuje $f(n) = X(h(n))$,
  pro $X \in \{\Theta, O, \Omega, o, \omega\}$.
- Reflexivita
  $f(n) = X(f(n))$, pro $X \in \{\Theta, O, \Omega\}$.
- Symetrie
  $f(n) = \Theta(g(n))$, právě když $g(n) = \Theta(f(n))$.
- Transponovaná symetrie
  $f(n) = O(g(n))$, právě když $g(n) = \Omega(f(n))$.
  $f(n) = o(g(n))$, právě když $g(n) = \omega(f(n))$.
- Ne vždy porovnatelné
  n a $n^{1+\sin(n)}$ jsou neporovnatelné.

Grafy

Grafy: Úvod, historie, definice

- Leonhard Euler, *Sedm mostů města Královce*, 1736.
- Otázka: Je možné přejít všechny mosty, ale každý pouze jednou?





Obrázek: Sedm mostů města Královce a jejich grafická reprezentace.

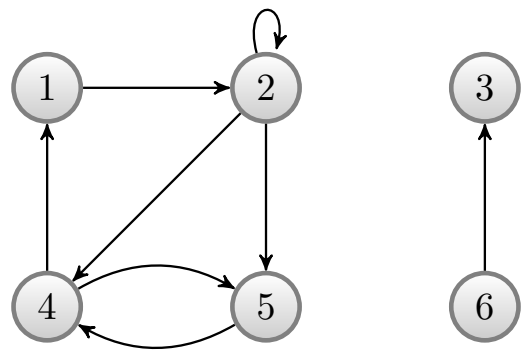
Orientovaný graf G je dvojice

$$G = (V, E),$$

kde

- V je konečná množina uzlů a
- $E \subseteq V^2$ je množina hran.

Hrana (u, u) se nazývá smyčka.
Pokud (u, v) je hrana, říkáme, že u a v jsou incidentní.



Obrázek: Orientovaný graf

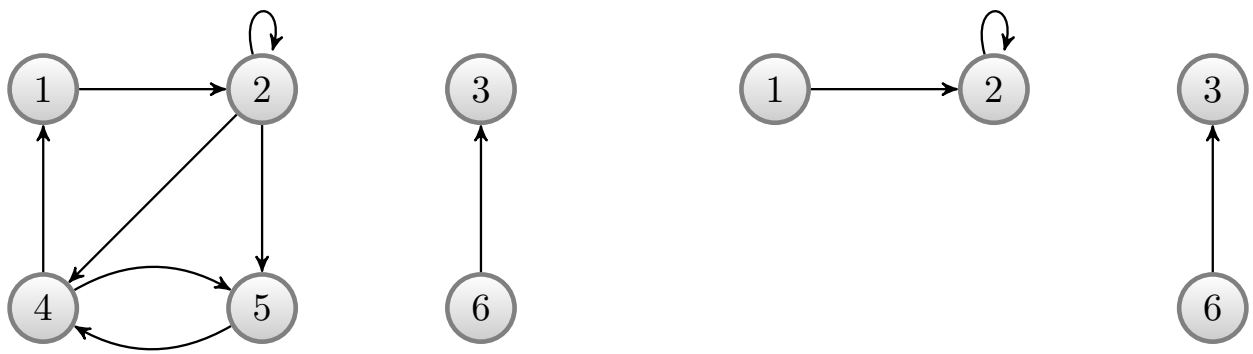
Graf $G' = (V', E')$ je podgraf grafu $G = (V, E)$, jestliže

- $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

Mějme $V'' \subseteq V$. Podgraf indukovaný V'' je graf $G'' = (V'', E'')$, kde

- $E'' = \{(u, v) \in E : u, v \in V''\}$.

Mějme $E''' \subseteq E$. Faktorový podgraf grafu G je graf $G''' = (V, E''')$.



Obrázek: Graf a jeho podgraf indukovaný množinou $\{1, 2, 3, 6\}$.

Neorientovaný graf G je dvojice

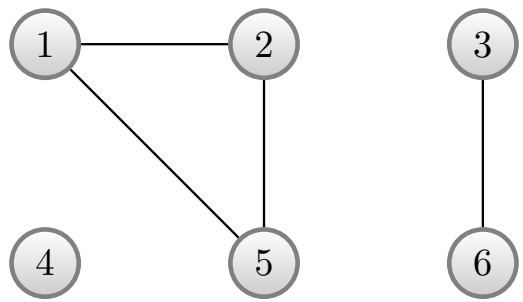
$$G = (V, E),$$

kde

- V je konečná množina uzlů a
- $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.

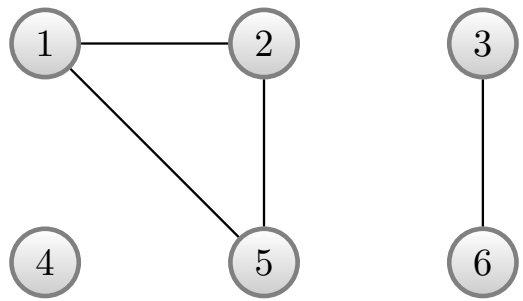
Poznámka

Hrana je množina $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$ a $u \neq v$. I v neorientovaném případě však budeme hrany značit (u, v) a považovat (u, v) a (v, u) za stejnou hranu. Smyčky nejsou povoleny.



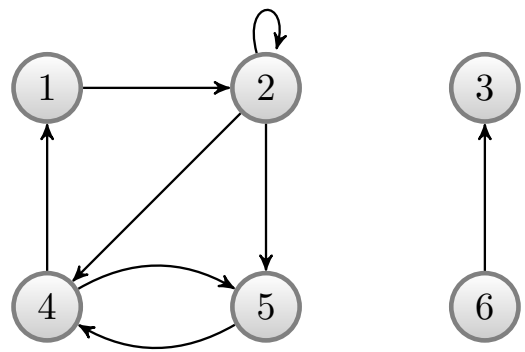
Obrázek: Neorientovaný graf

- Stupeň uzlu u v neorientovaném grafu je počet uzlů s ním incidentních, značí se $d(u)$.
- $d(1) = d(2) = d(5) = 2$, $d(3) = d(6) = 1$, $d(4) = 0$.
- Pokud $d(u) = 0$, nazývá se u izolovaný uzel.



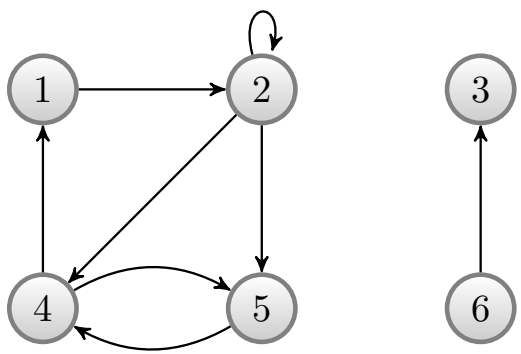
Obrázek: Neorientovaný graf

- Výstupní stupeň uzlu u v orientovaném grafu je počet hran z něj vycházejících, značí se $d_-(u)$.
- Vstupní stupeň uzlu u je počet hran do něj vstupujících, značí se $d_+(u)$.
- Stupeň uzlu u je součet výstupního a vstupního stupně.
- $d_-(2) = 3$, $d_+(2) = 2$, $d(2) = 5$.



Obrázek: Orientovaný graf

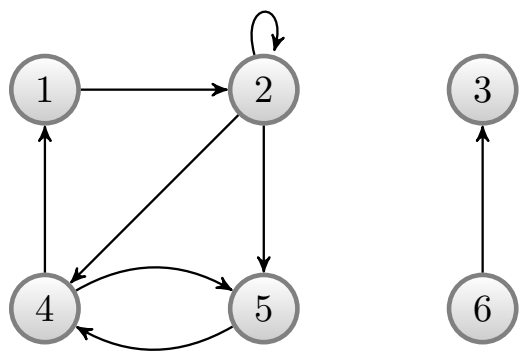
- Posloupnost uzlů $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, kde $(v_{i-1}, v_i) \in E$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, se nazývá sled délky k z v_0 do v_k.
- Sled je tedy určen uzly $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a hranami (v_0, v_1), (v_1, v_2), $\ldots$, (v_{k-1}, v_k). Délka sledu je počet jeho hran.
- Rovněž se připouští sled délky 0 z u do u, pro všechny uzly u.
- Pokud existuje sled s z u do u', říkáme, že u' je dosažitelný z u sledem s, značeno $u \overset{s}{\rightsquigarrow} u'$.
- Tah je sled, ve kterém se neopakují hrany.
- Cesta je sled, ve kterém se neopakují uzly.



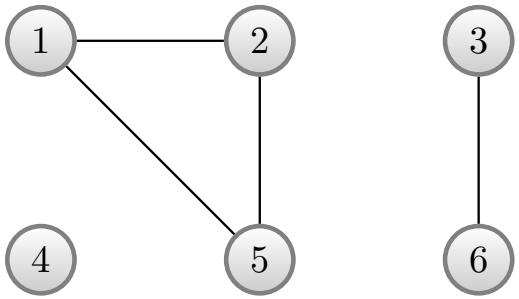
- $\langle 1, 2, 5, 4 \rangle$ je cesta
- $\langle 2, 5, 4, 5 \rangle$ je sled, který není cestou (jde o tah?)

- Podsled (podtah,podcesta) sledu $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je podposloupnost sousedících uzlů, tj. $\langle v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_j \rangle$, pro $0 \leq i \leq j \leq k$.

- Sled (tah, cesta) $\langle v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ se nazývá uzavřený, pokud obsahuje alespoň jednu hranu a $v_0 = v_k$.
- Pro neorientovaný graf požadujeme $k \geq 3$.
- Uzavřená cesta se nazývá kružnice. Orientovaná kružnice se nazývá cyklus.



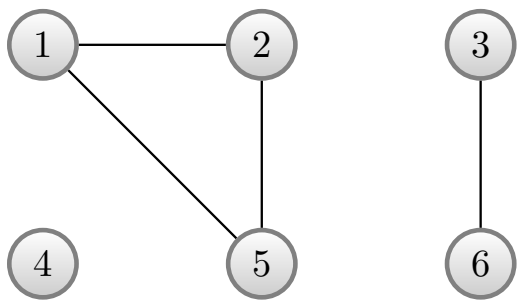
- $\langle 2, 2 \rangle$ je cyklus délky 1
- $\langle 1, 2, 4, 1 \rangle$ je cyklus
- $\langle 1, 2, 4, 5, 4, 1 \rangle$ je ale uzavřený sled (i tah), který není cyklus



- $\langle 1, 2, 5, 1 \rangle$ je kružnice
- $\langle 3, 6, 3 \rangle$ není kružnice, nebo ano?

- Orientovaný graf se nazývá prostý, pokud neobsahuje smyčky.
- Graf bez cyklů (kružnic) se nazývá acyklický.

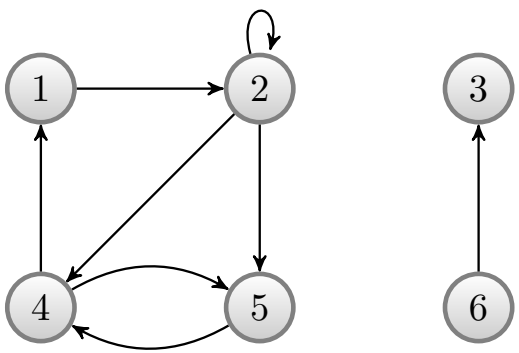
- Neorientovaný graf se nazývá souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje cesta.
- Souvislé komponenty grafu jsou třídy ekvivalence množiny uzlů podle relace "je dosažitelný z".



Graf má tři souvislé komponenty:

- $\{1,2,5\}$
- $\{3,6\}$
- $\{4\}$

- Orientovaný graf se nazývá silně souvislý, pokud mezi libovolnými dvěma uzly existuje orientovaná cesta.
- Silně souvislé komponenty grafu jsou třídy ekvivalence množiny uzlů podle relace "jsou vzájemně dosažitelné".



Graf má tři silně souvislé komponenty:

- $\{1, 2, 4, 5\}$
- $\{3\}$
- $\{6\}$

Reprezentace grafů

Nechť $G = (V, E)$ je graf. Zavedeme následující značení:

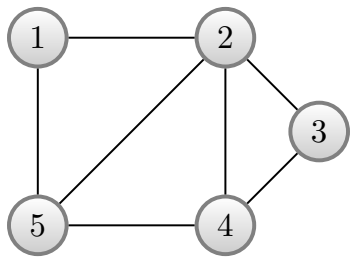
- $n = |V|$
- $m = |E|$.

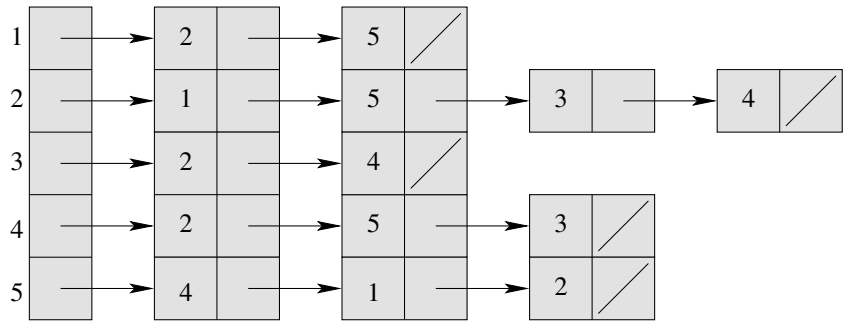
1. Seznam sousedů
   - preferovaná reprezentace,
   - výhodnější zejména pro řídké grafy, tj. takové grafy, kde $m \ll n^2$,
   - většina dále uvedených algoritmů používá právě tuto reprezentaci.
2. Matice sousednosti
   - může být výhodnější pro husté grafy, tj. ty, kde m je skoro n^2
   - nebo když potřebujeme rychle rozhodnout, zda graf obsahuje hranu spojující dva dané uzly.

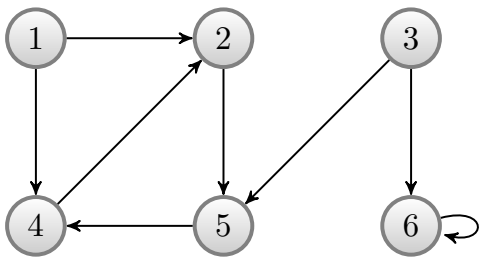
Seznam sousedů

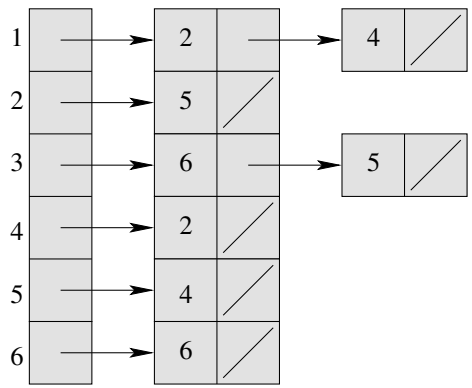
Seznam sousedů grafu $G = (V, E)$ sestává z

- pole $Adj[1 \ldots n]$ mající n seznamů, jeden pro každý uzel z V,
- kde $Adj[u]$ obsahuje všechny uzly v takové, že $(u, v) \in E$.









- Pokud G je orientovaný graf, pak součet délek seznamů seznamu sousedů je m, protože každá hrana tvaru (u, v) je reprezentována v vyskytujícím se v $Adj[u]$.

- Pokud G je neorientovaný graf, pak součet délek seznamů seznamu sousedů je $2m$, protože každá hrana (u, v) je reprezentována v vyskytujícím se v $Adj[u]$ a u vyskytujícím se v $Adj[v]$.

- Třída paměťové složitosti je v obou případech stejná, $\Theta(m + n)$.

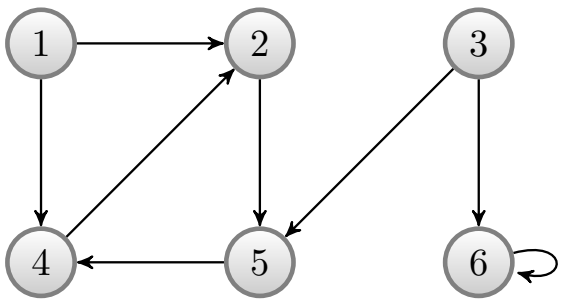
Ohodnocený graf

- Ohodnocený graf je takový graf, kde každá jeho hrana má přiřazenu nějakou hodnotu, typicky danou váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$.
- Seznam sousedů se snadno rozšíří pro ohodnocené grafy tak, že hodnota $w(u,v)$ je uložena s uzlem v v seznamu $Adj[u]$.
- Nevýhoda: zjistit, zda je hrana (u,v) přítomná v grafu znamená hledat v v celém seznamu $Adj[u]$.

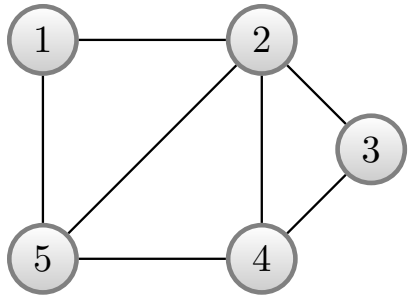
Matice sousednosti

Nechť $G = (V, E)$ je graf a předpokládejme, že uzly jsou nějak očíslovány čísly $1, 2, \ldots, n$. Matice sousednosti $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n taková, že

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } (i,j) \in E, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1



	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	1
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	0	1
5	1	1	0	1	0

- Množství obsazené paměti je bez ohledu na počtu hran $\Theta(n^2)$.
- Lepší nebo horší?
- Transponovaná matice k $A = (a_{ij})$ je matice $A^\mathsf{T} = (a_{ij}^\mathsf{T})$, kde $a_{ij}^\mathsf{T} = a_{ji}$.
- Pro matici sousednosti A neorientovaného grafu platí $A = A^\mathsf{T}$.
- Stačí tedy uložit do paměti pouze část matice nad diagonálou.
- Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený graf, pak

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i,j) & \text{pokud } (i,j) \in E, \\ NIL & \text{jinak,} \end{cases}$$

kde NIL je nějaká unikátní hodnota, většinou 0 či ∞.

Prohledávání do šířky

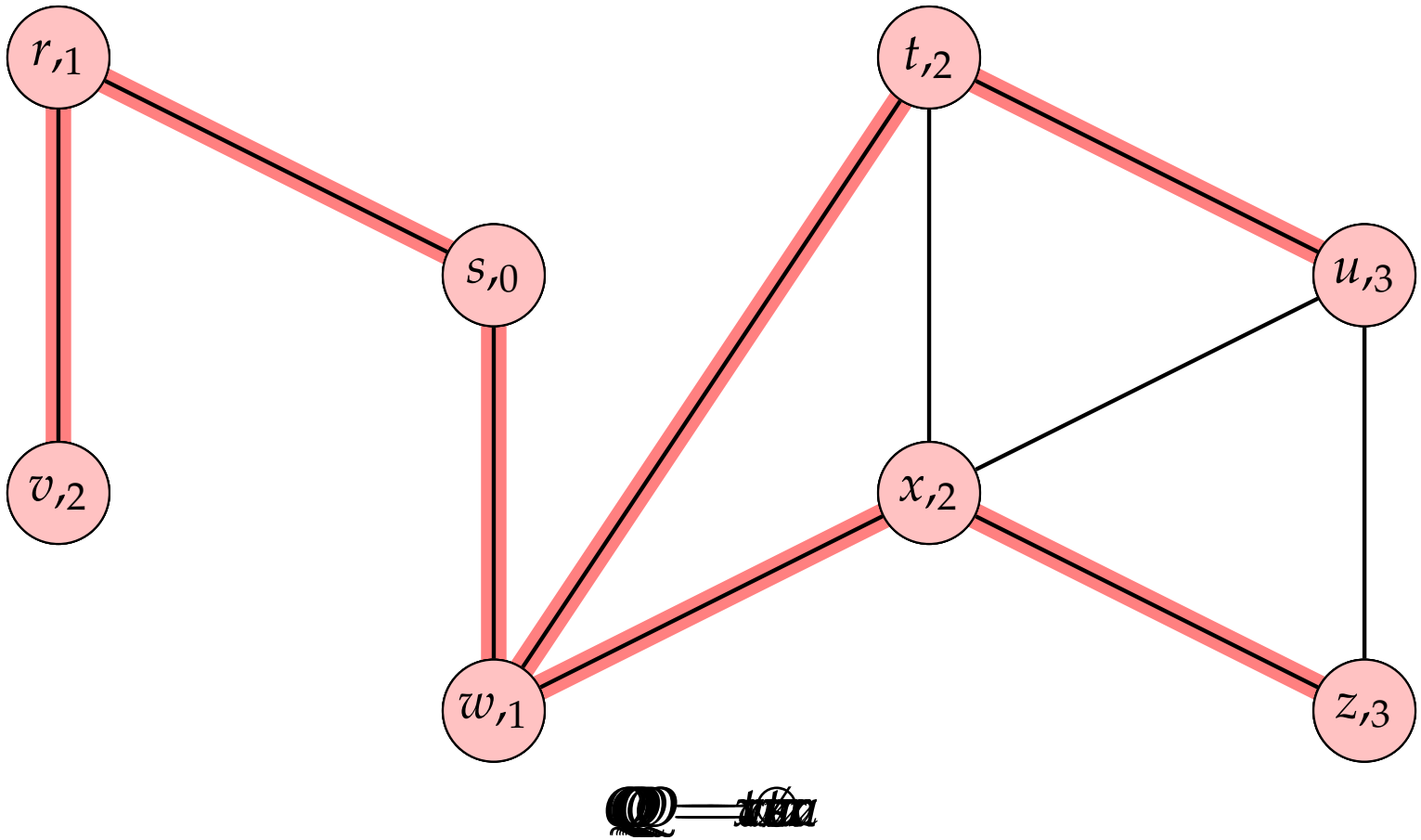
Prohledávání do šířky (BFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$ a uzel $s \in V$.
- Prochází všechny uzly dostupné z s a počítá jejich vzdálenost (počet hran) od s.
- Vytváří strom prohledávání do šířky s kořenem s obsahující všechny uzly dosažitelné z s. Cesta z s do v je nejkratší cestou v grafu.
- Při procházení grafu obarvuje uzly bílou, šedou a černou barvou.

- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{\text{WHITE, GRAY, BLACK}\}$.
- $\pi[u]$ je předchůdce u na cestě z s.
- $d[u]$ je vzdálenost u od s (počet hran, dále bude rozšířeno na ohodnocené grafy).

```
BFS(G, s)
 1  for každý uzel u ∈ V − {s}
 2       do color[u] ← WHITE
 3          d[u] ← ∞
 4          π[u] ← NIL
 5  color[s] ← GRAY
 6  d[s] ← 0
 7  π[s] ← NIL
 8  Q ← ∅
 9  ENQUEUE(Q, s)
10  while Q ≠ ∅
11       do u ← DEQUEUE(Q)
12          for každý v ∈ Adj[u]
13               do if color[v] =WHITE
14                     then color[v] ← GRAY
15                          d[v] ← d[u] + 1
16                          π[v] ← u
17                          ENQUEUE(Q, v)
18          color[u] ← BLACK
```

BFS – příklad



Analýza BFS

- Ve **while**-cyklu již není možno obarvit uzel na bílo.
- Řádek 13 proto zaručuje, že každý uzel bude zařazen do fronty (a následně vybrán z fronty) nejvýše jednou.
- Operace vkládání a vybírání prvku z fronty je konstantní, tj. $O(1)$, takže celkový čas na operace fronty je $O(n)$.
- Protože se seznam sousedů daného uzlu prochází pouze při jeho vybrání z fronty, je seznam skenován nejvýše jednou.
- Jelikož je suma délek těchto seznamů rovna $\Theta(m)$, je celkový čas skenování seznamu sousedů $O(m)$.
- Inicializace zabere čas $O(n)$, proto je celkový čas algoritmu $O(m+n)$, tj. lineární vzhledem k velikosti reprezentace grafu G.

