GRAFOVÉ ALGORITMY - CVIČENÍ 6: MINIMÁLNÍ KOSTRY

Převzato z Cormen, Leiserson, Rivest, Stein: Introduction to algorithms. The MIT Press and McGraw-Hill, 2001; kapitola 23.

Příklad 1. Nechť (u,v) je hrana s minimální váhou v grafu $G=(V,E)$. Ukažte, že hrana (u,v) patří do nějaké minimální kostry.

Příklad 2. Pomocí protipříkladu vyvraťte následující tvrzení: Nechť $G=(V,E)$ je souvislý neorientovaný graf, který má všechny hrany ohodnoceny reálnou funkcí w definovanou nad E ($w\colon E\to\mathbb{R}$). Nechť A je podmnožina E ($A\subseteq E$) taková, že je obsažena v nějaké minimální kostře T. Nechť $(S,V-S)$ je nějaký řez grafu G respektující množinu A a nechť (u,v) je bezpečná hrana pro A, která kříží řez $(S,V-S)$. Potom (u,v) je lehká hrana pro řez $(S,V-S)$.

Příklad 3. Ukažte, že je-li hrana (u,v) obsažena v nějaké minimální kostře, potom je (u,v) lehkou hranou křížící nějaký řez.

Příklad 4. Ukažte takový souvislý graf, že množina hran $\{(u,v)\colon$ existuje řez $(S,V-S)$, kde (u,v) je jeho lehkou hranou$\}$ netvoří minimální kostru.

Příklad 5. Nechť e je hrana s maximálním ohodnocením v nějaké kružnici souvislého neorientovaného grafu $G=(V,E)$. Dokažte, že existuje minimální kostra grafu $G'=(V,E-\{e\})$ taková, že je zároveň minimální kostrou grafu G. Jinak řečeno, existuje minimální kostra grafu G, která neobsahuje hranu e.

Příklad 6. Dokažte, že graf bude mít právě jednu minimální kostru, pokud pro každý řez existuje právě jedna lehká hrana křížící tento řez.

Ukažte pomocí protipříkladu, že neplatí opačné tvrzení, že graf, který má právě jednu minimální kostru, má právě jednu lehkou hranu pro každý řez.

Příklad 7. Dokažte, že pokud váhy hran v grafu $G=(V,E)$ jsou větší jak 0, tak potom jakákoliv podmnožina hran, která spojuje všechny vrcholy V a má minimální váhu, musí být strom.

Pomocí protipříkladu ukažte, že stejný závěr neplatí, pokud hrany mohou být ohodnoceny záporně.

Příklad 8. Nechť T je minimální kostra $G=(V,E)$ a nechť L je seřazený seznam vah hran v T. Ukažte, že pro libovolnou jinou minimální kostru T' grafu G je L seřazeným seznamem vah hran.

Příklad 9. Nechť T je minimální kostra grafu $G=(V,E)$ a nechť V' je podmnožina V. Nechť T' je podgraf T indukovaný množinou V' a nechť G' je podgraf grafu G indukovaný V'. Ukažte, že pokud T' je souvislý, potom T' je minimální kostrou grafu G'.

Příklad 10. Nechť T je minimální kostra grafu G, který má hrany ohodnoceny funkcí w. Předpokládejme, že jedné hraně v T snížíme ohodnocení. Ukažte, že T je stále minimální kostra grafu G. Formálněji řečeno, vyberme hranu (x,y) z minimální kostry T a mějme $k > 0$ (pro snížení ohodnocení). Potom w' je definována jako $w'(u,v) = w(u,v)$ pro $(u,v) \neq (x,y)$ a $w'(u,v) = w(x,y) - k$ pro $(u,v) = (x,y)$. Ukažte, že T je minimální kostra G i při ohodnocení w'.

Příklad 11. Mějme graf G a jeho