Nejkratší cesty

- Jak již bylo řečeno, BFS rovněž určí vzdálenost všech uzlů od daného vstupního uzlu s.
- Definujme nejkratší vzdálenost $\delta(s, v)$ z s do v jako minimální počet hran na jakékoliv cestě z s do v. Pokud cesta neexistuje, je $\delta(s, v) = \infty$.
- Cesta délky $\delta(s, v)$ z s do v je nejkratší cesta z s do v.

Lemma 2.
Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný či neorientovaný graf a nechť $s \in V$ je libovolný uzel. Pak pro každou hranu $(u, v) \in E$ platí, že

$$\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1 \,.$$

Důkaz.

- Pokud je uzel u dosažitelný z s, pak je rovněž uzel v dosažitelný z s. To ale znamená, že nejkratší cesta z s do v nemůže být delší než nejkratší cesta z s do u následovaná hranou (u, v). Nerovnost tedy platí.
- Pokud uzel u není dosažitelný z s, pak $\delta(s, u) = \infty$ a nerovnost opět platí.

□

Lemma 3.
Nechť $G = (V, E)$ je orientovaný či neorientovaný graf a předpokládejme, že BFS je spuštěno na G z uzlu $s \in V$. Pak po ukončení BFS platí, že $d[v] \geq \delta(s, v)$ pro každé $v \in V$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu ENQUEUE operací. IP je $d[v] \geq \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$.
- Báze: $d[s] = 0 = \delta(s, s)$ a $d[v] = \infty \geq \delta(s, v)$, $v \in V - \{s\}$.
- Nechť v je bílý uzel prozkoumaný během prohledávání z u. Z IP máme $d[u] \geq \delta(s, u)$. Z řádku 15 BFS, IP a předchozího lemmatu máme

$$d[v] = d[u] + 1 \geq \delta(s, u) + 1 \geq \delta(s, v)\,.$$

  Uzel v je poté vložen do fronty a už nikdy není vložen znovu do fronty, protože je šedý a řádky 14–17 se vykonávají pouze pro bílé uzly, tj. hodnota $d[v]$ se již nezmění.

□

Lemma 4.
Nechť během provádění BFS na grafu $G = (V, E)$ obsahuje fronta Q uzly $\langle v_1, v_2, \ldots, v_r \rangle$, kde v_1 je první prvek Q (začátek fronty) a v_r je poslední prvek Q (konec fronty). Pak $d[v_r] \leq d[v_1] + 1$ a $d[v_i] \leq d[v_{i+1}]$ pro $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Důkaz.

- Indukcí vzhledem k počtu operací fronty. Na počátku je $Q = \langle s \rangle$ a tvrzení platí. Tvrzení platí po obou frontových operacích:
- v_1 odebráno, pak v_2 nový první prvek (pokud se fronta vyprázdní, tvrzení platí triviálně). Z IP máme $d[v_1] \leq d[v_2]$. Pak ale $d[v_r] \leq d[v_1] + 1 \leq d[v_2] + 1$, zbytek nerovností je nezměněn.
- v_{r+1} vloženo do Q (řádek 17). V tu dobu je již z Q vyjmut uzel u, jehož seznam se prochází. Z IP máme $d[u] \leq d[v_1]$. Tedy, $d[v_{r+1}] = d[u] + 1 \leq d[v_1] + 1$. Proto $d[v_r] \leq_{IP} d[u] + 1 = d[v_{r+1}]$. Zbytek nerovností je nezměněn.

□

Důsledek 5.
Nechť uzly v_i a v_j jsou vloženy do fronty během provádění BFS a že v_i je vloženo před v_j. Pak $d[v_i] \leq d[v_j]$ v okamžiku vložení v_j do fronty.

Důkaz.
Z předchozího lemmatu a vlastnosti, že každý uzel obdrží konečnou hodnotu d nejvýše jednou během výpočtu. □

Věta 6 (Korektnost algoritmu BFS).

Nechť $G = (V, E)$ je (ne)orientovaný graf a $s \in V$. Pak $BFS(G, s)$ prozkoumá všechny uzly $v \in V$ dosažitelné z s a po ukončení platí, že $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Pro každý uzel $v \neq s$ dosažitelný z s navíc platí, že jedna z nejkratších cest z s do v je nejkratší cesta z s do $\pi[v]$ následovaná hranou $(\pi[v], v)$.

Důkaz.

- Sporem. Nechť v je uzel s minimální $\delta(s, v)$ takový, že $d[v] \neq \delta(s, v)$. Zřejmě $v \neq s$.
- Lemma 3 říká, že $d[v] \geq \delta(s, v)$, proto $d[v] > \delta(s, v)$. Navíc, v musí být dosažitelný z s, protože jinak je $\delta(s, v) = \infty \geq d[v]$.
- Nechť u je uzel bezprostředně předcházející v na nejkratší cestě z s do v, tj. $\delta(s, v) = \delta(s, u) + 1$. Protože $\delta(s, u) < \delta(s, v)$ a vzhledem k volbě v, platí $d[u] = \delta(s, u)$.
- Celkem tedy $d[v] > \delta(s, v) = \delta(s, u) + 1 = d[u] + 1$.

Důkaz (pokračování).

- Uvažme nyní BFS v době, kdy u je vybíráno z Q na řádku 11, tj. v je buď bílý, šedý, nebo černý.
- v je bílý, pak řádek 15 nastavuje $d[v] = d[u] + 1$ – spor.
- v je černý, pak v již bylo vybráno z Q a podle Důsledku 5 je $d[v] \leq d[u]$ – spor.
- v je šedý, pak v bylo obarveno při výběru nějakého uzlu w, jenž byl vybrán z Q dříve než u. Navíc, $d[v] = d[w] + 1$. Podle Důsledku 5 je $d[w] \leq d[u]$, tj. $d[v] \leq d[u] + 1$ – spor.
- Tedy $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechna $v \in V$. Navíc, všechny uzly dosažitelné z s musí být prozkoumány, protože jinak je jejich d hodnota nekonečno.
- Konečně, všimněme si, že když $\pi[v] = u$, pak $d[v] = d[u] + 1$, tj. nejkratší cestu z s do v můžeme získat přidáním hrany $(\pi[v], v)$ k nejkratší cestě z s do $\pi[v]$.

Strom prohledávání do šířky (BFS strom)

- Nechť π je pole předchůdců počítané (tj. i mezivýsledek) procedurou $BFS(G, s)$ na nějakém grafu $G = (V, E)$ a uzlu $s \in V$.

- Podgraf předchůdců grafu G je graf $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$, kde
- $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq NIL\} \cup \{s\}$ a
- $E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V_\pi - \{s\}\}$.

- Graf G_π je BFS strom, pokud V_π obsahuje pouze uzly dosažitelné z s a pro všechna $v \in V_\pi$ existuje pouze jediná cesta z s do v, která je zároveň nejkratší cestou.
- BFS strom je strom, neboť platí, že je souvislý a $|E_\pi| = |V_\pi| - 1$.

Lemma 7.
Nechť G je orientovaný či neorientovaný graf. Procedura BFS konstruuje π tak, že G_π je BFS strom.

Důkaz.

- Řádek 16 BFS nastavuje $\pi[v] = u$, právě když $(u, v) \in E$ a $\delta(s, v) < \infty$.
- V_π tedy obsahuje pouze uzly dosažitelné z s.
- Protože G_π je strom, obsahuje pouze jednu cestu z s do každého z ostatních uzlů.
- Induktivní aplikací věty 6 dostáváme, že každá tato cesta je nejkratší.

□

Tisk nejkratší cesty z s do v

```
PRINT-PATH(π, s, v)
1  if v = s
2     then print s
3     else if π[v] = NIL
4             then print "Cesta z" s "do" v "neexistuje!"
5             else PRINT-PATH(π, s, π[v])
6                  print v
```

Složitost $O(n)$.

Prohledávání do hloubky

Prohledávání do hloubky (DFS)

- Vstup: (ne)orientovaný graf $G = (V, E)$.
- Na rozdíl od BFS prochází DFS všechny uzly.
- Při procházení grafu obarvuje uzly bílou, šedou a černou barvou.
- Používá pole předchůdců π.
- Vytváří les prohledávání do hloubky obsahující všechny uzly grafu, který je definován takto: $G_\pi = (V, E_\pi)$, kde

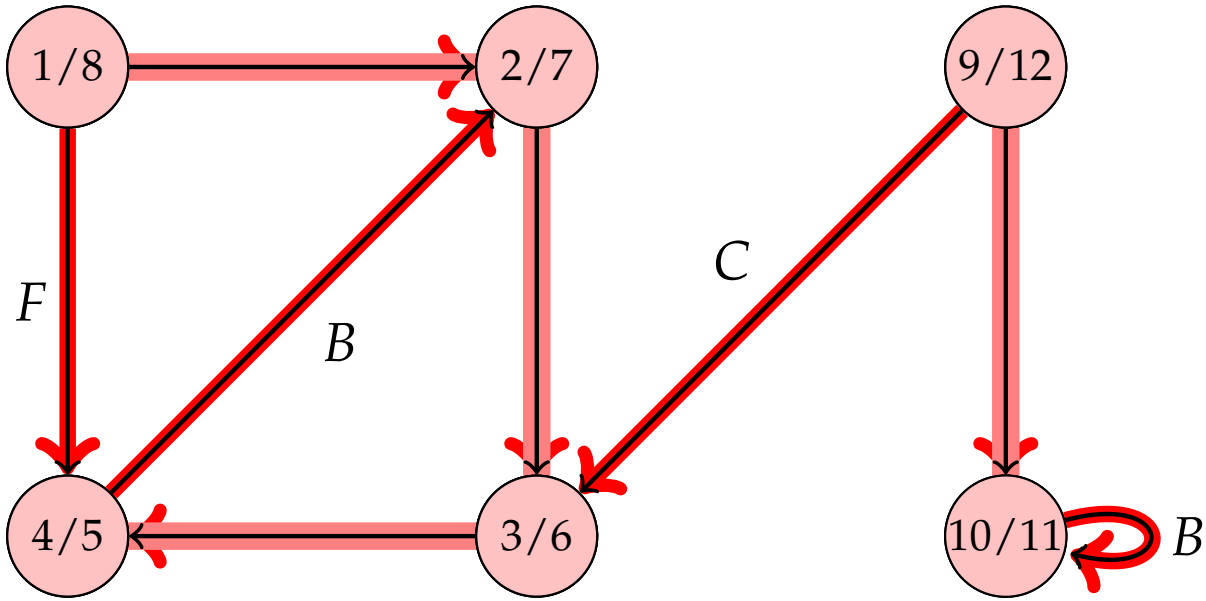
$$E_\pi = \{(\pi[v], v) : v \in V,\ \pi[v] \neq \mathit{NIL}\}.$$

- Reprezentace grafu – seznam sousedů.
- $color[u] \in \{\text{WHITE, GRAY, BLACK}\}$.
- $d[u]$ je časová známka prvního prozkoumání uzlu (obarvení na šedo).
- $f[u]$ je časová známka dokončení prozkoumávání seznamu sousedů uzlu u (začernění uzlu).
- $1 \leq d[u] < f[u] \leq 2n$.
- $color[u] = \mathit{WHITE}$ v čase před $d[u]$.
- $color[u] = \mathit{GRAY}$ v čase $d[u]$ až $f[u]$.
- $color[u] = \mathit{BLACK}$ v čase po $f[u]$.
- $time$ je globální proměnná.

```
DFS(G)
1  for každý uzel u ∈ V
2       do color[u] ← WHITE
3          π[u] ← NIL
4  time ← 0
5  for každý uzel u ∈ V
6       do if color[u] = WHITE
7             then DFS-VISIT(u)
```

```
DFS-VISIT(u)
1  color[u] ← GRAY
2  d[u] ← time ← time + 1
3  for každý uzel v ∈ Adj[u]
4       do if color[v] = WHITE
5             then π[v] ← u
6                  DFS-VISIT(v)
7  color[u] ← BLACK
8  f[u] ← time ← time + 1
```

DFS – příklad



Obrázek: B značí zpětnou (Back) hranu, F značí dopřednou (Forward) hranu a C značí křížící (Cross) hranu.

Časová složitost DFS

```
DFS(G)
1  for každý uzel u ∈ V
2      do color[u] ← WHITE
3         π[u] ← NIL
4  time ← 0
5  for každý uzel u ∈ V
6      do if color[u] = WHITE
7            then DFS-VISIT(u)
```

- Cykly na řádcích 1–3 a 5–7 bez volání funkce DFS-VISIT vezmou čas $\Theta(n)$.

Časová složitost DFS-VISIT

```
DFS-VISIT(u)
1  color[u] ← GRAY
2  d[u] ← time ← time + 1
3  for každý uzel v ∈ Adj[u]
4      do if color[v] = WHITE
5             then π[v] ← u
6                  DFS-VISIT(v)
7  color[u] ← BLACK
8  f[u] ← time ← time + 1
```

- Funkce je volána pouze na bílé uzly a první věc, kterou udělá, je jejich obarvení na šedo. Je tedy volána přesně jednou pro každý uzel $v \in V$.
- Pro každý uzel v je cyklus 3–6 prováděn $|Adj[v]|$-krát.
- Jelikož $\sum_{v \in V} |Adj[v]| = \Theta(m)$, je celková cena řádků 3–6 $\Theta(m)$.
- Celková složitost je tedy $\Theta(m + n)$.

Závorková věta

V prohledávání do hloubky (ne)orientovaného grafu $G = (V, E)$ pro libovolné dva uzly u a v platí právě jedno z následujících:

- intervaly $[d[u], f[u]]$ a $[d[v], f[v]]$ jsou disjunktní a ani u není následníkem v ani v není následníkem u v DFS lese,
- interval $[d[u], f[u]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[v], f[v]]$ a u je následníkem v v nějakém DFS stromě, nebo
- interval $[d[v], f[v]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[u], f[u]]$ a v je následníkem u v nějakém DFS stromě.

Důkaz pro $d[u] < d[v]$ (opačná nerovnost se dokáže podobně).

- $d[v] < f[u]$, pak v bylo prozkoumáno, když u bylo šedé. Protože v prozkoumáno později než u, je v dokončeno před u, tj. $f[v] < f[u]$.
- $f[u] < d[v]$, pak z vlastnosti $d[v] < f[v]$ plyne, že oba intervaly jsou disjunktní. Navíc, když je prozkoumáván uzel z jednoho intervalu, nejsou uzly druhého šedé, proto nemůže být jejich následníkem.

Důsledek 8.

Uzel v je následníkem uzlu u v DFS lese grafu $G = (V, E)$ právě tehdy, když

$$d[u] < d[v] < f[v] < f[u] .$$

Věta o bílé cestě

V DFS lese grafu $G = (V, E)$ je uzel v následníkem uzlu u právě tehdy, když v čase $d[u]$ existuje cesta z u do v obsahující pouze bílé uzly.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť v je následníkem u. Nechť w je uzel na cestě z u do v v DFS lese. Protože w je následníkem u, je podle předchozího důsledku $d[u] < d[w]$. Tedy w je v čase $d[u]$ bílé.

$\Leftarrow$: Nechť v je nejbližším uzlem k u dosažitelným z u v čase $d[u]$ nějakou bílou cestou takový, že není následníkem u v DFS lese.

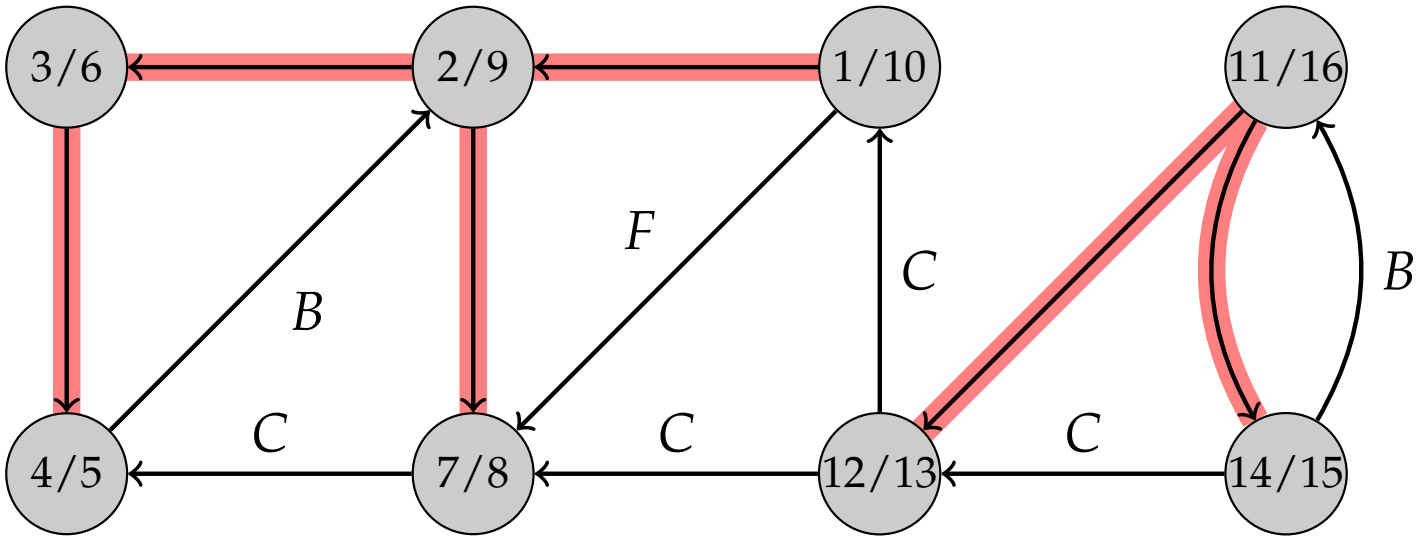
- Nechť w je předchůdce v na dané cestě. Pak w je následníkem u a podle předchozího důsledku je $f[w] \leq f[u]$ (w může být u).
- Protože v musí být objeveno po u, ale před ukončením w, je $d[u] < d[v] < f[w] \leq f[u]$.
- Závorková věta říká, že interval $[d[v], f[v]]$ je celý obsažen v intervalu $[d[u], f[u]]$. Předchozí důsledek dává, že v je následníkem u.

□

Klasifikace hran

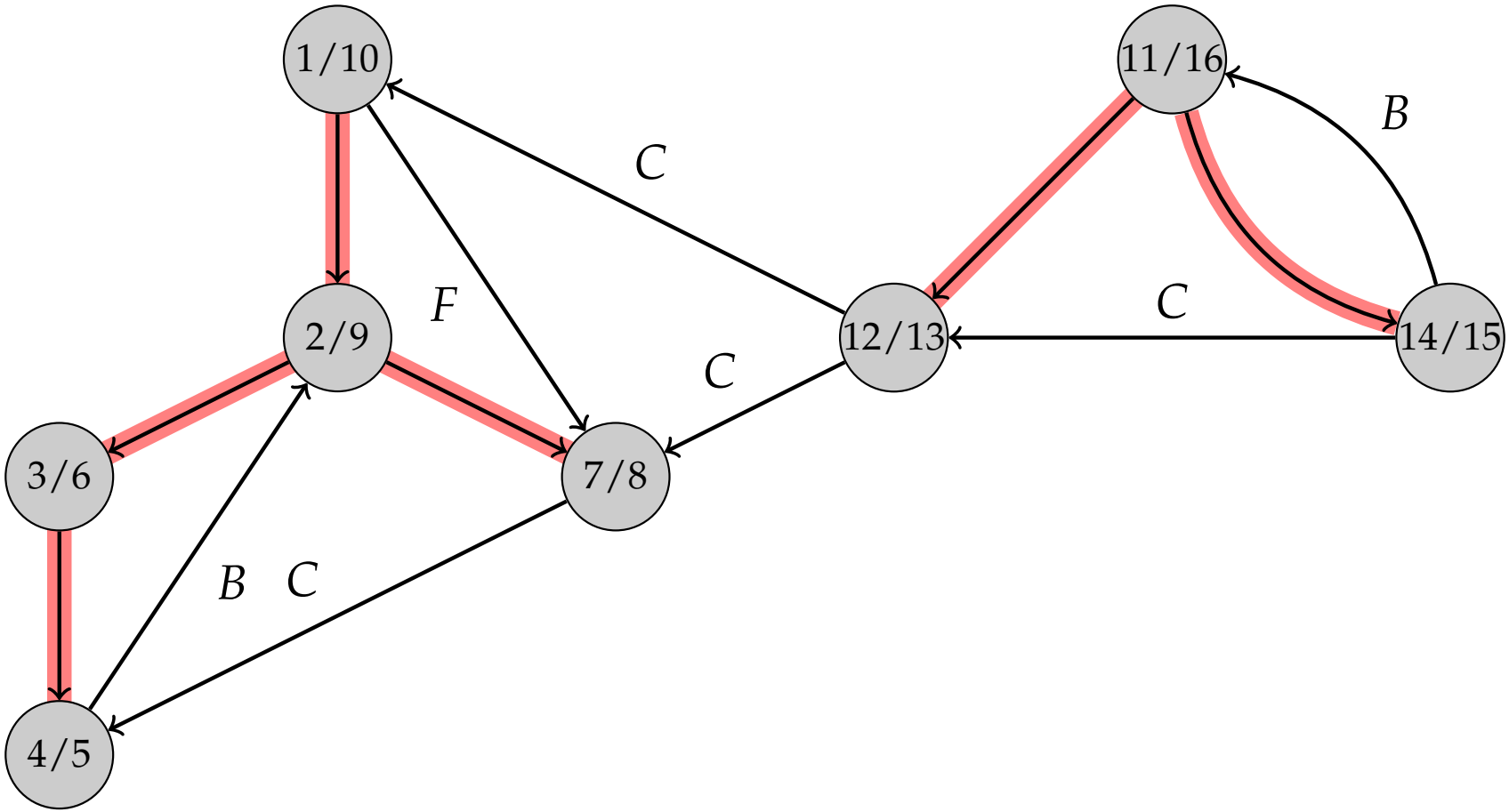
1. **Stromové hrany** jsou hrany DFS lesa G_π. (u,v) je stromová hrana, jestliže v bylo poprvé objeveno prozkoumáváním hrany (u,v). Zvýrazněné hrany v předchozích příkladech.
2. **Zpětné hrany** jsou hrany (u,v) spojující u s předchůdcem v v DFS lese. Smyčky jsou zpětné hrany. V příkladech značeno B.
3. **Dopředné hrany** jsou hrany (u,v) spojující u s následníkem v v DFS lese. V příkladech značeno F.
4. **Cross hrany** jsou všechny ostatní hrany.

Příklad



Nakreslení

Každý graf lze nakreslit tak, že stromové a dopředné hrany vedou dolů a zpětné hrany vedou nahoru.



DFS a klasifikace hran

Nechť (u,v) je hrana. Pak během provádění DFS je možno tuto hranu klasifikovat podle barvy uzlu v následovně:

1. bílá indikuje stromovou hranu,
2. šedá indikuje zpětnou hranu a
3. černá indikuje dopřednou nebo cross hranu. Přesněji:
   - (u,v) je dopředná hrana, jestliže $d[u] < d[v]$ a
   - cross hrana, jestliže $d[u] > d[v]$.

Neorientovaný graf

Věta 9.
V prohledávání neorientovaného grafu G je každá hrana buď stromová, nebo zpětná.

Důkaz.

- Nechť (u, v) je libovolná hrana grafu G a nechť $d[u] < d[v]$.
- Pak v se stane černý v době, kdy u je šedý.
- Pokud je hrana (u, v) poprvé prozkoumána ve směru z u do v, je v bílý – jinak bychom již tuto hranu prozkoumali ve směru od v do u. (u, v) je tedy stromová hrana.
- Pokud je hrana (u, v) poprvé prozkoumána ve směru z v do u, je u stále šedý – protože u je šedý v době, kdy je hrana poprvé prozkoumána. (u, v) je tedy zpětná hrana.

□

Topologické uspořádání

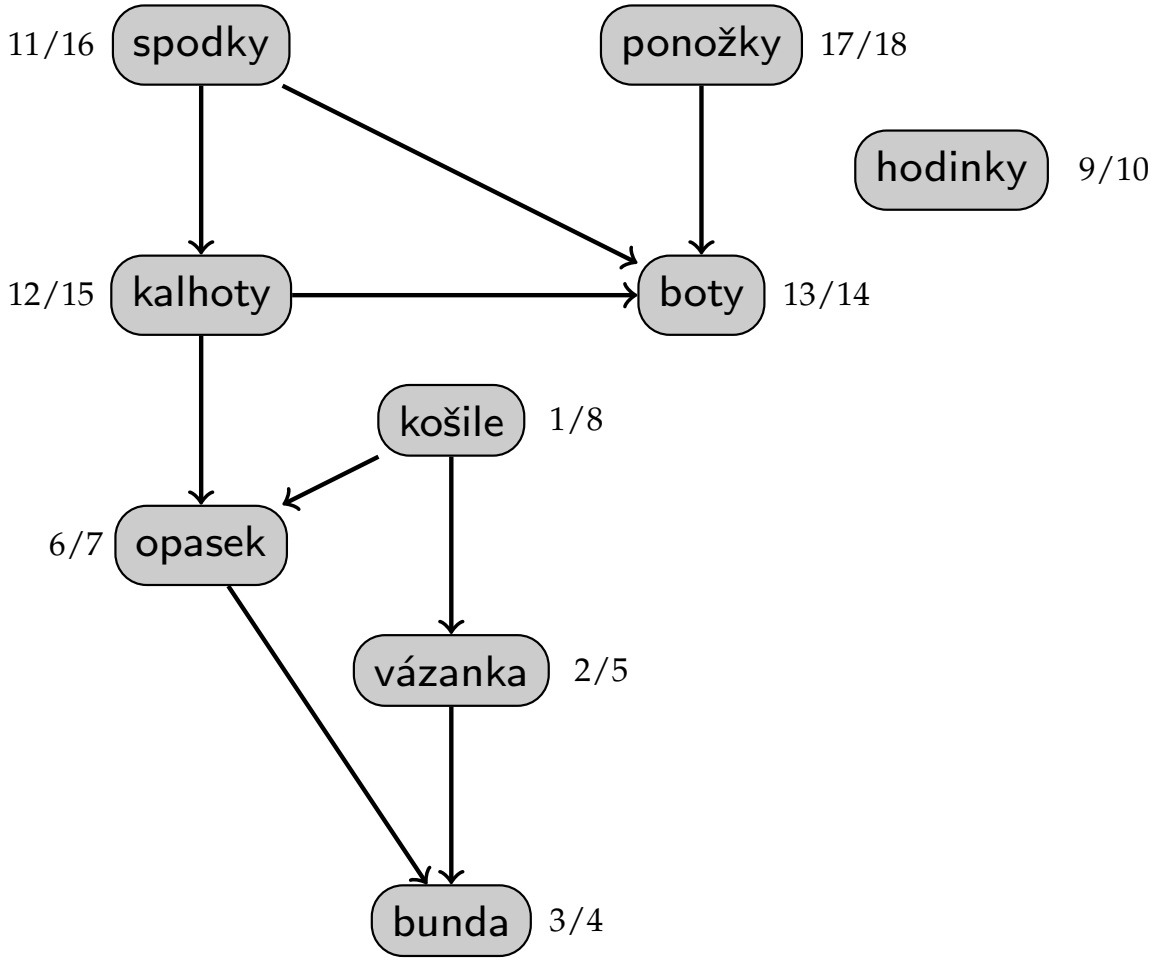
Topologické uspořádání

- Aplikace DFS
- Topologické uspořádání orientovaného acyklického grafu $G = (V, E)$ je lineární uspořádání všech jeho uzlů tak, že pokud $(u, v) \in E$, pak u předchází v v onom uspořádání.
- Pokud G není acyklický, pak žádné topologické uspořádání neexistuje.

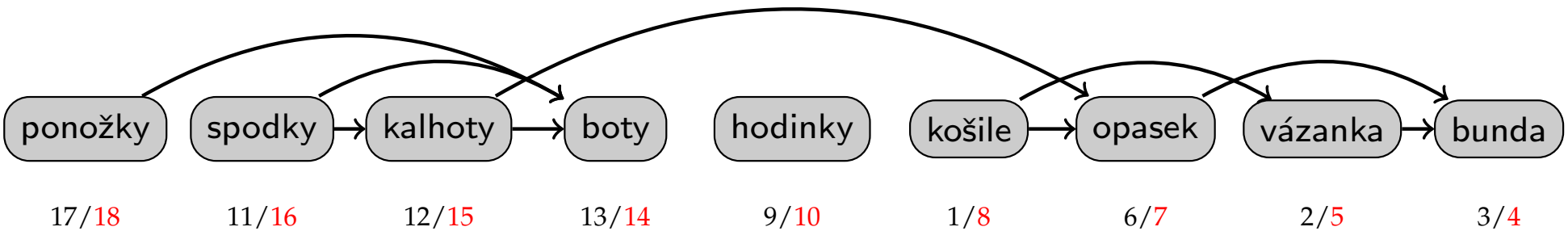
TOPOLOGICAL-SORT(G)
1 zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot $f[v]$
2 každý dokončený uzel zařaď na začátek seznamu uzlů L
3 **return** L

- Složitost DFS je $\Theta(m + n)$, přidání uzlu do seznamu je konstantní, proto je celková složitost $\Theta(m + n)$.

Topologické uspořádání – příklad



Topologické uspořádání – příklad



Lemma 10.
Orientovaný graf G je acyklický, právě když $\textsc{Dfs}(G)$ nenajde žádnou zpětnou hranu.

Důkaz.

$\Rightarrow$: Nechť (u,v) je zpětná hrana. Pak u je následníkem v v DFS lese, tj. existuje cesta z v do u. Hrana (u,v) pak uzavírá cyklus.

$\Leftarrow$: Nechť G obsahuje cyklus c. Ukážeme, že pak $\textsc{Dfs}(G)$ obsahuje zpětnou hranu.

- Nechť v je první uzel c objeven procedurou $\textsc{Dfs}(G)$ a nechť (u,v) je předcházející hrana na cyklu c.
- V čase $d[v]$ tvoří hrany cyklu c bílou cestu z v do u.
- Podle věty o bílé cestě platí, že u je následníkem v v DFS lese. Proto je (u,v) zpětná hrana.

□

Věta 11.
Procedura $\textsc{Topological-Sort}(G)$ *topologicky uspořádá orientovaný acyklický graf* G.

Důkaz.

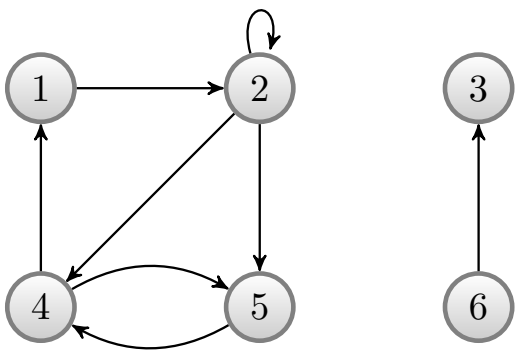
- Nechť DFS je spuštěno na orientovaný acyklický graf $G = (V, E)$ a určí hodnoty $f[v]$.
- Stačí ukázat, že pokud $(u, v) \in E$, pak $f[v] < f[u]$.
- Nechť (u, v) je právě prozkoumávána procedurou $\textsc{Dfs}(G)$, pak v nemůže být šedý, protože jinak by byl v předchůdcem u a (u, v) by byla zpětná hrana – spor s předchozím lemmatem.
- v je bílý, pak v je následníkem u v DFS lese, a proto $f[v] < f[u]$.
- v je černý, pak $f[v]$ je již nastaveno. Jelikož u je stále prozkoumáváno, není $f[u]$ dosud nastaveno, proto $f[v] < f[u]$.

□

Silně souvislé komponenty

Silně souvislé komponenty (SCC)

- Aplikace DFS
- $G = (V, E)$ orientovaný graf. Silně souvislá komponenta je maximální množina $C \subseteq V$ taková, že pro každé $u, v \in C$, $u \rightsquigarrow v$ (tedy i $v \rightsquigarrow u$).



Graf má tři silně souvislé komponenty:

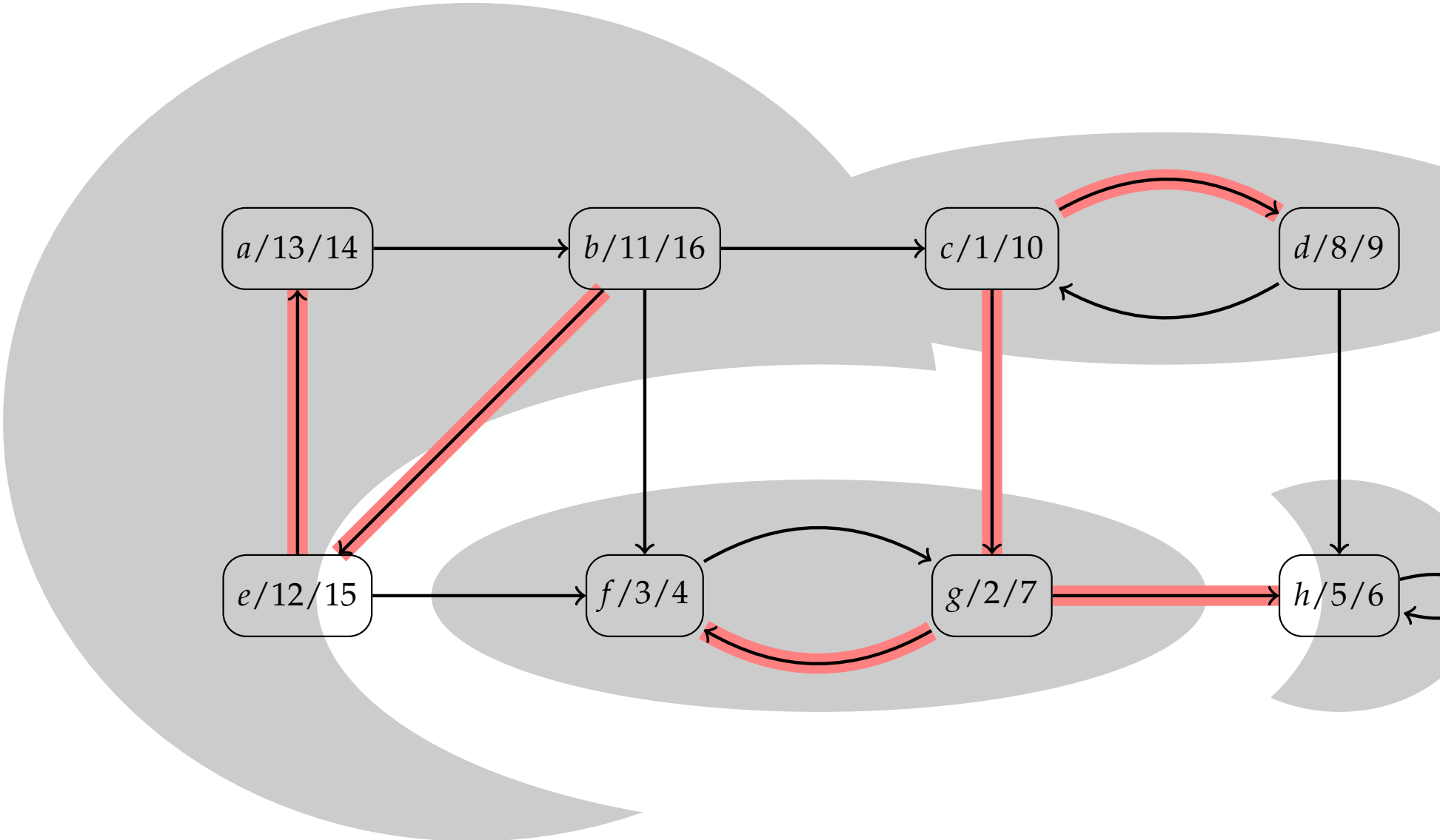
- $\{1, 2, 4, 5\}$
- $\{3\}$
- $\{6\}$

- Transponovaný graf grafu $G = (V, E)$ je graf $G^{\mathsf{T}} = (V, E^{\mathsf{T}})$, kde $E^{\mathsf{T}} = \{(u, v) : (v, u) \in E\}$.

SCC(G)
1 zavolej DFS(G) pro výpočet hodnot $f[u]$
2 vypočítej G^T
3 zavolej DFS(G^T), ale v hlavním cyklu uvažuj uzly
v klesajícím pořadí podle hodnoty $f[u]$
4 na výstup dej uzly každého stromu z DFS lesa, určeného na řádku 3,
jako samostatnou silně souvislou komponentu

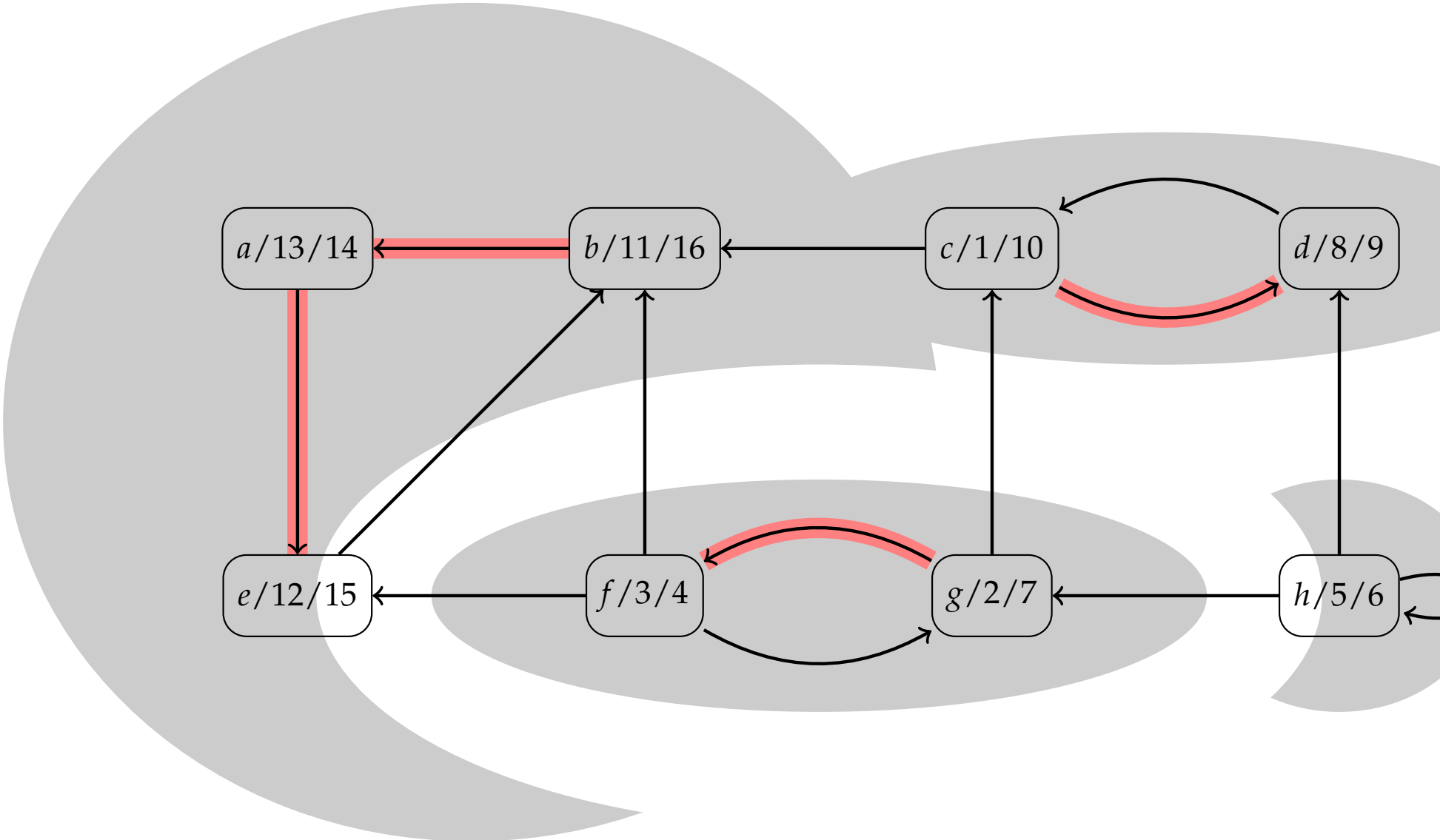
- Složitost $\Theta(m + n)$.
- Seznam sousedů G^{T} se dá určit ze seznam sousedů G v čase $O(m + n)$. Jak?
- G a G^{T} mají stejné silně souvislé komponenty – u a v jsou vzájemně dosažitelné v G, právě když jsou vzájemně dosažitelné v G^{T}.

SCC – příklad



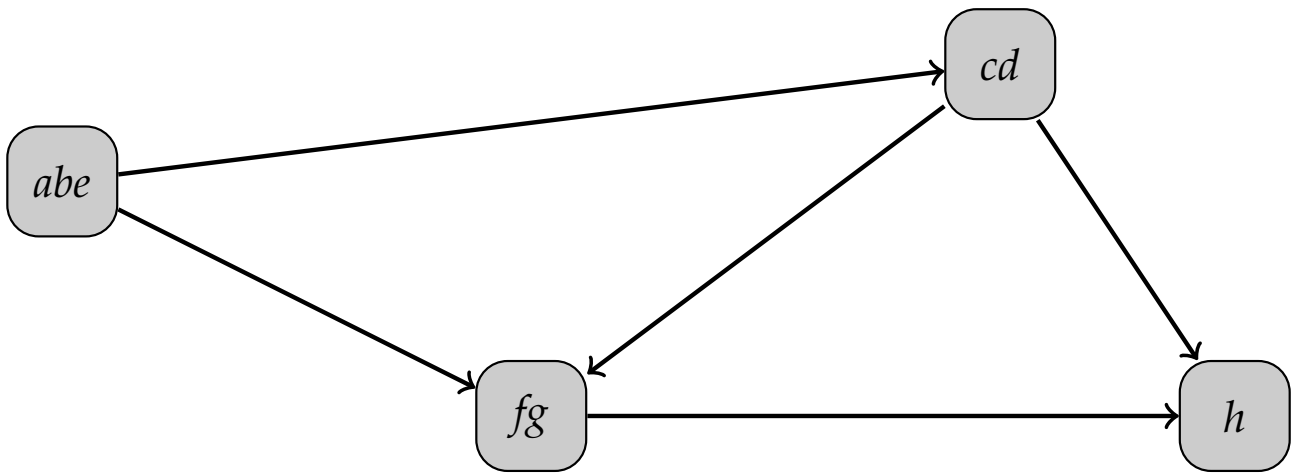
Obrázek: Výsledek $\textsc{Dfs}(G)$. Vyznačeny stromové hrany a silně souvislé

SCC – příklad



Obrázek: Graf G^{T} a výsledek řádku 3 procedury Scc. Uzly b, c, g a h jsou kořeny.

- Graf komponent grafu $G = (V, E)$ je graf $G^{scc} = (V^{scc}, E^{scc})$ definován následovně:
  - Nechť $C_1, C_2, \ldots, C_k$ jsou silně souvislé komponenty grafu G.
  - $V^{scc} = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\} \subseteq V$, $V^{scc} \cap C_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots, k$.
  - $(v_i, v_j) \in E^{scc}$, pokud existují $x \in C_i$ a $y \in C_j$, $i \neq j$, takové, že $(x, y) \in E$.



Vlastnost grafu komponent

Lemma 12.
Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $u, v \in C$, $u', v' \in C'$ a $u \rightsquigarrow u'$ v G. Pak NEplatí $v' \rightsquigarrow v$.

Důkaz.
Pokud $v' \rightsquigarrow v$, pak $u \rightsquigarrow u' \rightsquigarrow v'$ a $v' \rightsquigarrow v \rightsquigarrow u$, tj. u a v' jsou vzájemně dosažitelné – spor. □

- V následujícím uvažujeme pouze časy $d[u]$ a $f[u]$ vypočítané prvním voláním procedury DFS.

- $U \subseteq V$, pak $d(U) = \min_{u \in U}\{d[u]\}$ a $f(U) = \max_{u \in U}\{f[u]\}$.

Lemma 13.
Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $(u, v) \in E$, $u \in C$, $v \in C'$. Pak $f(C) > f(C')$.

Důkaz

- 1) $d(C) < d(C')$ – nechť x je první objevený v C. V čase $d[x]$ jsou všechny uzly $C \cup C'$ bílé. Pro $w \in C'$ existuje bílá cesta $x \rightsquigarrow u \to v \rightsquigarrow w$. Věta o bílé cestě říká, že všechny uzly z $C \cup C'$ jsou následníky x v DFS stromu. Důsledek závorkové věty říká, že $f[x] = f(C) > f(C')$.
- 2) $d(C) > d(C')$ – nechť y první objevený v C'. V čase $d[y]$ jsou všechny uzly C' bílé a existuje bílá cesta z y do každého uzlu C'. Věta o bílé cestě a důsledek závorkové věty dávají $f[y] = f(C')$. V čase $d[y]$ jsou všechny uzly C bílé. Z předchozího lemmatu máme, že neexistuje cesta z C' do C. Proto jsou uzly C bílé i v čase $f[y]$, tj. $f[w] > f[y]$, $w \in C$, což dává $f(C) > f(C')$.

Důsledek 14.
Nechť C a C' jsou různé silně souvislé komponenty orientovaného grafu $G = (V, E)$. Nechť $(u, v) \in E^{\mathsf{T}}$, $u \in C$, $v \in C'$. Pak $f(C) < f(C')$.

Důkaz.
$(u, v) \in E^{\mathsf{T}}$ implikuje, že $(v, u) \in E$. Protože silně souvislé komponenty G a G^{T} jsou stejné, dává předchozí lemma $f(C) < f(C')$. □

Věta 15.
Procedura $\textsc{Scc}(G)$ *je korektní.*

Důkaz

- Indukcí vzhledem k počtu DFS stromů nalezených na řádku 3 procedury. IP: Prvních k stromů nalezených procedurou na řádku 3 jsou silně souvislé komponenty. ZK: $k = 0$ je triviální.
- IK: Uvažme $(k+1)$-ní nalezený strom. Nechť u je jeho kořen a nechť u je v silně souvislé komponentě C.
- $f[u] = f(C) > f(C')$ pro libovolnou v G^{T} ještě nenavštívenou silně souvislou komponentu C' různou od C.
- Podle IP jsou v čase $d_{G^{\mathsf{T}}}[u]$ všechny uzly z C bílé. Věta o bílé cestě dává, že všechny ostatní uzly C jsou následníky u v DFS stromu.
- Podle IP a předchozího důsledku vede každá hrana v G^{T} jdoucí z C do již navštívené silně souvislé komponenty.
- Tedy žádný uzel z jiné komponenty než C nebude následníkem u během DFS G^{T}. Uzly stromu tedy tvoří silně souvislou komponentu.

Minimální kostry

Minimální kostra

- První algoritmus řešící tento problém navrhl brněnský matematik O. Borůvka, 1926.

- Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf s váhovou funkcí

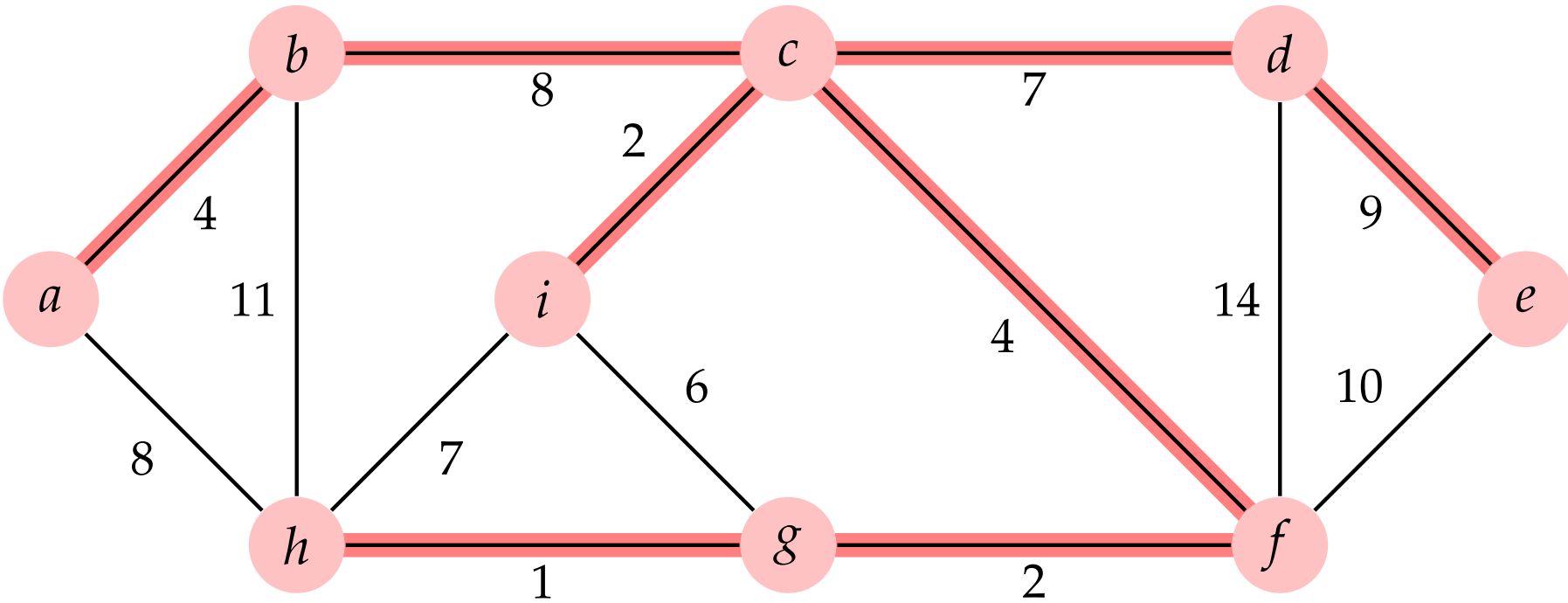
$$w : E \to \mathbb{R}\,.$$

- Úkolem je najít takovou množinu hran $T \subseteq E$, že podgraf (V, T) je souvislý, acyklický a

$$w(T) = \sum_{(u,v)\in T} w(u, v)$$

je minimální.

Příklad



Generický algoritmus

GENERIC-MST(G, w)
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **while** A netvoří kostru
3 **do** najdi hranu $(u, v) \in E$ bezpečnou pro A
4 $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
5 **return** A

- Invariant: Před každou iterací algoritmu je množina A podmnožinou nějaké minimální kostry.
- Hrana $(u, v) \in E$ je bezpečná pro A, pokud $A \cup \{(u, v)\}$ je podmnožinou nějaké minimální kostry.

Pomocné definice

- Řez grafu $G = (V, E)$ je dvojice $(S, V - S)$, $\emptyset \subseteq S \subseteq V$.
- Hrana $(u, v) \in E$ kříží řez $(S, V - S)$, pokud jeden její konec je v S a druhý ve $V - S$.
- Řez respektuje množinu A hran, pokud žádná hrana v A nekříží řez.
- Hrana se nazývá lehká, pokud kříží řez a její hodnota je minimální z hodnot všech hran, které kříží řez.

Věta 16.

- *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí w.*
- *Nechť $A \subseteq E$ je součástí nějaké minimální kostry G.*
- *Nechť $(S, V - S)$ je řez, který respektuje A.*
- *Nechť (u, v) je lehká hrana křížící $(S, V - S)$.*

Pak hrana (u, v) je bezpečná pro A.

Důkaz

- Nechť T je minimální kostra G, $A \subseteq T$, $(u, v) \notin T$.
- $u \rightsquigarrow v$ je cesta v T, tj. přidání (u, v) vytváří kružnici. Nechť např. $u \in S$ a $v \in V - S$.
- Nechť (x, y) je hrana z cesty $u \rightsquigarrow v$ v T křížící řez $(S, V - S)$. Protože řez respektuje A, $(x, y) \notin A$.
- $T' = (T - \{(x, y)\}) \cup \{(u, v)\}$ je kostra grafu G.

Důkaz.

- (u,v) je lehká hrana křížící $(S, V-S)$ a (x,y) rovněž kříží řez, tedy $w(u,v) \leq w(x,y)$.
- Tedy, $w(T') = w(T) - w(x,y) + w(u,v) \leq w(T)$.
- T je minimální kostra, proto $w(T) \leq w(T')$.

- Protože $A \subseteq T$ a $(x,y) \notin A$, $A \subseteq T'$.
- Konečně, $A \cup \{(u,v)\} \subseteq T'$. Protože T' je minimální kostra, je (u,v) bezpečná pro A.

□

Důsledek 17.

- *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý neorientovaný graf s reálnou váhovou funkcí w.*
- *Nechť $A \subseteq E$ je součástí nějaké minimální kostry G.*
- *Nechť $C = (V_C, E_C)$ je souvislá komponenta (strom) v lese $G_A = (V, A)$.*

Pokud (u, v) je lehká hrana spojující C s jinou komponentou z G_A, pak (u, v) je bezpečná pro A.

Důkaz.

Řez $(V_C, V - V_C)$ respektuje A a (u, v) je lehká hrana tohoto řezu. Proto je (u, v) bezpečná pro A. □

Kruskalův a Primův (Jarníkův) algoritmus

- Založeny na generickém algoritmu.
- Udávají pravidlo vybírající bezpečnou hranu, viz řádek 3 generického algoritmu.
- V Kruskalově algoritmu je A les a bezpečná hrana přidávaná do A je hrana s nejmenším ohodnocením spojující dvě různé komponenty.
- V Primově (Jarníkově) algoritmu je A strom a bezpečná hrana přidávaná do A je hrana s nejmenším ohodnocením spojující strom s uzlem, který není součástí stromu.

Kruskalův algoritmus

KRUSKAL-MST(G, w)
1 $A \leftarrow \emptyset$
2 **for** každý uzel $v \in V$
3 **do** MAKE-SET(v)
4 uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
5 **for** každou hranu $(u, v) \in E$ branou v neklesajícím uspořádání podle w
6 **do if** FIND-SET$(u) \neq$ FIND-SET(v)
7 **then** $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$
8 UNION(u, v)
9 **return** A

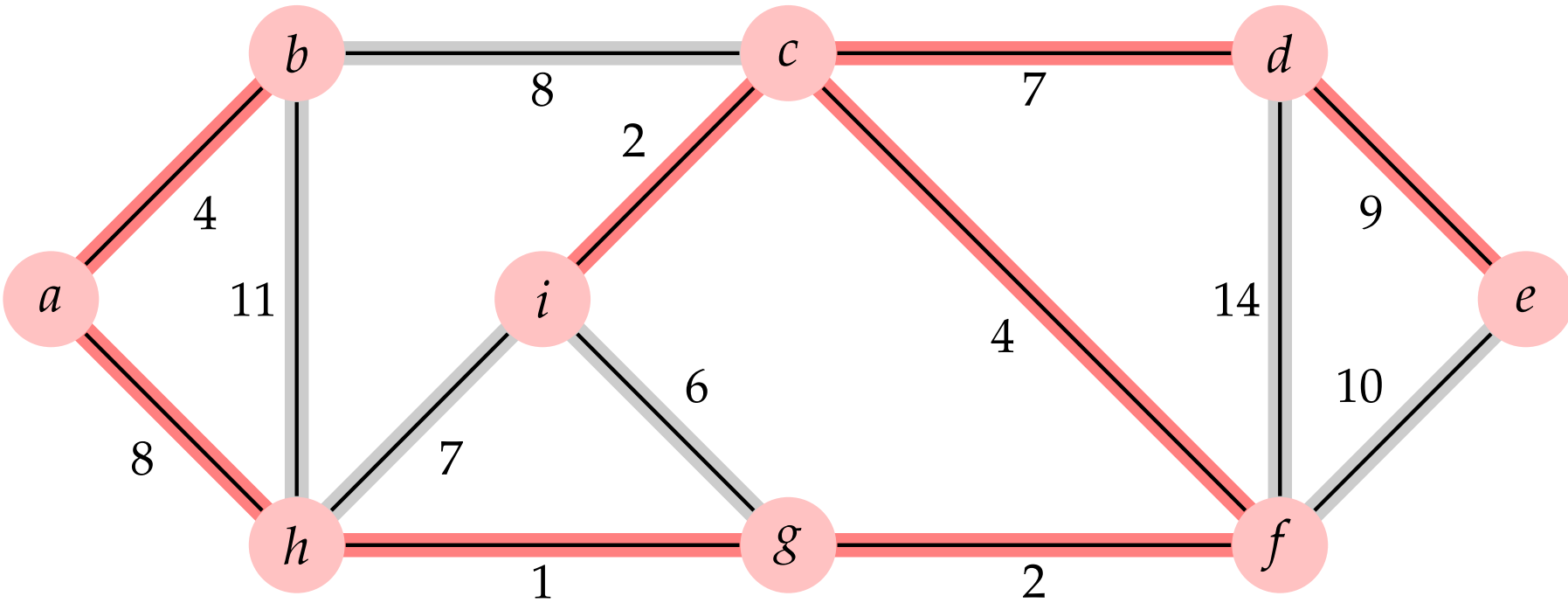
- MAKE-SET(v) vytvoří množinu obsahující v.
- FIND-SET(v) vrací reprezentanta množiny obsahující v.
- UNION(u, v) sjednotí dvě množiny obsahující u a v.

Kruskalův algoritmus – Složitost

```
KRUSKAL-MST(G, w)
1  A ← ∅
2  for každý uzel v ∈ V
3      do MAKE-SET(v)
4  uspořádej hrany E do neklesající posloupnosti podle váhy w
5  for každou hranu (u, v) ∈ E branou v neklesajícím uspořádání podle w
6      do if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v)
7            then A ← A ∪ {(u, v)}
8                 UNION(u, v)
9  return A
```

- Řádek 1: $O(1)$, Řádek 4: $O(m \log m)$. Řádky 2-3: n-krát složitost MAKE-SET. Řádky 5-8: $O(m)$-krát FIND-SET a UNION – závisí na implementaci
  - Implementace seznamem s heuristikou: celkem $O(m + n \log n)$.
  - Stromová implementace s váhami a zkratkami: celkem $O((m+n)\alpha(n))$, α je velmi pomalu rostoucí funkce ($\alpha(n) \leq 4$).
- G souvislý dává $m \geq n - 1$. Proto množinové operace berou $O(m\alpha(n))$. Protože $\alpha(n) = O(\log n) = O(\log m)$, celková složitost je $O(m \log m)$.
- Když si ještě všimneme, že $m < n^2$, je $\log m = O(\log n)$, proto celkem $O(m \log n)$.

Kruskalův algoritmus – příklad



Primův algoritmus

```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2       do key[u] ← ∞
3          π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8           for každý v ∈ Adj[u]
9               do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                    then π[v] ← u
11                         key[v] ← w(u, v)
```

Invariant:

- $A = \{(v, \pi[v]) : v \in V - \{r\} - Q\}$.
- v v min. kostře, pak $v \in V - Q$.
- $v \in Q$. Pokud $\pi[v] \neq NIL$, pak $key[v] < \infty$ a $key[v]$ je hodnota lehké hrany $(v, \pi[v])$ spojující v s uzlem již v min. kostře.

Primův algoritmus – Složitost

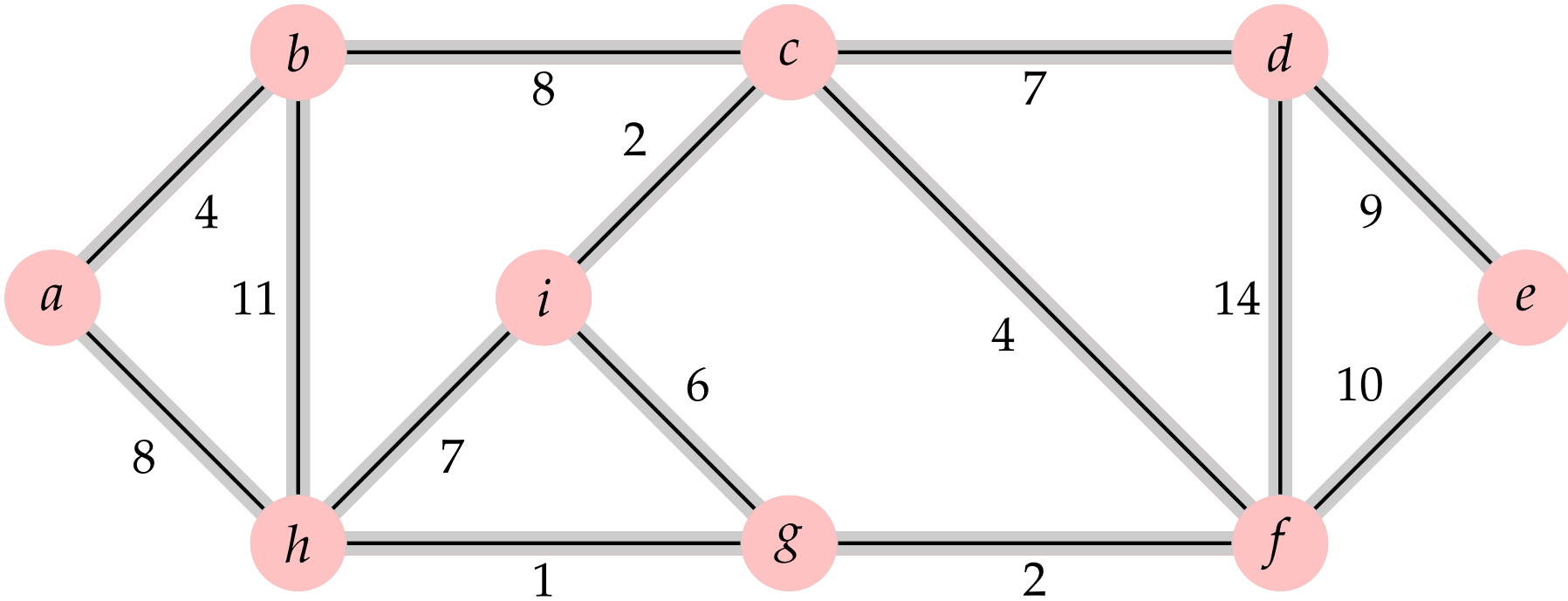
```
PRIM-MST(G, w, r)
1  for každý u ∈ V
2      do key[u] ← ∞
3         π[u] ← NIL
4  key[r] ← 0
5  Q ← V
6  while Q ≠ ∅
7        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
8           for každý v ∈ Adj[u]
9               do if v ∈ Q a w(u, v) < key[v]
10                    then π[v] ← u
11                         key[v] ← w(u, v)
```

- Řádky 1-5: $O(n)$ za použití binární haldy.
- **while** cyklus se proved n-krát a protože EXTRACT-MIN bere $O(\log n)$, je celková složitost všech volání EXTRACT-MIN $O(n \log n)$.
- **for** cyklus se provede $O(m)$-krát, protože délka všech seznamů sousedů je dohromady $2m$.
- Řádek 9 se dá udělat v čase $O(1)$.
- Řádek 11 bere $O(\log n)$ – provést operaci DECREASE-KEY v Q.
- Celkem tedy $O(n \log n + m \log n) = O(m \log n)$.

Primův algoritmus – Složitost

- Použitím Fibonacciho haldy se dá složitost vylepšit.
- Operace Extract-Min v čase $O(\log n)$
- Operace Decrease-Key v čase $O(1)$.
- Celková složitost je pak $O(m + n \log n)$.

Primův algoritmus – příklad



Obrázek: Šedé hrany jsou hrany řezu.

Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $w : E \to \mathbb{R}$.

- Cena cesty $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je suma

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$$

- Cena nejkratší cesty z u do v je

$$\delta(u,v) = \begin{cases} \min\{w(p) : u \overset{p}{\rightsquigarrow} v\} & \text{pokud ex. cesta z } u \text{ do } v \\ \infty & \text{jinak} \end{cases}$$

- Nejkratší cesta z u do v je pak libovolná cesta p z u do v s $w(p) = \delta(u,v)$.

Nejkratší cesty – varianty

- Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů
- Nejkratší cesty ze všech uzlů do jednoho – převrácením orientace hran
- Z jednoho do jednoho – existuje asymptoticky rychlejší řešení než pomocí výše zmíněných?
- Ze všech do všech – existuje rychlejší řešení než výše zmíněné spuštěné pro každý uzel.

Podcesty nejkratších cest

Lemma 18.
Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený orientovaný graf s váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$. Nechť $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z v_1 do v_k. Pro $1 \leq i \leq j \leq k$, $p_{ij} = \langle v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j \rangle$ je podcesta cesty p z v_i do v_j. Pak p_{ij} je nejkratší cesta z v_i do v_j.

Důkaz.

- p je $v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$, kde $w(p) = w(p_{1i}) + w(p_{ij}) + w(p_{jk})$.
- Nechť ex. p'_{ij} z v_i do v_j s $w(p'_{ij}) < w(p_{ij})$.
- Pak $v_1 \overset{p_{1i}}{\rightsquigarrow} v_i \overset{p'_{ij}}{\rightsquigarrow} v_j \overset{p_{jk}}{\rightsquigarrow} v_k$, kde $w(p_{1i}) + w(p'_{ij}) + w(p_{jk}) < w(p)$. Spor.

□

Záporné hrany

- Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak pro všechna $v \in V$, $\delta(s, v)$ zůstává dobře definována (i když má zápornou hodnotu).

- Pokud G obsahuje záporný cyklus dosažitelný ze zdrojového uzlu s, pak δ nezůstává dobře definována – stále prochází cyklem a snižuje hodnotu.
- Pokud ex. záporný cyklus na nějaké cestě z s do v, definujeme $\delta(s, v) = -\infty$.

- Pozn. nejkratší cesta vždy existuje, ne však nejkratší sled. Algoritmy pracují se sledy, proto výše zmíněný problém.

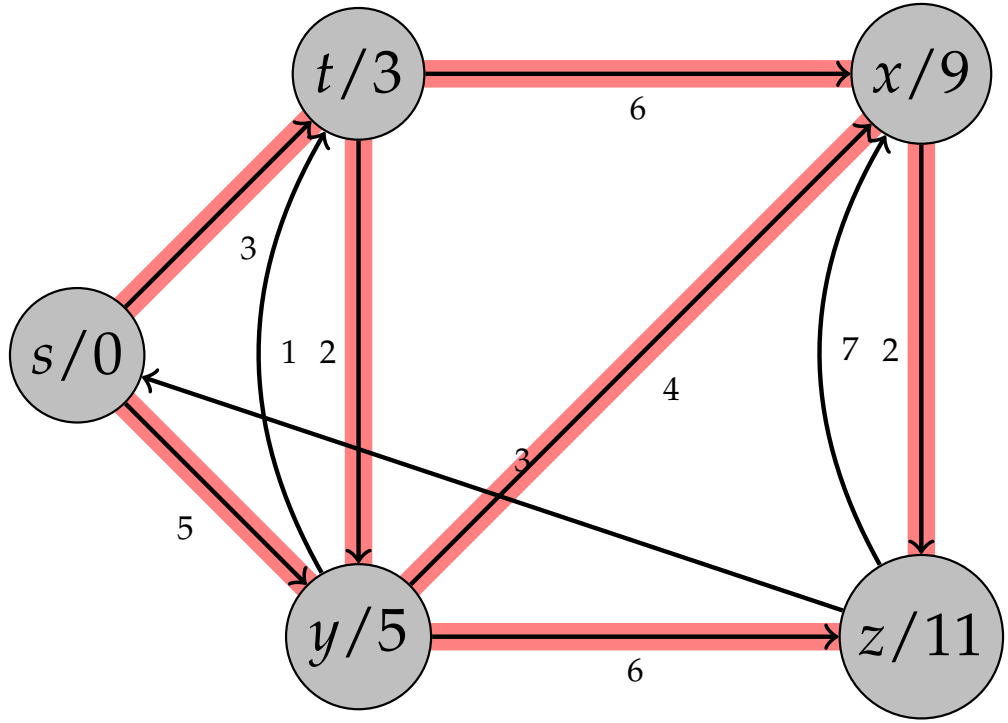
Reprezentace nejkratších cest

- $G = (V, E)$ graf.
- $\pi[v]$ označuje předchůdce v na nejkratší cestě.
- Pro vypsání můžeme použít proceduru $\textsc{Print-Path}(G, s, v)$ (viz dříve)

- Podgraf předchůdců $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ je indukovaný hodnotami π
  - $V_\pi = \{v \in V : \pi[v] \neq NIL\} \cup \{s\}$
  - $E_\pi = \{(\pi[v], v) \in E : v \in V_\pi - \{s\}\}$

- V okamžiku dokončení výpočtu algoritmu je G_π strom nejkratších cest. Tj. kořenový strom obsahující nejkratší cesty ze zdroje s do všech ostatních uzlů.

Nejedinečnost nejkratších cest – příklad



Obrázek: Nejkratší cesty.

Relaxace

- $d[v]$ – odhad nejkratší cesty

```
INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
1  for každý v ∈ V
2       do d[v] ← ∞
3          π[v] ← NIL
4  d[s] ← 0
```

- Složitost $\Theta(n)$.

```
RELAX(u, v, w)
1  if d[v] > d[u] + w(u, v)
2     then d[v] ← d[u] + w(u, v)
3          π[v] ← u
```

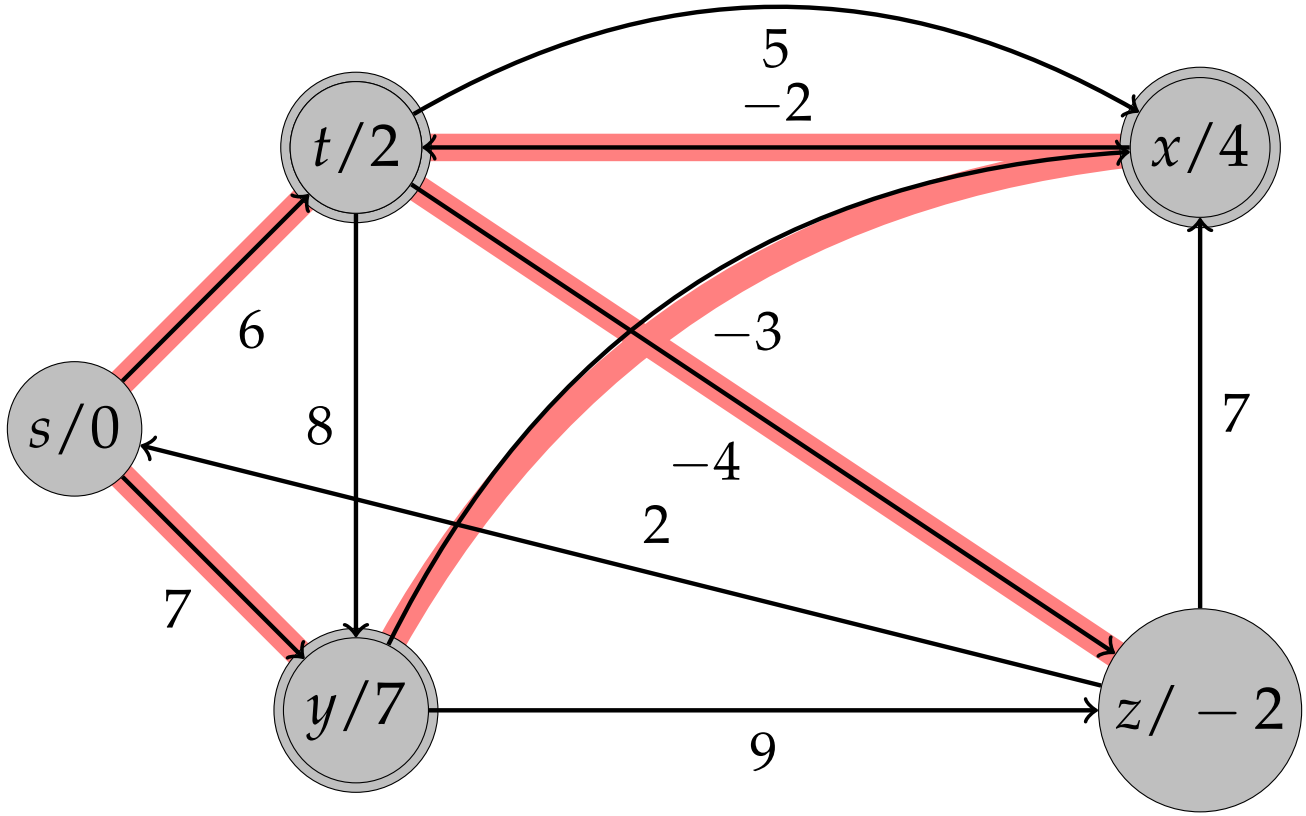
Algoritmus Bellman-Ford

Algoritmus Bellman-Ford

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  for i ← 1 to n − 1
3       do for každou hranu (u, v) ∈ E
4            do RELAX(u, v, w)
5  for každou hranu (u, v) ∈ E
6       do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7            then return FALSE
8  return TRUE
```

- Pokud vrátí FALSE, G obsahuje záporný cyklus.
- Pokud vrátí TRUE, má v π uloženy nejkratší cesty.

Bellman-Ford – příklad



Obrázek: Práce algoritmu Bellman-Ford.

- Pokud $(u, v) \in E$ je označená, pak $\pi[v] = u$
- Hrany se relaxují v tomto pořadí:
  $(t,x), (t,y), (t,z), (x,t), (y,x), (y,z), (z,x), (z,s), (s,t), (s,y)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Složitost

```
BELLMAN-FORD(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  for i ← 1 to n − 1
3       do for každou hranu (u, v) ∈ E
4            do RELAX(u, v, w)
5  for každou hranu (u, v) ∈ E
6       do if d[v] > d[u] + w(u, v)
7            then return FALSE
8  return TRUE
```

- Řádek 1 bere $\Theta(n)$.
- Řádky 2-4 berou $n-1$-krát $\Theta(m)$.
- Řádky 5-7 berou $\Theta(m)$.
- Celkem $\Theta(mn)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Lemma 19.
Nechť $G = (V, E)$ je ohodnocený orientovaný graf se zdrojem s a váhovou funkcí $w : E \to \mathbb{R}$ a předpokládejme, že G neobsahuje žádný záporný cyklus dosažitelný z s. Pak po $n - 1$ opakování **for**-*cyklu na řádcích 2-4 $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ dosažitelné z s.* **Pozn.** *$d[v] = \infty$, pak v nedosažitelný z s.*

Důkaz.

- Nechť $v \in V$ dosažitelný z s.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$ je nejkratší cesta z s do v; $s = v_0$ a $v = v_k$.
- p má nejvýše $n - 1$ hran, proto $k \leq n - 1$.
- Každá z $n - 1$ iterací na řádcích 2-4 relaxuje všech m hran.
- Mezi hranami relaxovanými v i-tém kroku je i hrana (v_{i-1}, v_i) a po tomto kroku platí $d[v_i] = \delta(s, v_i)$. (Dokažte indukcí.)
- Tedy po k-té iteraci je $d[v_k] = \delta(s, v_k)$.

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Věta 20 (Korektnost I).

- *Pokud G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s, algoritmus vrací* TRUE *a $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$.*

Důkaz.

- Nechť G neobsahuje záporný cyklus dosažitelný z s.
- Po ukončení algoritmu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro všechny $v \in V$ (Lemma 19)
- Navíc, $d[v] = \delta(s, v) \leq \delta(s, u) + w(u, v) = d[u] + w(u, v)$. Proto algoritmus vrací TRUE.

□

Algoritmus Bellman-Ford – Korektnost

Věta 21 (Korektnost II).

- *Pokud G obsahuje záp. cyklus dosažitelný z s, alg. vrací* FALSE.

Důkaz.

- Záporný cyklus $c = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, $v_0 = v_k$, dosažitelný z s.
- Pak $\sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) < 0$.
- Sporem – alg. vrací TRUE, tj. $d[v_i] \leq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.
- Pak ale $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] \leq \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}] + \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$.
- Protože $v_0 = v_k$, máme $\sum_{i=1}^{k} d[v_i] = \sum_{i=1}^{k} d[v_{i-1}]$.
- Jelikož pro $i = 1, 2, \ldots, k$ je $d[v_i] < \infty$, máme $0 \leq \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i)$. Spor.

□

Nejkratší cesty z jednoho do všech uzlů v acyklických grafech

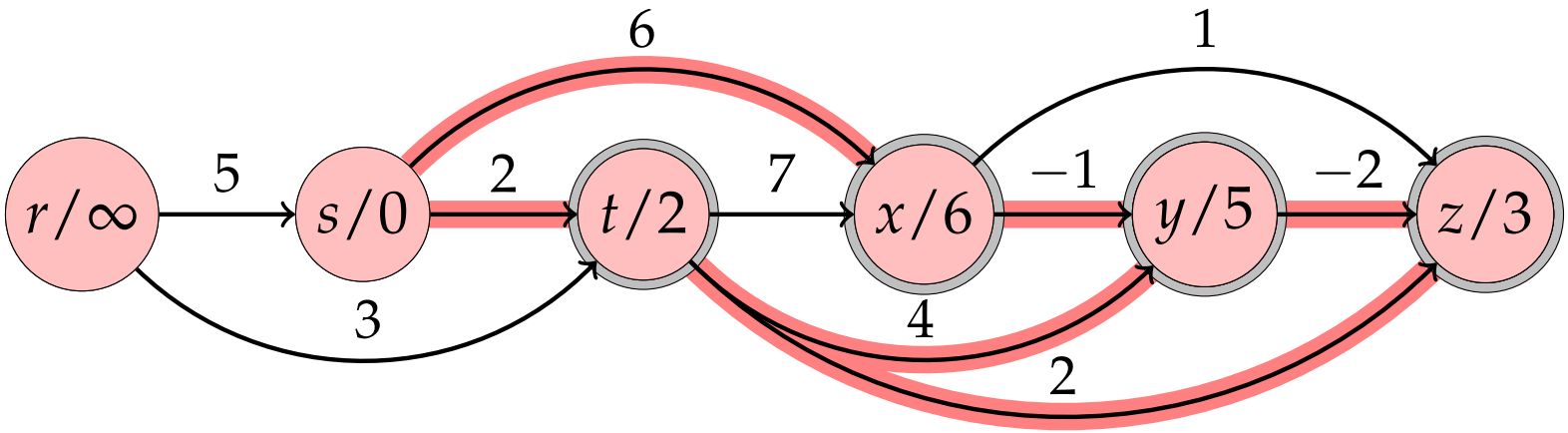
Nejkratší cesty v acyklických grafech

- Pro acyklické grafy existuje rychlejší metoda než Bellman-Ford.

```
DAG-SHORTEST-PATHS(G, w, s)
1  Topologicky uspořádej uzly grafu G
2  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
3  for každý uzel u, brané podle topologického uspořádání
4      do for každý uzel v ∈ Adj[u]
5             do RELAX(u, v, w)
```

- Časová složitost $\Theta(n+m)$.
  - Časová složitost topologického uspořádání je $\Theta(n+m)$.
  - Řádek 2 má složitost $\Theta(n)$.
  - Řádky 3-5 projdou každou hranu právě jednou, tj. vnitřní cyklus se provede m-krát. RELAX je konstantní.

Příklad



Korektnost

Věta 22.
Pokud ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ *má zdrojový uzel* s *a žádný cyklus, pak* DAG-SHORTEST-PATHS *procedura vypočítá* $d[v] = \delta(s, v)$ *pro* $v \in V$.

Důkaz.

- Pokud v nedosažitelný z s, pak $d[v] = \delta(s, v) = \infty$.
- Nechť $p = \langle v_0, v_1, \ldots, v_k \rangle$, kde $s = v_0$ a $v = v_k$.
- Jelikož algoritmus prochází uzly podle topologického uspořádání, jsou hrany p relaxovány v pořadí $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$.
- Z toho plyne, že $d[v_i] = \delta(s, v_i)$ po ukončení algoritmu (dokažte).

□

Dijkstrův algoritmus

Dijkstrův algoritmus

- Pouze pro ohodnocené orientované grafy bez záporných ohodnocení.
- $w(u,v) \geq 0$ pro každou hranu $(u,v) \in E$.

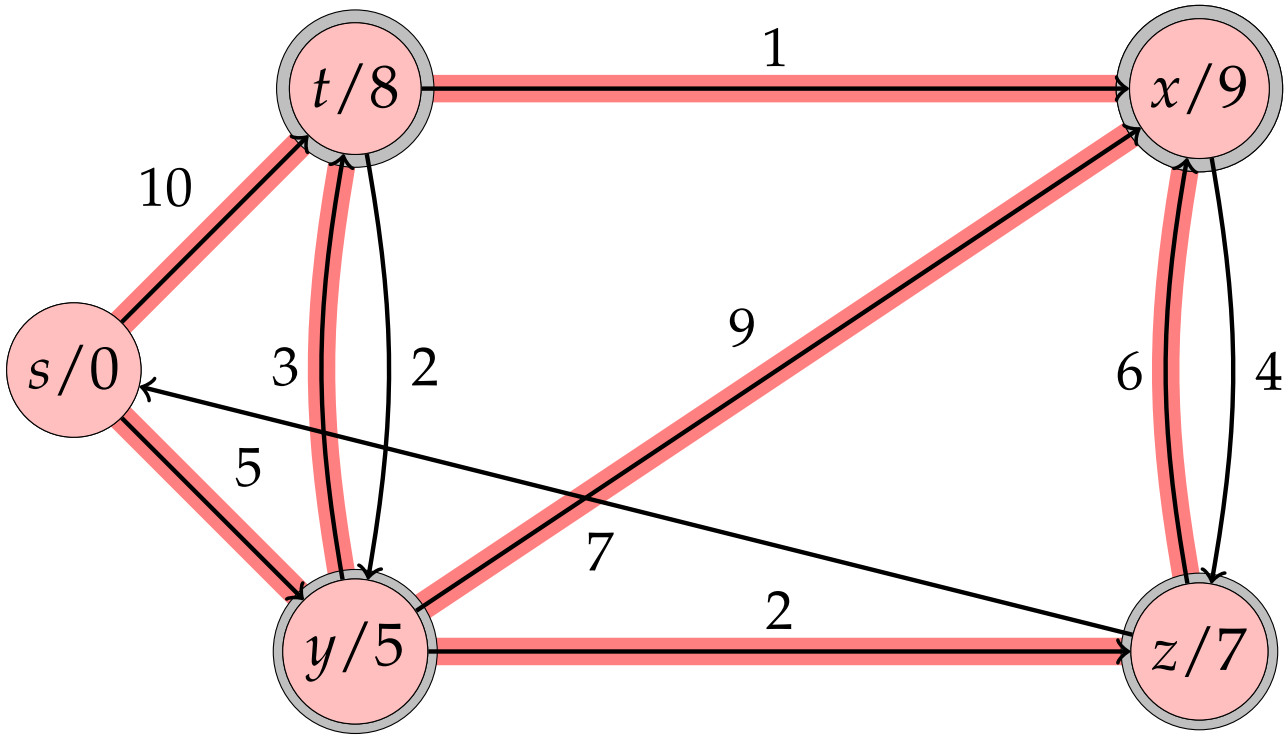
- Je možno jej naimplementovat tak, že jeho časová složitost je nižší než algoritmu Bellman-Ford.

Dijkstrův algoritmus

- S je množina uzlů, jejichž nejkratší vzdálenost od s již byla vypočtena.
- Q je prioritní fronta; uzel s min. d-hodnotou na vrcholu fronty.

```
DIJKSTRA(G, w, s)
1  INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G, s)
2  S ← ∅
3  Q ← V
4  while Q ≠ ∅
5        do u ← EXTRACT-MIN(Q)
6           S ← S ∪ {u}
7           for každý uzel v ∈ Adj[u]
8              do RELAX(u, v, w)
```

Dijkstrův algoritmus – příklad



Obrázek: Práce Dijkstrova algoritmu. Označené uzly značí uzly z množiny S.

Korektnost

Věta 23.

Dijkstrův algoritmus, spuštěn na ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E)$ bez záporných hran se zdrojem s, skončí s $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in V$.

Důkaz.

- Invariant: Na začátku každého **while**-cyklu je $d[v] = \delta(s, v)$ pro $v \in S$.
- Platí pro $S = \emptyset$.
- Nechť u je první uzel, pro nějž $d[u] \neq \delta(s, u)$ v okamžiku přidání do S.
- Pak musí být $u \neq s$, protože s je přidaný jako první do S a $d[s] = \delta(s, s) = 0$ platí v okamžiku přidání s do S.
- Protože $u \neq s$, je $S \neq \emptyset$ (těsně) před přidáním u.
- Z předpokladu $d[u] \neq \delta(s, u)$ plyne existence cesty z s do u – jinak je $d[u] = \delta(s, u) = \infty$.
- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.

Korektnost

Pokračování důkazu.

- Existuje tedy nejkratší cesta p z s do u.
- Těsně před přidáním u do S spojuje p uzel $s \in S$ s uzlem $u \in V - S$.
- Rozložme p následovně:

$$s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \to y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u\,,$$

kde y je první uzel na cestě, který leží ve $V - S$ a x je jeho předchůdce na p.

- Podle předpokladu máme, že $d[x] = \delta(s,x)$ v okamžiku přidání x do S.
- Jelikož v tomto okamžiku byla hrana (x,y) relaxována, $d[y] = \delta(s,y)$ v okamžiku přidání u do S (dokažte).

Korektnost

Pokračování důkazu.

- $s \overset{p_1}{\rightsquigarrow} x \to y \overset{p_2}{\rightsquigarrow} u$, kde y je první uzel ležící ve $V - S$ a x je jeho předchůdce na p.
- $d[y] = \delta(s,y)$ v okamžiku přidání u do S.
- Jelikož y leží před u na nejkratší cestě z s do u a ohodnocení hran je nezáporné, máme $\delta(s,y) \leq \delta(s,u)$.
- Tedy, $d[y] = \delta(s,y) \leq \delta(s,u) \leq d[u]$.
- Protože však oba uzly $y, u \in V - S$ v okamžiku, kdy u byl vybrán, je $d[u] \leq d[y]$.
- Celkem tedy $d[u] = \delta(s,u)$. Spor – špatný předpoklad.
- V okamžiku ukončení je $Q = \emptyset$. Jelikož $Q = V - S$ (rozmyslete si), je $S = V$. Proto $d[v] = \delta(s,v)$ pro $v \in V$.
- Hotovo – uff. . . .

□

Složitost Dijkstrova algoritmu

Prioritní fronta implementována pomocí pole

- INSERT a DECREASE-KEY čas $O(1)$.
- EXTRACT-MIN čas $O(n)$, provede se pro každý uzel (řádek 5).
- RELAX na řádku 8 se provede m-krát.

- Celkem $O(n^2 + m) = O(n^2)$.

- Pro řídké grafy, $|E| = o(n^2 / \log n)$, lze dostat časovou složitost $O(m \log n)$ (pomocí binární haldy).

- Obecně, použitím Fibonacciho haldy dostaneme časovou složitost $O(n \log n + m)$.

Nejkratší cesty ze všech uzlů do všech ostatních uzlů

Nejkratší cesty

- Daný ohodnocený orientovaný graf $G = (V, E)$ a
- váhová funkce $w : E \to \mathbb{R}$.

- Možno n-krát použít algoritmus pro nalezení nejkratší cesty z daného uzlu do všech ostatních.
- Dijkstrův algoritmus: Čas $O(n^3 + nm) = O(n^3)$ pro pole, či $O(n^2 \log n + nm)$ pro Fibonacciho haldu.
- Pokud povolíme záporné hrany, musíme použít algoritmus Bellman-Ford, tj. čas $O(n^2 m)$, což je na hustých grafech $O(n^4)$.

Nejkratší cesty

- Na rozdíl od předchozí části zde používáme matici sousednosti $W = (w_{ij})$, kde

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j, \\ w(i,j) & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \in E, \\ \infty & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \end{cases}$$

- Připouštíme záporné hrany.
- Zatím se omezíme na grafy bez záporných cyklů.

- Výsledek v matici $D = (d_{ij})$, kde $d_{ij} = \delta(i,j)$ po ukončení algoritmu.
- Matice předchůdců $\Pi = (\pi_{ij})$, kde π_{ij} je
  1. NIL, pokud $i = j$ nebo neexistuje cesta z i do j,
  2. předchůdce j na nějaké nejkratší cestě z i.

Výpis nejkratších cest

```
PRINT-ALL-SHORTEST-PATH(Π, i, j)
1  if i = j
2     then print i
3     else if π_ij = NIL
4             then print "Cesta z" i "do" j "neexistuje!"
5             else PRINT-ALL-SHORTEST-PATH(Π, i, π_ij)
6                  print j
```

Násobení matic

Násobení matic – struktura nejkratších cest

- Reprezentace – matice sousednosti $W = (w_{ij})$.
- Nechť p je nejkratší cesta z i do j, která má m' hran.
- Pokud p nemá záporný cyklus, pak $m' < \infty$.
- Pro $i = j$ je $m' = 0$ a $w_{ij} = \delta(i,j) = 0$.
- Pro $i \neq j$ rozložme cestu p takto:

$$i \overset{p'}{\rightsquigarrow} k \to j\,,$$

  kde p' má $m' - 1$ hran.
- p' je nejkratší cesta z i do k – rozmyslete – proto $\delta(i,j) = \delta(i,k) + w_{kj}$.

Násobení matic – rekurze

- Nechť $l_{ij}^{(m)}$ je minimální ohodnocení ze všech cest z i do j, které obsahují nejvýše m hran.
- $m = 0$, právě když $i = j$. Tedy $l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = j \\ \infty & \text{pro } i \neq j \end{cases}$
- $l_{ij}^{(m)} = \min(l_{ij}^{(m-1)}, \min\limits_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}) = \min\limits_{1 \leq k \leq n} \{l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj}\}.$
- Nejkratší cesta z i do j má nejvýše $n - 1$ hran, proto

$$\delta(i,j) = l_{ij}^{(n-1)} = l_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n+1)} = \ldots.$$

(Když tam není záporný cyklus.)

Násobení matic – výpočet

- Vstupní matice $W = (w_{ij})$.
- Vypočteme matice $L^{(1)}, L^{(2)}, \ldots, L^{(n-1)}$, kde pro $m = 1, 2, \ldots, n-1$,

$$L^{(m)} = (l_{ij}^{(m)}) .$$

- $L^{(n-1)}$ pak obsahuje hodnoty nejkratších cest.
- $l_{ij}^{(1)} = w_{ij}$, tj. $L^{(1)} = W$.

Srdce algoritmu

```
EXTEND-SHORTEST-PATHS(L, W)
1  n ← rows[L]
2  Nechť L' = (l'_ij) je matice řádu n
3  for i ← 1 to n
4      do for j ← 1 to n
5             do l'_ij ← ∞
6                for k ← 1 to n
7                    do l'_ij ← min(l'_ij, l_ik + w_kj)
8  return L'
```

- $rows[L]$ značí počet řádků L.
- Časová složitost $\Theta(n^3)$.

Konečně souvislost s násobením matic

- Nechť $C = A \cdot B$, kde A a B jsou matice řádu n.
- Pak

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

- Pro srovnání

$$l_{ij}^{(m)} = \min_{1 \leq k \leq n} \{ l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \}$$

Najděte 3 rozdíly (mimo názvu a pojmenování proměnných)

EXTEND-SHORTEST-PATHS(L, W)
1 $n \leftarrow rows[L]$
2 Nechť $L' = (l'_{ij})$ je matice řádu n
3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4 **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
5 **do** $l'_{ij} \leftarrow \infty$
6 **for** $k \leftarrow 1$ **to** n
7 **do** $l'_{ij} \leftarrow \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$
8 **return** L'

MATRIX-MULTIPLY(A, B)
1 $n \leftarrow rows[A]$
2 Nechť $C = (c_{ij})$ je matice řádu n
3 **for** $i \leftarrow 1$ **to** n
4 **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
5 **do** $c_{ij} \leftarrow 0$
6 **for** $k \leftarrow 1$ **to** n
7 **do** $c_{ij} \leftarrow c_{ij} + a_{ik} \cdot b_{kj}$
8 **return** C

Zase násobení matic

- Zápisem $X \cdot Y$ označme matici vypočtenou procedurou $\textsc{Extend-Shortest-Paths}(X, Y)$.
- Pak počítáme sekvenci matic

$$\begin{aligned}
L^{(1)} &= L^{(0)} \cdot W &&= W \\
L^{(2)} &= L^{(1)} \cdot W &&= W^2 \\
L^{(3)} &= L^{(2)} \cdot W &&= W^3 \\
&\vdots \\
L^{(n-1)} &= L^{(n-2)} \cdot W &&= W^{n-1}
\end{aligned}$$

kde W^{n-1} obsahuje hodnoty nejkratších cest.

Pomalá metoda

```
SLOW-ALL-SHORTEST-PATHS(W)
1  n ← rows[W]
2  L^(1) ← W
3  for m ← 2 to n − 1
4       do L^(m) ← EXTEND-SHORTEST-PATHS(L^(m−1), W)
5  return L^(n−1)
```

- Složitost $\Theta(n^4)$.

Rychlá (rychlejší) metoda

- Jak zrychlit?
- Pokud nemáme záporný cyklus, pak $L^{(m)} = L^{(n-1)}$ pro $m \geq n-1$.
- Násobení matic definované procedurou EXTEND-SHORTEST-PATHS je asociativní.
- Nemusíme tedy počítat $n-1$ násobení, ale pouze $\lceil \log n - 1 \rceil$
- Počítáme sekvenci matic

$$\begin{array}{lcll} L^{(1)} & = & W & \\ L^{(2)} & = & W^2 & \\ L^{(4)} & = & W^4 & = W^2 \cdot W^2 \\ L^{(8)} & = & W^8 & = W^4 \cdot W^4 \\ & & \vdots & \\ L^{(2^{\lceil \log n-1 \rceil})} & = & W^{(2^{\lceil \log n-1 \rceil})} & = W^{2^{\lceil \log n-1 \rceil}-1} \cdot W^{2^{\lceil \log n-1 \rceil}-1} \end{array}$$

Protože $2^{\lceil \log n-1 \rceil} \geq n-1$, je $L^{(2^{\lceil \log n-1 \rceil})} = L^{(n-1)}$.

Rychlá (rychlejší) metoda

FAST-ALL-SHORTEST-PATHS(W)
1 $n \leftarrow rows[W]$
2 $L^{(1)} \leftarrow W$
3 $m \leftarrow 1$
4 **while** $m < n - 1$
5 **do** $L^{(2m)} \leftarrow$ EXTEND-SHORTEST-PATHS($L^{(m)}, L^{(m)}$)
6 $m \leftarrow 2m$
7 **return** $L^{(m)}$

- Složitost $\Theta(n^3 \log n)$.

Floyd-Warshallův algoritmus

Floyd-Warshallův algoritmus

- Připouštíme záporné hrany.
- Avšak předpokládáme, že nemáme záporné cykly.

Struktura nejkratších cest

- Vnitřní uzel nejkratší cesty $p = \langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ je libovolný uzel v_i pro $1 < i < k$.
- Nechť $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Pro $i, j \in V$, uvažme všechny cesty z i do j, kde vnitřní uzly jsou z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- Nechť p je nejkratší taková cesta.
- Floyd-Warshallův algoritmus využívá vztahu mezi cestou p a nejkratší cestou z i do j, která má vnitřní uzly z množiny $\{1, 2, \ldots, k-1\}$.
  - k není vnitřní uzel p, pak všechny vnitřní uzly p jsou z $\{1, 2, \ldots, k-1\}$. Tedy nejkratší cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ je rovněž nejkratší cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k\}$.
  - k je vnitřní uzel p, pak $i \overset{p_1}{\rightsquigarrow} k \overset{p_2}{\rightsquigarrow} j$. Přitom p_1 je nejkratší cesta z i do k s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ a p_2 je nejkratší cesta z k do j s vnitřními uzly z $\{1, 2, \ldots, k-1\}$.

Rekurze

- Nechť $d_{ij}^{(k)}$ je ohodnocení nejkratší cesty z i do j, která má vnitřní uzly pouze z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- $k = 0$, právě když $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$. Tedy

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{pro } k = 0 \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{pro } k \geq 1 \end{cases}$$

- Protože všechny vnitřní uzly jsou z množiny $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, matice $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$ dává $d_{ij}^{(n)} = \delta(i, j)$ pro $i, j \in V$.

Výpočet

FLOYD-WARSHALL(W)
1 $n \leftarrow rows[W]$
2 $D^{(0)} \leftarrow W$
3 **for** $k \leftarrow 1$ **to** n
4 **do for** $i \leftarrow 1$ **to** n
5 **do for** $j \leftarrow 1$ **to** n
6 **do** $d_{ij}^{(k)} \leftarrow \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$
7 **return** $D^{(n)}$

- Složitost $\Theta(n^3)$.

Konstrukce nejkratší cesty

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{pro } i = j \text{ nebo } w_{ij} = \infty \\ i & \text{pro } i \neq j \text{ a } w_{ij} < \infty \end{cases}$$

Pro $k \geq 1$,

$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{pro } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{pro } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

Tranzitivní uzávěr grafu

- Dán orientovaný graf $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.
- Tranzitivní uzávěr grafu G je graf $G^* = (V, E^*)$, kde

$$E^* = \{(i, j) : \text{existuje cesta z } i \text{ do } j \text{ v } G\}.$$

- Ohodnoťme hrany hodnotou 1 a spusťme Floyd-Warshallův algoritmus ($\Theta(n^3)$).
  - Pokud existuje cesta z i do j, pak $d_{ij} < n$.
  - Jinak je $d_{ij} = \infty$.
- Lze trochu vylepšit....

Tranzitivní uzávěr grafu II

- Použijme logické spojky $\vee$ a $\wedge$ místo $\min$ a $+$.
- Definujme $t_{ij}^{(k)}$, $i,j,k \in \{1,2,\ldots,n\}$, tak, že je rovno 1, pokud existuje cesta z i do j s vnitřními uzly z $\{1,2,\ldots,k\}$, jinak 0.
- Tedy

$$t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \text{ a } (i,j) \notin E \\ 1 & \text{pro } i = j \text{ nebo } (i,j) \in E \end{cases}$$

  a pro $k \geq 1$,

$$t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)} \right) .$$

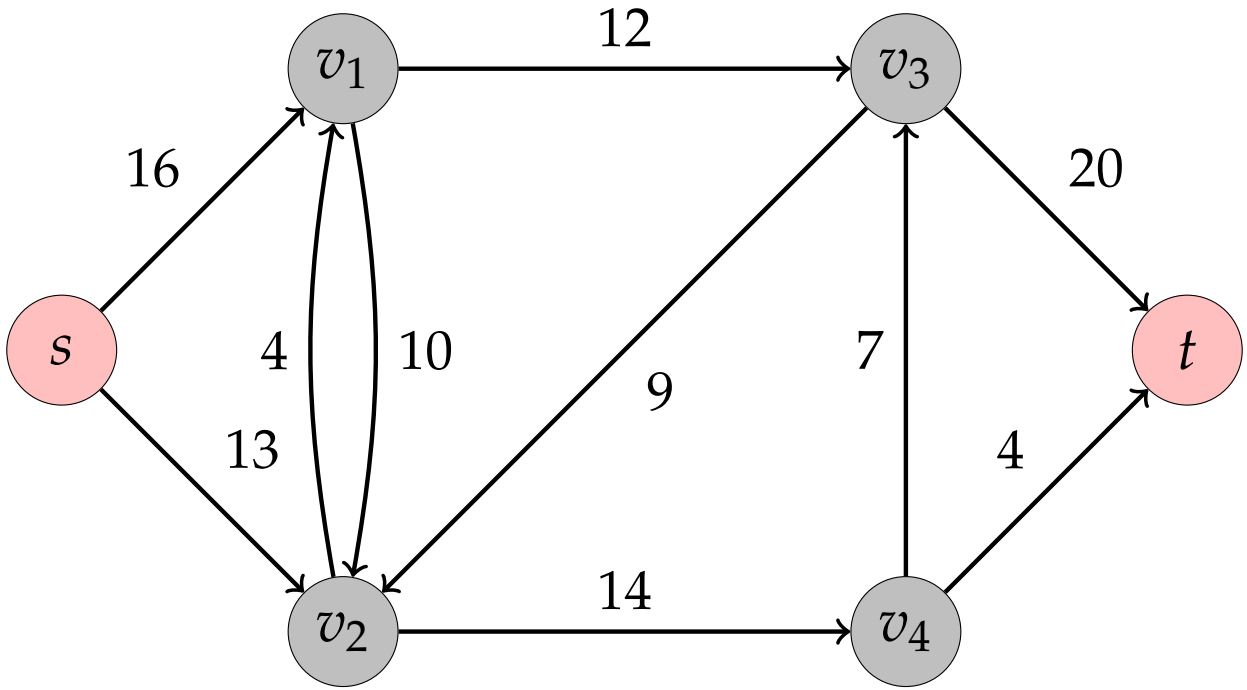
- Stejně jako ve Floyd-Warshallově algoritmu máme tři **for**-cykly, tedy složitost $\Theta(n^3)$. Proč je lepší?
- Protože logické operace na bitech jsou obvykle rychlejší než aritmetické operace na integerech. Navíc, v paměti jsou jen bity, ne bajty.

Toky v síti

Síť

- síť $G = (V, E)$ je orientovaný graf,
- kde každá hrana $(u, v) \in E$ má nezápornou kapacitu $c(u, v) \geq 0$.
- Nechť $c(u, v) = 0$, pokud $(u, v) \notin E$.
- Jsou specifikovány dva uzly: zdroj s a spotřebič t
- Každý uzel leží na cestě z s do t, tj. $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$ pro každý $v \in V$.
- Síť je tedy souvislý graf a $m \geq n - 1$.

Síť – příklad

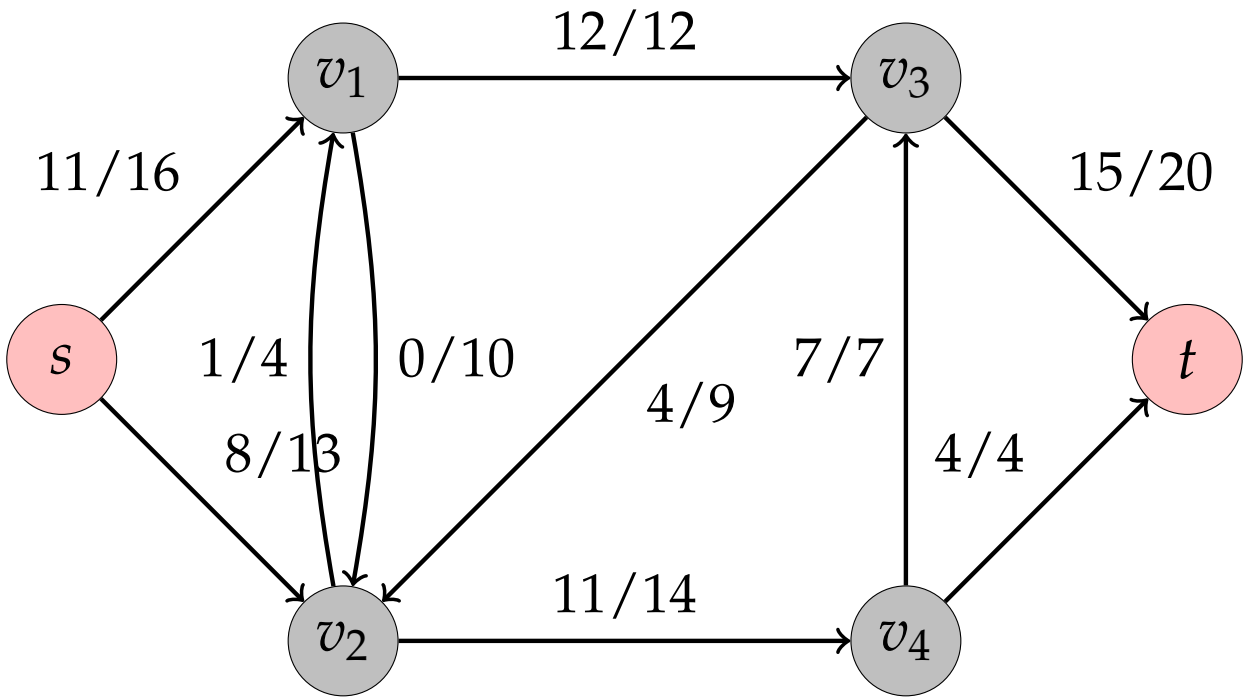


Tok v síti

- Tok v síti G je reálná funkce $f : V \times V \to \mathbb{R}$ splňující:
  1. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) \leq c(u,v)$.
  2. Pro každé $u, v \in V$, $f(u,v) = -f(v,u)$.
  3. Pro každé $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$.
- Poslední podmínka říká, že to, co vtéká do uzlu u z něj také vytéká.
- $f(u,v)$ se nazývá tok z uzlu u do uzlu v.
- Velikost toku je definována jako

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)\,.$$

Tok v síti – příklad

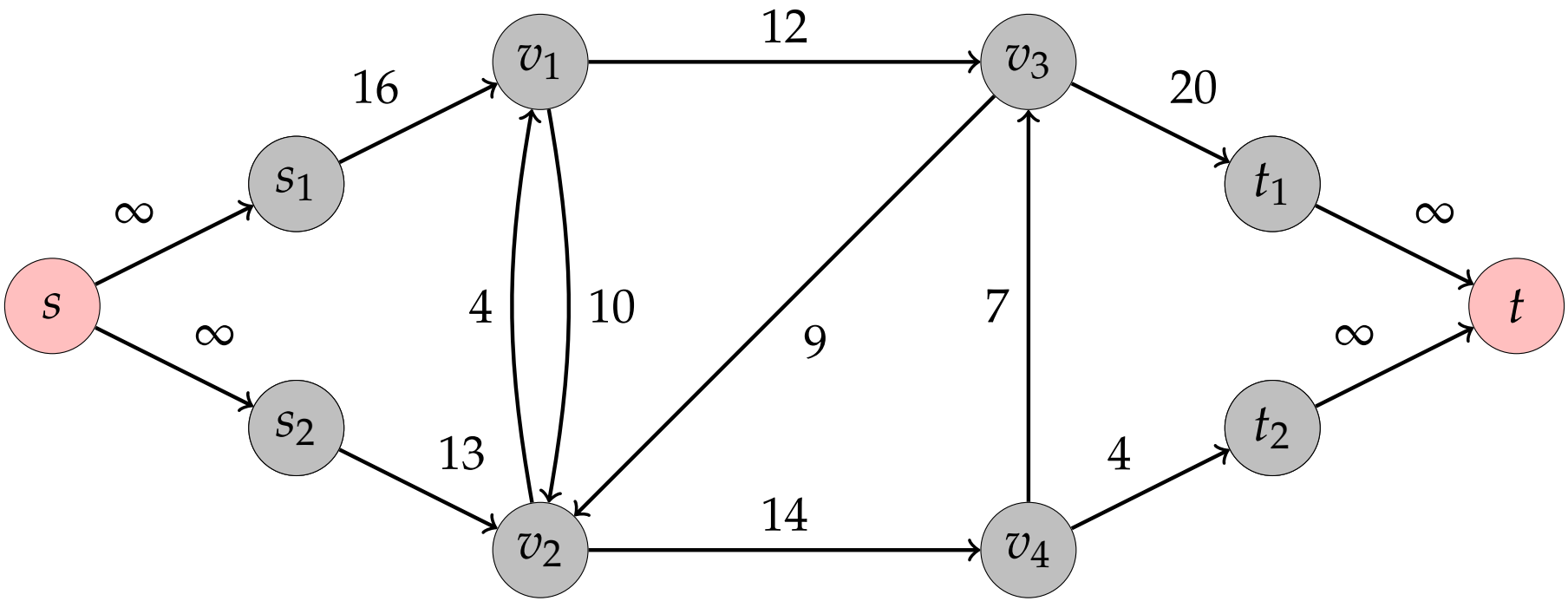


- Na hranách jsou hodnoty $f(u,v)/c(u,v)$.
- Ověřte, že jde o tok v síti.
- $|f| =$???
- $|f| = 19$.

Maximální tok

- Máme danou síť G se zdrojem s a spotřebičem t.
- Hledáme tok maximální velikosti.

Více zdrojů a spotřebičů



- Co s tím?
- Vytvoříme nový zdroj a spotřebič a nastavíme novým hranám kapacitu c na ∞.

Práce s toky

- Pro $X, Y \subseteq V$, definujme $f(X,Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x,y)$.
- Pak platí, že $|f| = f(s,V)$.
- Pro $X \subseteq V$, $f(X,X) = 0$ — s každým $f(u,v)$ máme i $f(v,u)$.
- Pro $X, Y \subseteq V$, $f(X,Y) = -f(Y,X)$.
- Pro $X, Y, Z \subseteq V$, $X \cap Y = \emptyset$,

$$f(X \cup Y, Z) = f(X,Z) + f(Y,Z)$$

a

$$f(Z, X \cup Y) = f(Z,X) + f(Z,Y)\,.$$

Práce s toky – příklad

Dokažte, že $|f| = f(V,t)$.

Důkaz.

- $|f| = f(s,V)$
- Víme $f(V,V) = f(s,V) + f(V-s,V)$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = f(V,V) - f(V-s,V)$.
- Víme $f(V,V) = 0$ – výše.
- Tedy $f(s,V) = -f(V-s,V) = f(V,V-s)$.
- Víme $f(V,V-s) = f(V,t) + f(V,V-s-t)$ – výše.
- Z přechozího a vlastnosti toku víme, že $f(V,V-s-t) = -f(V-s-t,V) = -\sum_{u \in V-\{s,t\}} \sum_{v \in V} f(u,v) = -\sum_{u \in V-\{s,t\}} 0 = 0$.
- Tedy $|f| = f(V,t)$.

Ford-Fulkersonova metoda

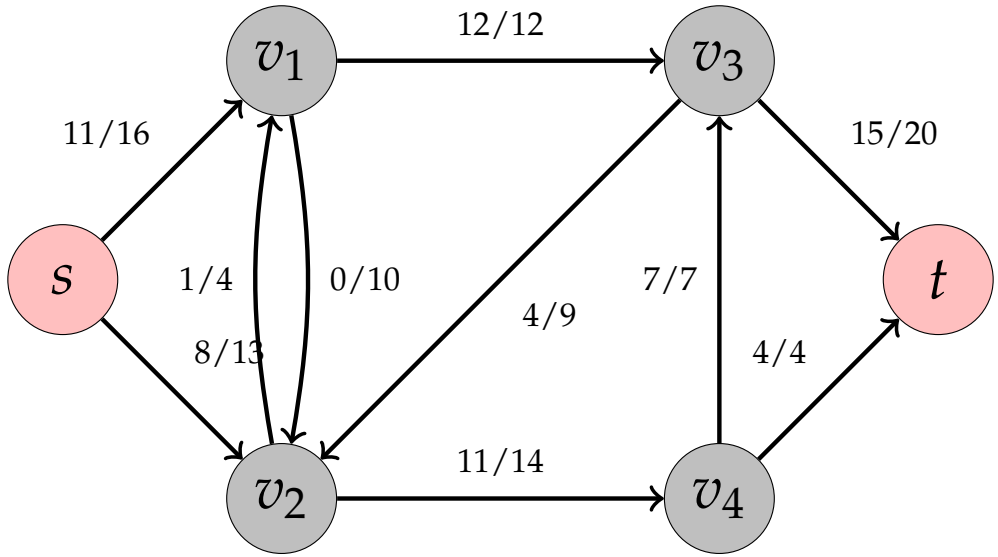
Ford-Fulkersonova metoda

- Pro nalezení maximálního toku v síti.
- Ne algoritmus, protože existuje několik implementací s odlišnou složitostí.

```
FORD-FULKERSON-METHOD(G, s, t)
1  inicializuj f(u, v) = 0 pro u, v ∈ V
2  while existuje zlepšující cesta p
3        do zlepši tok f podle p
4  return f
```

- Zlepšující cesta je cesta z s do t, kde můžeme zvětšit tok.

Reziduální síť



- Reziduální kapacita hrany (u, v) je

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)\,.$$

- Např. $c_f(s, v_1) = 16 - 11 = 5$.
- Tok $f(u, v)$ tedy může být zlepšen až o 5 jednotek.

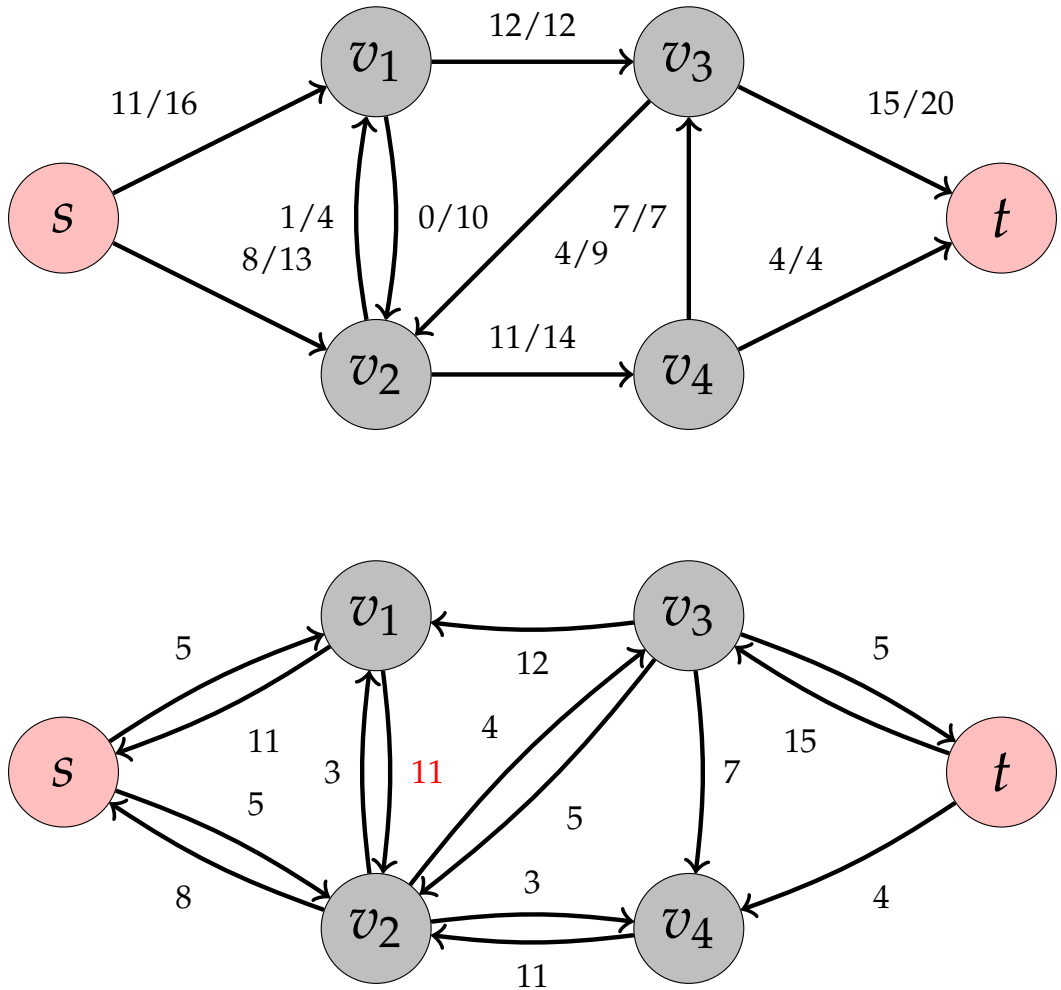
Reziduální síť

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f je tok v síti G.
- Reziduální síť sítě G indukovaná tokem f je síť $G_f = (V, E_f)$, kde

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}.$$

- Platí, že $|E_f| \leq 2|E|$ – rozmyslete.

Síť a její reziduální síť



- Pozor! $f(v_1, v_2) = 0 + (-1)$, proto $c_f(v_1, v_2) = 10 - (-1) = 11$.

Reziduální síť

Lemma 24.
Nechť $G = (V, E)$ je síť a f je tok v G. Nechť G_f je reziduální síť G indukovaná f a nechť f' je tok v G_f.
Pak $f + f'$ je tok v G s hodnotou $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Důkaz.

- Spočívá v ověření podmínek z definice toku.

□

Podmínka 1

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) \leq c(u,v)$.

Důkaz.

- $f'(u,v) \leq c_f(u,v)$.
- $$\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &\leq f(u,v)+(c(u,v)-f(u,v))\\ &= c(u,v).\end{aligned}$$

□

Podmínka 2

Chceme ukázat $(f+f')(u,v) = -(f+f')(v,u)$.

Důkaz.

- $\begin{aligned}(f+f')(u,v) &= f(u,v)+f'(u,v)\\ &= -f(v,u)-f'(v,u)\\ &= -(f(v,u)+f'(v,u))\\ &= -(f+f')(v,u).\end{aligned}$

□

Podmínka 3

Chceme ukázat, že pro $u \in V - \{s,t\}$, $\sum_{v \in V} (f + f')(u,v) = 0$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} \sum_{v \in V} (f + f')(u,v) &= \sum_{v \in V} (f(u,v) + f'(u,v)) \\ &= \sum_{v \in V} f(u,v) + \sum_{v \in V} f'(u,v) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

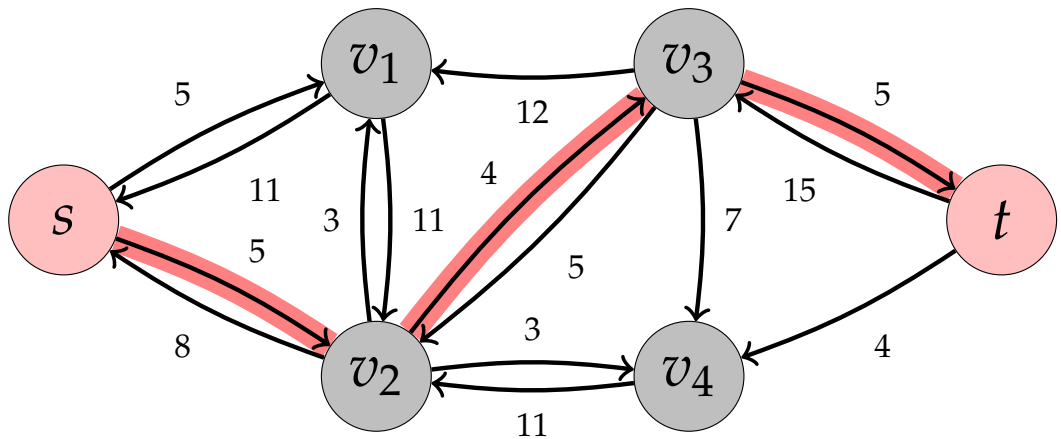
□

Velikost výsledného toku

- $$\begin{aligned} |f+f'| &= \sum_{v \in V} (f+f')(s,v) \\ &= \sum_{v \in V} (f(s,v)+f'(s,v)) \\ &= \sum_{v \in V} f(s,v) + \sum_{v \in V} f'(s,v) \\ &= |f| + |f'|. \end{aligned}$$

Zlepšující cesta – příklad

- Nechť $G = (V, E)$ je síť a f tok.
- Zlepšující cesta p je jednoduchá cesta z s do t.



- Pomocí této cesty můžeme zlepšit tok o 4 jednotky.
- Reziduální kapacita zlepšující cesty p je

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ je na cestě } p\}.$$

Lemma 25.
Nechť $G = (V, E)$ je síť, f její tok a p zlepšující cesta v G_f. Definujme funkci

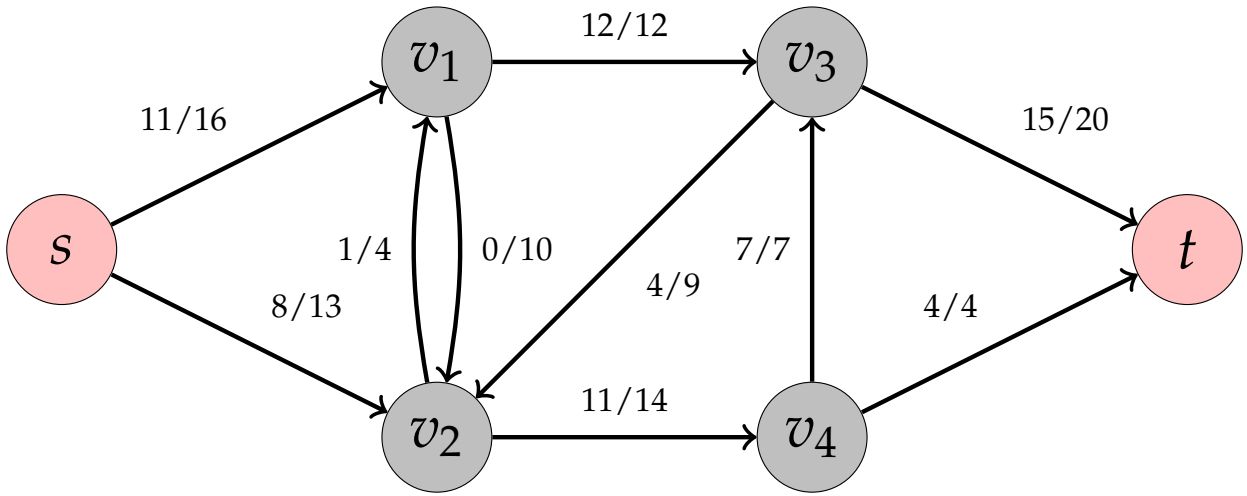
$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{pro } (u,v) \text{ na } p \\ -c_f(p) & \text{pro } (v,u) \text{ na } p \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

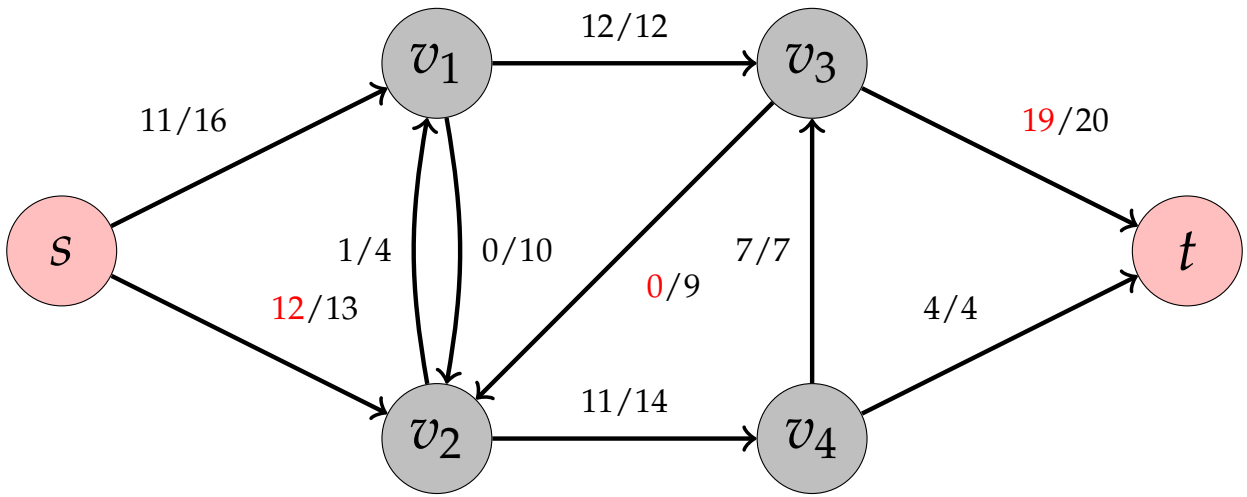
Pak f_p je tok v G_f velikosti $|f_p| = c_f(p) > 0$.

Důkaz.
DÚ. □

Důsledek 26.
Nechť $f' = f + f_p$. Pak f' je tok v G velikosti $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.

Reziduální síť a její zlepšení o 4 na $s \rightsquigarrow v_2 \rightsquigarrow v_3 \rightsquigarrow t$



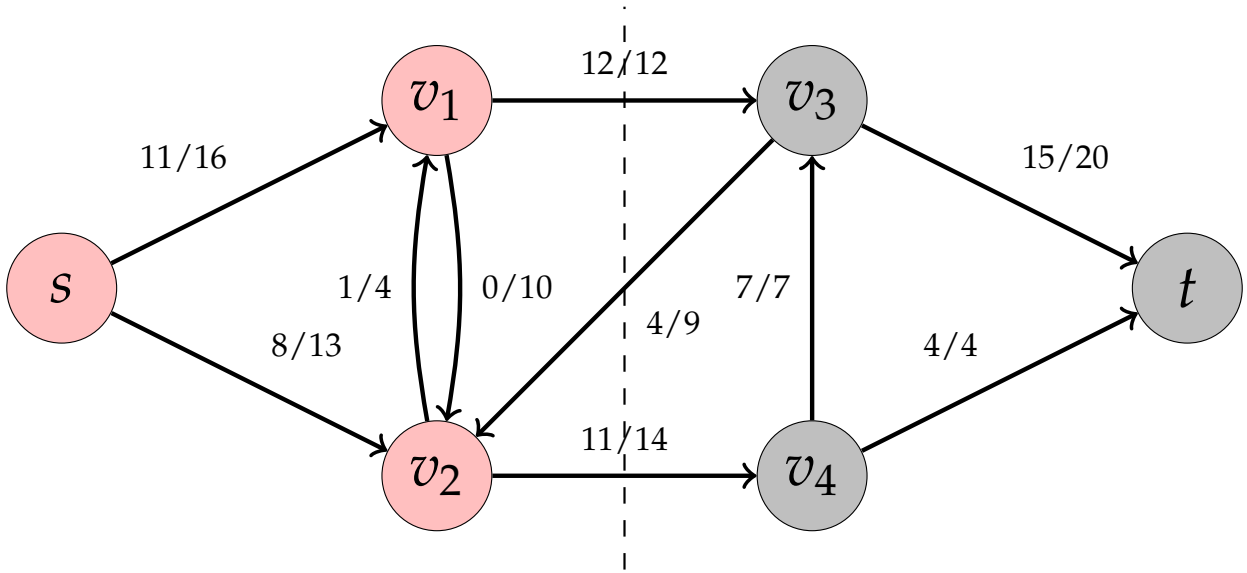


Řez v síti

Řez v síti

- Řez v síti $G = (V, E)$ je rozklad množiny V na S a $T = V - S$ takový, že $s \in S$ a $t \in T$.
- Tok řezem je definován jako $f(S, T)$.
- Kapacita řezu (S, T) je $c(S, T)$.
- Minimální řez je řez s minimální kapacitou.

Řez v síti – příklad



- Tok řezem $f(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\}) =$
  $f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) = 12 + (-4) + 11 = 19.$
- Kapacita řezu
  $c(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\}) = c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) = 12 + 14 = 26.$

Vlastnosti

Lemma 27.
Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t a nechť (S,T) je řez G. Pak $|f| = f(S,T)$.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} f(S,T) &= f(S,V) - f(S,S) \\ &= f(S,V) \\ &= f(s,V) + f(S - \{s\}, V) \\ &= f(s,V) \\ &= |f| \end{aligned}$$

□

Vlastnosti

Důsledek 28.
Velikost libovolného toku f v G je shora omezena kapacitou libovolného řezu v G.

Důkaz.

- $$\begin{aligned} |f| &= f(S,T) \\ &= \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u,v) \\ &\leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u,v) \\ &= c(S,T) \end{aligned}$$

□

Velikost maximálního toku je vždy nejvýše kapacita minimálního řezu.

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(1) \Rightarrow (2)$:
  - Nechť f je maximální a p je zlepšující cesta v G.
  - Pak ale $f + f_p$ je tok v G a $|f + f_p| > |f|$. Spor.

□

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  - Nechť G_f nemá zlepšující cestu, tj. v G_f neexistuje cesta z s do t.
  - Nechť
$$S = \{v \in V : \text{existuje cesta z } s \text{ do } v \text{ v } G_f\}$$
  - a nechť $T = V - S$.
  - Protože $s \in S$ a $t \in T$ je (S,T) řez v G.
  - Pro $u \in S$ a $v \in T$ máme $f(u,v) = c(u,v)$, jinak $(u,v) \in E_f$ a to dává $v \in S$.
  - $|f| = f(S,T) = c(S,T)$.

Hlavní věta

Nechť f je tok v G se zdrojem s a spotřebičem t. Pak následující je ekvivalentní.

1. f je maximální tok.
2. Reziduální síť G_f nemá zlepšující cestu.
3. $|f| = c(S,T)$ pro nějaký řez (S,T) v G.

Důkaz.

- $(3) \Rightarrow (1)$:
  - $|f| \leq c(S,T)$ pro libovolný řez (S,T).
  - Z $|f| = c(S,T)$ plyne maximalita f.

□

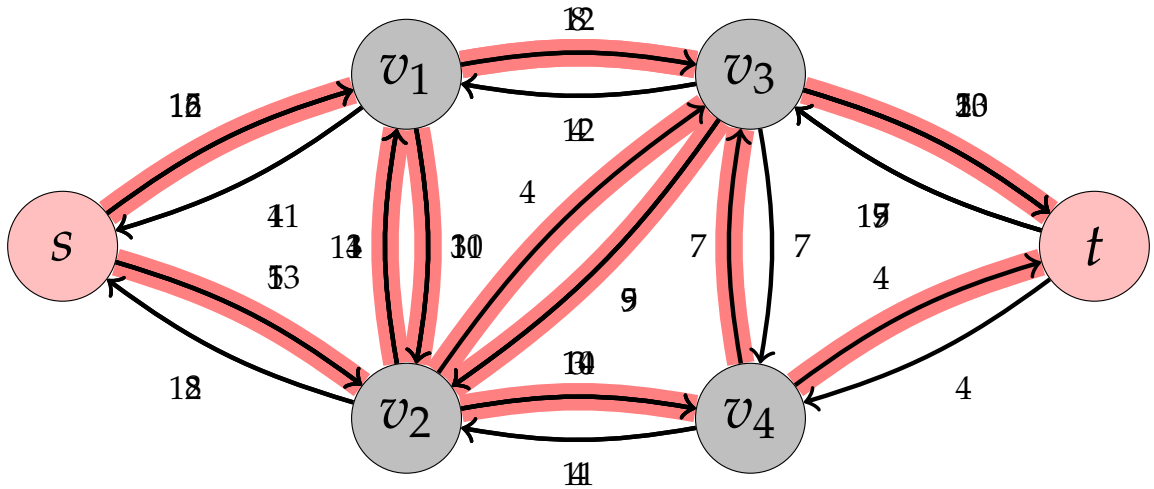
Základní Ford-Fulkersonův algoritmus

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus

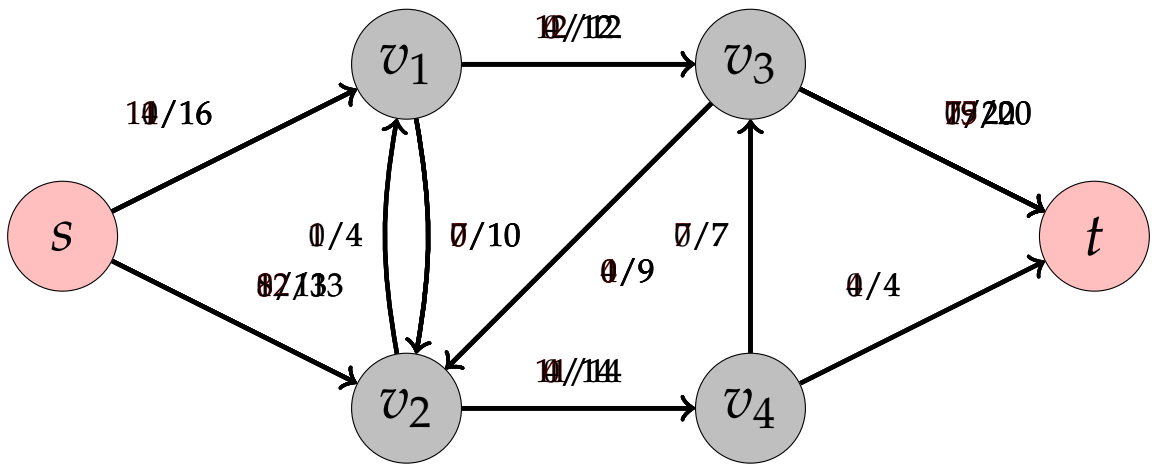
FORD-FULKERSON(G, s, t)
1 **for** každou hranu $(u, v) \in E$
2 **do** $f[u, v] \leftarrow 0$
3 $f[v, u] \leftarrow 0$
4 **while** existuje cesta p z s do t v reziduální síti G_f
5 **do** $c_f(p) \leftarrow \min\{c_f(u, v) : (u, v)$ na $p\}$
6 **for** každou hranu (u, v) na p
7 **do** $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$
8 $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$

- Složitost závisí na řádku 4.
- Prohledávání do šířky dává složitost $O(nm^2)$ – tzv. Edmonds-Karpův algoritmus.

Základní Ford-Fulkersonův algoritmus – příklad



Obrázek: Reziduální síť a cesta v ní z s do t.



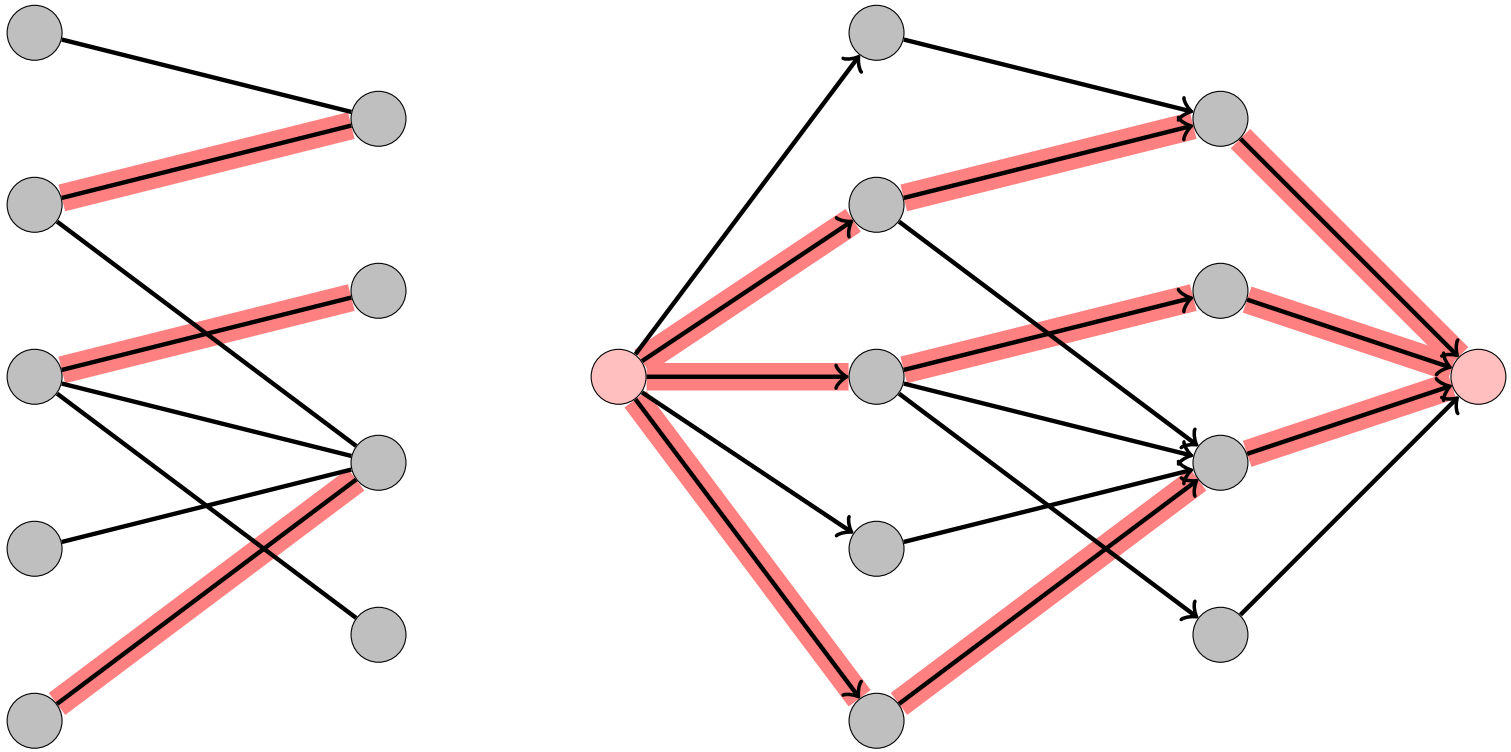
Obrázek: Vylepšený tok podle výše uvedené cesty.

Maximální párování v bipartitním grafu

Maximální párování v bipartitním grafu

- Nechť $G = (V, E)$ je neorientovaný graf.
- Párování v G je podmožina hran $M \subseteq E$ taková, že pro každý uzel $v \in V$, v je incidentní s nejvýše jednou hranou z M.
- Uzel je popárován, pokud je incidentní s nějakou hranou z M.
- Maximální párování je párování s maximální kardinalitou.
- Omezujeme se pouze na bipartitní grafy, tj. takové, kde V se dá rozložit na $V = L \cup R$, $R \cap L = \emptyset$ a $E \subseteq L \times R$.
- Použijeme Ford-Fulkersonovu metodu.

Transformace na problém nalezení maximálního toku



Obrázek: Bipartitní graf a odpovídající síť. Vyznačeno maximální párování a maximální tok (kapacita hran 1)

- Složitost $O(nm)$.

Barvení grafů

Notace

- Nechť $G = (V, E)$ je graf.
- Cíl: obarvit hrany/uzly tak, aby žádné dvě incidentní hrany (dva incidentní uzly) neměly stejnou barvu.
- Formálně, obarvení je funkce

$$f : E \to B$$

  ($f : V \to B$), kde B je nějaká množina barev a $f(e_1) \neq f(e_2)$ pro $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$ ($f(u) \neq f(v)$, pokud $\{u, v\}$ je hrana).
- $\psi_e(G)$ značí minimální počet barev potřebný k hranovému obarvení G.
- $\psi_v(G)$ značí minimální počet barev potřebný k (vrcholovému) obarvení G.
- Δ značí maximální stupeň grafu G.

Hranové barvení grafů

Hranové barvení grafů

- Jednoduché pozorování
- $\Delta \leq \psi_e(G)$.

Věta 29.
Pokud je G bipartitní, pak $\psi_e(G) = \Delta$.

Důkaz

- Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- $|E| = 1$ – snadné.
- Nechť všechny až na jednu hranu jsou obarveny nejvýše Δ barvami.
- Nechť (u, v) je neobarvená hrana.
- Protože máme k dispozici Δ barev, alespoň jedna barva není incidentní s u a alespoň jedna není incidentní s v.
- Pokud jsou tyto dvě barvy stejné, tak máme hotovo.
- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.

Hranové barvení grafů

- Nechť jsou tedy různé, označené postupně C_1 a C_2.
- Nechť $H_u(C_1, C_2)$ je podgraf obsahující u a všechny hrany dosažitelné z u obarvené pouze barvami C_1 a C_2.
- Protože (u, v) je hrana, patří u a v do různých komponent bipartitního grafu.
- Pak ale každá cesta z u do v v $H_u(C_1, C_2)$ musí mít poslední hranu obarvenou C_2.
- Hrana obarvená C_2 však není incidentní s v, proto v není v $H_u(C_1, C_2)$.
- Záměnou barev C_1 za C_2 a naopak v $H_u(C_1, C_2)$ dostaneme, že C_2 není incidentní s u.
- (u, v) tedy může být obarvena C_2. □

Hranové barvení grafů

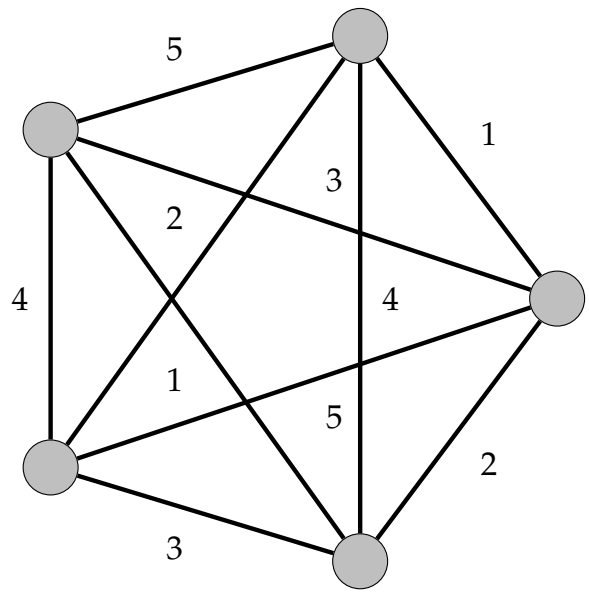
Věta 30.

Pokud je G úplný graf s n uzly, pak $\psi_e(G) = \begin{cases} \Delta & n \text{ sudé} \\ \Delta + 1 & n \text{ liché} \end{cases}$

Důkaz

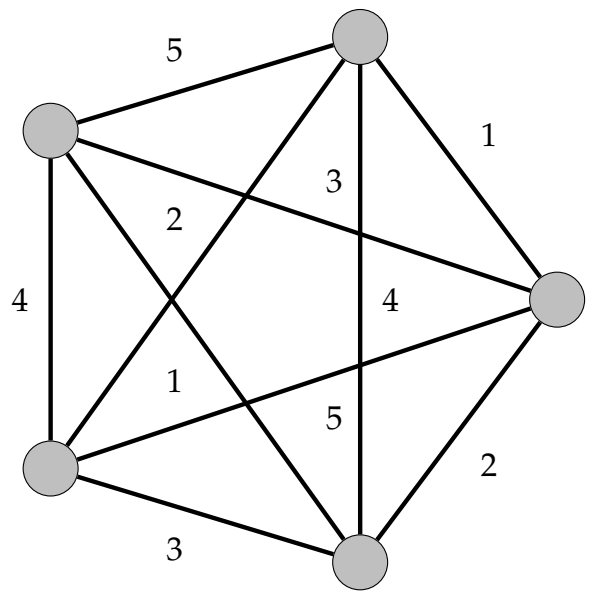
- Pokud je n liché, nakresleme graf jako pravidelný polygon (viz dále).
- Obarvíme hraniční hrany barvami 1 až $n = \Delta + 1$.
- Každá vnitřní hrana je obarvena stejně, jako s ní paralelní hrana.

Hranové barvení grafů



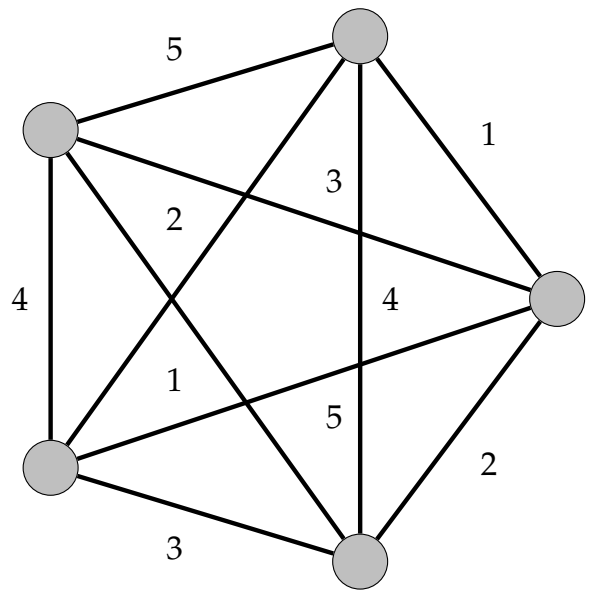
Hranové barvení grafů

- Nejde obarvit $\Delta = n - 1$ barvami:
- Pokud by šlo, pak protože G má $\frac{1}{2}n(n-1)$ hran, alespoň $\frac{1}{2}n$ hran by mělo stejnou barvu.
- Nechť $M \subseteq E$ taková, že žádné dvě hrany z M nejsou incidentní.
- Pak $|M| \leq \frac{1}{2}(n-1)$ – (dokažte).



Hranové barvení grafů

- Konečně, nechť n je sudé.
- Dívejme se na G jako na úplný graf G' na $n-1$ uzlech s jedním uzlem navíc spojeným se všemi ostatními uzly.
- Použijme předchozí postup na G'.
- V každém uzlu schází jedna barva.
- Tyto barvy jsou navzájem různé, proto můžeme ony nové hrany jimi obarvit.
- Použito pouze $\Delta = n - 1$ barev. □



Hranové barvení grafů

Věta 31.
Nechť G je prostý graf. Pak $\Delta \leq \psi_e(G) \leq \Delta + 1$.

Důkaz

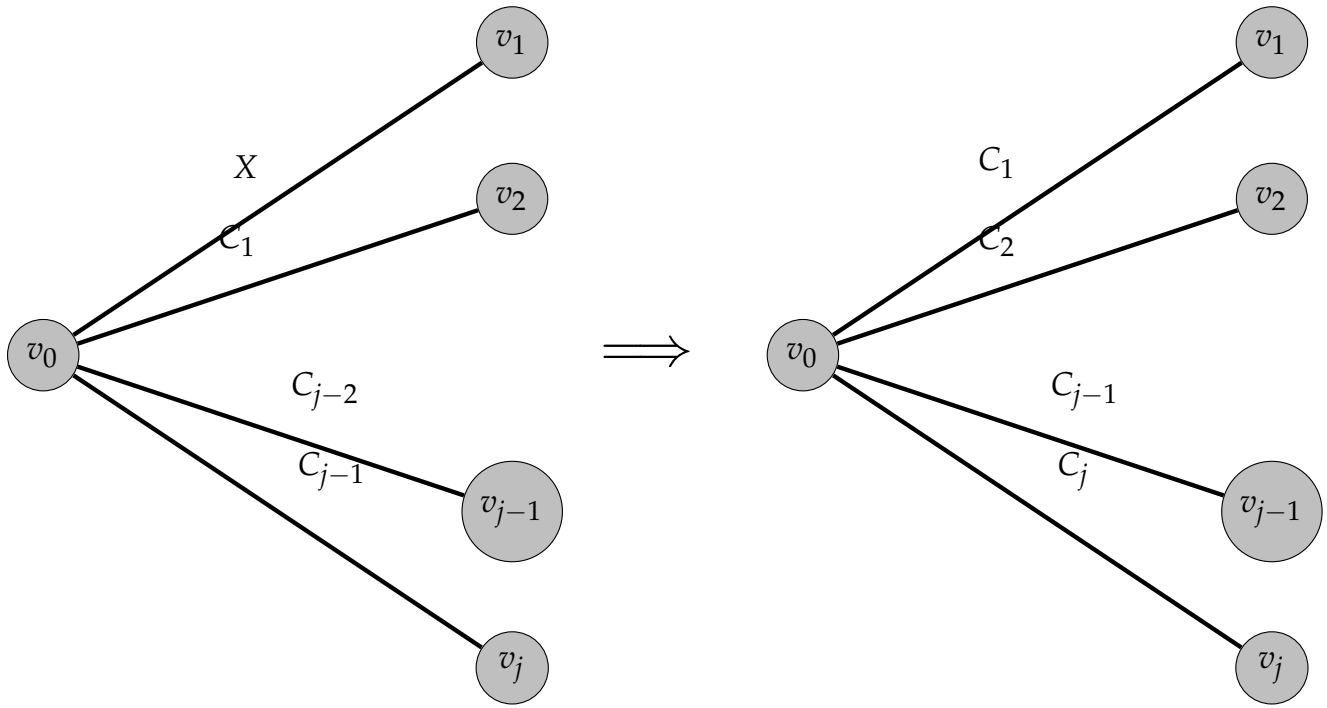
- Nutno ukázat, že $\psi_e(G) \leq \Delta + 1$.
- Indukcí k počtu hran.
- Pro jednu hranu platí.
- Nechť tedy všechny hrany kromě hrany (v_0, v_1) jsou obarveny nejvýše $\Delta + 1$ barvami.
- Alespoň jedna barva není ve v_0 a alespoň jedna není ve v_1.
- Pokud jde o tutéž barvu, hotovo.

Hranové barvení grafů

- Nechť tedy C_0 je barva, která není ve v_0 a C_1 není ve v_1.
- Konstruujme posloupnost hran $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots$ tak, že
  - C_i není ve v_i a
  - (v_0, v_{i+1}) má barvu C_i.
- Mějme tedy posloupnost $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_i)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_i$, pro nějaké $i \geq 0$.
- Všimněme si, že máme nejvýše jednu hranu, (v_0, v), s barvou C_i.
  - Pokud takové v existuje a $v \notin \{v_1, v_2, \ldots, v_i\}$, pak přidáme hranu (v_0, v_{i+1}), kde $v_{i+1} = v$, a C_{i+1} je barva, která není ve v_{i+1}.
  - Jinak ukončíme budování posloupnosti.
- Každá posloupnost končí s nejvýše Δ prvky.

Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - i) Neexistuje hrana (v_0, v) s barvou C_j, pak uděláme následující přebarvení $(X \neq C_j)$:



Hranové barvení grafů

- Nechť výsledná posloupnost je $(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots, (v_0, v_j)$ a $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_j$, pro nějaké $j \geq 0$.
  - ii) Nechť existuje $k < j$ takové, že (v_0, v_k) má barvu C_j.
    - Pak pro $i < k$ přebarvíme hrany jako výše, tj. (v_0, v_i) dostane barvu C_i.
    - (v_0, v_k) zůstane neobarvená.
- Každá komponenta $H(C_0, C_j)$ – podgraf obsahující všechny hrany barvy C_0 a C_j – je buď cesta, nebo cyklus, protože každý uzel má nejvýše jednu hranu barvy C_0 a jednu barvy C_j.
- Alespoň jedna barva z C_0 a C_j není v každém z uzlů v_0, v_k, v_j.
- Proto ne všechny v jedné komponentě $H(C_0, C_j)$:
  $v_0 \xrightarrow{C_j} x \xrightarrow{X} y \ldots \xrightarrow{C_0} v_k$ a už se nedostaneme do v_j.

Hranové barvení grafů

a) $v_0 \notin H_{v_k}(C_0, C_j)$ – komponenta $H(C_0, C_j)$ obsahující v_k – pak $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_k}(C_0, C_j)$, což dává, že C_0 není ve v_k.

- C_0 není ani ve v_0, proto obarvíme (v_0, v_k) barvou C_0.

b) $v_0 \notin H_{v_j}(C_0, C_j)$, pak přebarvíme

  - (v_0, v_i) barvou C_i, $k \leq i < j$,
  - (v_0, v_j) zůstane neobarvená.

- Při přebarvení se nepoužila ani C_0, ani C_j, proto $H(C_0, C_j)$ nezměněno.
- Opět $C_0 \leftrightarrow C_j$ v $H_{v_j}(C_0, C_j)$ a máme, že C_0 není ve v_j.
- Obarvíme (v_0, v_j) barvou C_0. □

Hranové barvení grafů

- Předchozí důkaz dává polynomiální algoritmus.
- Vidíte ho? :-)
- Jaká je složitost?

- Problém, zda $\psi_e(G) = \Delta$ je NP-úplný.

(Vrcholové) barvení grafů

Barvení grafů

- Je graf obarvitelný nejvýše k barvami? je NP-úplný problém.

Věta 32.
Libovolný (prostý) graf G lze obarvit $\Delta + 1$ barvami.

Důkaz.

- Indukcí k n.
- $n = 1$, hotovo.
- Pokud přidáme uzel u, pak bude spojen nejvýše s Δ jinými uzly.
- Barev máme $\Delta + 1$, proto můžeme u obarvit nějakou barvou.

□

Barvení grafů

- Ve většině případů ale platí, že $\psi_v(G) < \Delta + 1$.
- Příklad:
- G planární, pak $\psi_v(G) \leq 4$, přitom $\Delta = k$, pro libovolné $k > 0$.

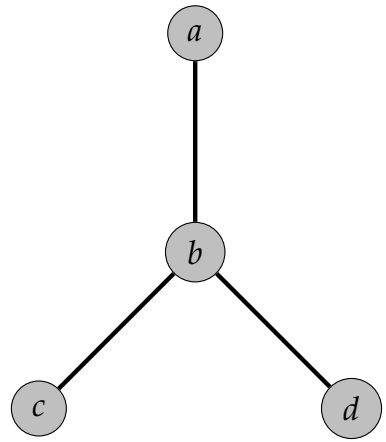
- Rychlosoutěž: Jaký algoritmus na obarvení uzlů vás napadne?

Chromatický polynom

Chromatický polynom

- Nechť $P_k(G)$ označuje počet způsobů obarvení grafu G k barvami.
- $P_k(G)$ je polynom.

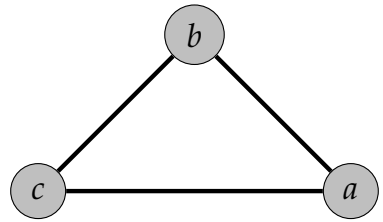
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_1.

- b . . . dostane libovolnou z k barev.
- a, c, d . . . libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- $P_k(G_1) = k(k-1)^3$
- Obecně, nechť T_n je strom na n uzlech. Pak $P_k(T_n) = k(k-1)^{n-1}$.

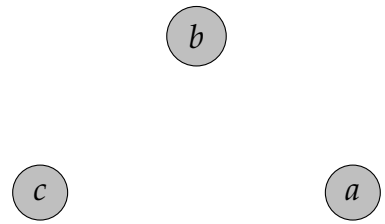
Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2.

- a ... dostane libovolnou z k barev.
- b ... libovolnou z $k-1$ zbývajících barev.
- c ... libovolnou z $k-2$ zbývajících barev.
- $P_k(G_2) = k(k-1)(k-2)$
- Obecně, nechť K_n je úplný graf na n uzlech.
- Pak $P_k(K_n) = \frac{k!}{(k-n)!}$

Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_2'.

- a . . . dostane libovolnou z k barev.
- b . . . libovolnou z k barev.
- c . . . libovolnou z k barev.
- $P_k(G_2') = k^3$
- Obecně, nechť Φ_n je graf na n uzlech bez hran.
- Pak $P_k(\Phi_n) = k^n$

Chromatický polynom

- Platí: Pokud $k < \psi_v(G)$, pak $P_k(G) = 0$.

- Nechť G je graf.
- Jak sestrojit $P_k(G)$?

- Značení:
- $G - (u, v)$ je graf vzniklý z G odebráním hrany (u, v)
- $G \circ (u, v)$ je graf vzniklý z G sloučením uzlů u a v.

Chromatický polynom

Věta 33.
Nechť (u,v) je hrana v G, pak

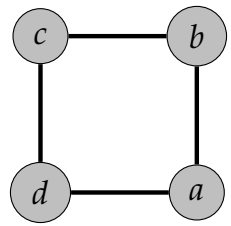
$$P_k(G) = P_k(G - (u,v)) - P_k(G \circ (u,v)) .$$

Důkaz.

- $P_k(G)$ je počet obarvení, kde u a v mají různou barvu.
- Všechna tato obarvení jsou zahrnuta i v $P_k(G - (u,v))$.
- $P_k(G - (u,v))$ však navíc obsahuje i ta obarvení, kde u a v mají stejnou barvu.
- Odečteme je tedy v $P_k(G \circ (u,v))$.

□

Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_3.

- $P_k(G_3) = P_k(\Phi_4) - 4P_k(\Phi_3) + 6P_k(\Phi_2) - 3P_k(\Phi_1)$
  $= k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$

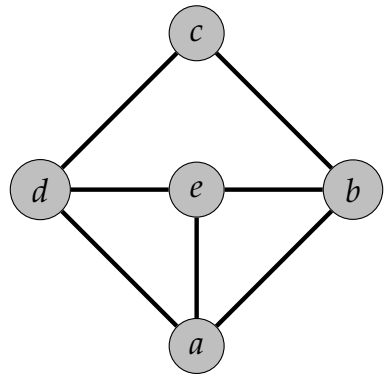
Chromatický polynom

Věta 34.
Nechť (u,v) je hrana v G, pak

$$P_k(G) = P_k(G - (u,v)) - P_k(G \circ (u,v))\,.$$

- Pokud má graf hodně hran, je lepší použít přeformulovanou variantu:
- $P_k(G) = P_k(G + (u,v)) + P_k((G + (u,v)) \circ (u,v))$
- tj., doplňujeme na úplný graf.

Chromatický polynom



Obrázek: Graf G_4.

- $P_k(G_4) = P_k(K_5) + 3P_k(K_4) + 2P_k(K_3)$
  $= k(k-1)(k-2)(k^2-4k+5)$

Chromatický polynom

- Nyní máme, že $\psi_v(G)$ je minimální k takové, že $P_k(G) > 0$.

- $\psi_v(G_3) = 2$
- $\psi_v(G_4) =?$

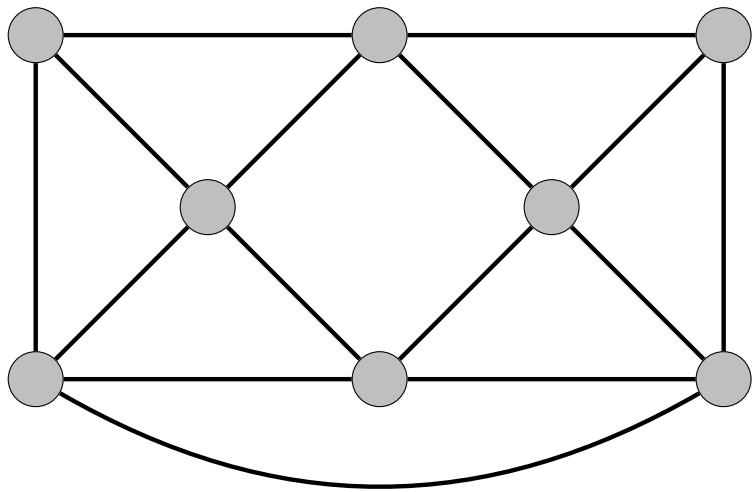
Eulerovské tahy

L. Euler a W. R. Hamilton

- Leonhard Euler (1707 – 1783, švýcarský matematik)
  - sedm mostů města Královce
  - průchod grafem přes všechny hrany právě jednou.
- William Rowan Hamilton (1805 – 1865, anglický matematik)
  - zeměpisná hra průchodu 20 měst na vrcholech pravidelného dvanáctistěnu
  - průchod grafem přes všechny vrcholy právě jednou.
- Otázka: Jak se vyznačují eulerovské/hamiltonovské grafy?
- Alternativní definice: Cyklus = uzavřený tah

Eulerovský graf

- Eulerovský graf je graf, který obsahuje eulerovský tah, tj. tah procházející všemi hranami právě jednou.



Věta o existenci eulerovského tahu

Věta 35.

Neorientovaný graf G má eulerovský tah, právě když je G souvislý a počet vrcholů s lichým stupněm je 0 nebo 2.

Důkaz

- Podmínka nutná je zřejmá: Pokud existuje eulerovský tah v G, pak je G souvislý a buď je tah uzavřený, nebo oba okrajové vrcholy mají lichý stupeň.
- Podmínka postačující: Indukcí k mohutnosti množiny hran.
- Předpokládejme, že $G = (V_G, E_G)$ s $|E_G| > 2$ splňuje tuto větu.
- Obsahuje-li G dva uzly s lichým stupněm, označme je v_1 a v_2.
- Uvažujme průchod po uzavřeném (příp. otevřeném) tahu $T = (V_G, E_T)$ z uzlu v_i (příp. v_1), dokud nenarazím na uzel v_j, u kterého jsem prošel všechny incidentní hrany.
  (a) žádný vrchol lichého stupně $\Rightarrow v_i = v_j$.
  (b) jinak nutně $\Rightarrow v_j = v_2$.

Věta o existenci eulerovského tahu

Důkaz (pokračování)

- Nechť $G' = G - T = (V_{G'} = \{u, v | (u, v) \in E_G - E_T\}, E_G - E_T) \Rightarrow$ potencionálně nesouvislý, jen sudé stupně.
- Z IP má G' eulerovský tah pro každou komponentu.
- Ze spojitosti G plyne, že $V_T \cap V_{G'} \neq \emptyset$.
- Do T vložíme eulerovské tahy z G' přes libovolné společné uzly. □

Orientovaný eulerovský tah

Orientovaná kostra grafu $G = (V, E)$ je orientovaný strom $T = (V, E')$ s kořenem $u \in V$, kde $E' \subseteq E$ a $d_+(u) = 0$ a $d_+(v) = 1$ pro všechna $v \in V - \{u\}$.

Vyvážený graf $G = (V, E)$ je orientovaný graf s $d_+(u) = d_-(u)$ pro všechny $u \in V$.

Věta 36.
Orientovaný graf $G = (V, E)$ má eulerovský tah, právě když je G po symetrizaci souvislý a platí buď, že G je vyvážený, nebo existují dva různé uzly $v_1, v_2 \in V$ takové, že

$$d_-(v_1) = d_+(v_1) + 1 \quad \text{a} \quad d_+(v_2) = d_-(v_2) + 1 \quad \text{a}$$

$$\text{pro každé } v \in V - \{v_1, v_2\},\ d_-(v) = d_+(v)$$

Věta o kostře orientovaného eulerovského grafu

Věta 37.
Mějme orientovaný eulerovský graf $G = (V, E)$ a jeho podgraf T, který vznikne průchodem eulerovského tahu z libovolného uzlu u tak, že do T přidáváme pro každý uzel $v \neq u$ první hranu vedoucí do tohoto uzlu. Pak T je orientovaná kostra grafu G s kořenem v uzlu u.

Důkaz

- Z konstrukce T platí platí pro T, že $d_+(u) = 0$ a $d_+(v) = 1$ pro všechna $u \neq v$, $u, v \in V$.
- Tedy T má $n - 1$ hran. Nyní ukažme acykličnost (sporem):
- Předpokládejme, že T obsahuje cyklus dokončený hranou (v_i, v_j).
- $v_j \neq u$, protože $d_+(u) = 0$.
- Protože (v_i, v_j) uzavírá cyklus, bylo v_j již zpracováno, což odporuje konstrukci T. Spor! □

Věta o orientovaném eulerovském tahu

Věta 38.
Je-li G souvislý a vyvážený orientovaný graf s orientovanou kostrou T s kořenem u, pak eulerovský cyklus v reverzním směru lze zjistit následovně:

(a) *Začneme libovolnou hranou incidentní k u.*

(b) *Další hrany vybíráme jako incidentní k aktuálnímu uzlu takové, že:*
   (i) *hrana ještě nebyla vybrána,*
   (ii) *žádná hrana z T se nevybere, dokud lze vybrat jinou.*

(c) *Hledání končí, když aktuální uzel nemá incidentní žádné nepoužité hrany.*

Důkaz

- Vyváženost zaručuje konec v kořenu u.
- Předpokládejme, že cyklus neobsahuje hranu (v_i, v_j).

Věta o orientovaném eulerovském tahu

Důkaz

- Předpokládejme, že cyklus neobsahuje hranu (v_i, v_j).
- Kvůli vyváženosti musí být v_i koncový pro další nevyužitou hranu (v_k, v_i).
- Mějme (v_k, v_i) hranu z T, takže nebude použita kvůli kroku (b(ii)).
- Nyní následujme sekvenci hran zpětně do u.
- Protože G je vyvážený, najdeme nevyužitou hranu incidentní s u, což je spor s krokem (c). □

Algoritmus hledání orientovaného eulerovského tahu

EULER-CIRCUIT(G)

1 Najdi orientovanou kostru $T = (V, E_T)$ grafu $G = (V, E)$
2 **for** každý uzel $v \in V$
3 **do** $A[v] \leftarrow \emptyset$
4 $I[v] \leftarrow 0$
5 **for** každou hranu $(v_i, v_j) \in E$
do if $(v_i, v_j) \in E_T$
then přidej v_i na konec seznamu $A[v_j]$
else přidej v_i na začátek seznamu $A[v_j]$
6 $EC \leftarrow \emptyset$
7 $CV \leftarrow u$
8 **while** $I[CV] \leq d_+(CV)$
9 **do** přidej CV na začátek seznamu EC
10 $I[CV] \leftarrow I[CV] + 1$
11 $CV \leftarrow A[CV][I[CV]]$
12 Vypiš EC

Algoritmus hledání orientovaného eulerovského tahu

Analýza časové složitosti

- Eulerův graf má vždy $m \geq n$.
- Řádek 1: DFS, zjistím nejvyšší f a pak DFS z uzlu s nejvyšším $f \Rightarrow O(m)$.
- V cyklu *while* vždy inkrementujeme $I[CV]$, takže $\sum_{v \in V} d_+(v) = \Theta(m)$.
- Celkově tedy časová složitost $O(m)$.

Aplikace eulerovského tahu

- de Bruijnova posloupnost (žádné dva podřetězce délky k nejsou stejné)
- Úloha čínského pošťáka, který má projít všechny ulice města a vrátit se do výchozího místa.
  - Je dán orientovaný kladně ohodnocený souvislý graf.
  - Hledáme nejkratší uzavřený sled obsahující všechny hrany.
  - Optimální řešení pro graf, který není eulerovský: $O(m + n^3)$

Hamiltonovské cesty a kružnice

Hamiltonovské cesty a kružnice

- Hamiltonovský graf je graf, který obsahuje hamiltonovskou kružnici (cyklus), tj. uzavřenou cestu procházející všemi vrcholy právě jednou.
- Typy hamiltonovských úloh
  - zjištění existence (příp. nalezení) hamiltonovské cesty
  - optimalizační úlohy v ohodnocených grafech
- Všechny NP-úplné

Podmínky postačující pro neobecné grafy

Věta 39.
Každý úplný graf je hamiltonovský.

Důkaz

- Vezměme libovolnou permutaci vrcholů. (Ostatní důkazy za DÚ.)

Věta 40.
Každý orientovaný graf, jehož symetrizace je úplný graf, obsahuje hamiltonovskou cestu.

Věta 41.
Každý silně souvislý orientovaný graf, jehož symetrizace je úplný graf, je hamiltonovský graf.

Věta 42.
Je-li graf $G = (V, E)$ *takový, že* $|V| > 3$ *a* $\min_{v \in V}(d(v)) > \frac{n}{2}$, *pak je* G *hamiltonovský graf.*

Chvátalova věta (1972)

Věta 43.
Nechť G je neorientovaný graf s $n \geq 3$ vrcholy. Jestliže $d(v_1) \leq d(v_2) \leq \cdots \leq d(v_n)$ je soubor stupňů jeho vrcholů a platí-li, že

$$d(v_k) \leq k \Rightarrow d(v_{n-k}) \geq n-k \quad \text{pro každé } 1 \leq k \leq \frac{n}{2},$$

pak G obsahuje hamiltonovskou kružnici.

Jestliže posloupnost stupňů tuto podmínku nesplňuje, pak existuje neorientovaný graf o n vrcholech, který neobsahuje hamiltonovskou kružnici.

- První část zaručuje existenci hamilt. kružnice pro dost velké stupně.
- Druhá část ukazuje, že jde o nejlepší možnou podmínku postačující založenou pouze na stupních vrcholů.
- Důkaz je náročný, veden sporem a nekonstrukční.

Problém obchodního cestujícího

- Obchodní cestující má navštívit nejkratší cestou n měst a vrátit se zpět.
- Formálně: Nalezení nejkratší hamiltonovské kružnice v úplném neorientovaném ohodnoceném grafu.
- Převod optimalizační úlohy na úplný graf:
  - Doplním obecný graf na úplný, hrany ohodnotíme M.
  - M je dostatečně velké (např. suma vše ohodnocení).
  - Řeším optimalizační úlohu. Výsledek obsahuje přidanou hranu, právě když neexistuje řešení v obecném grafu.
- Aplikace: dopravní úlohy (rozvoz, zásobování), plánování procesů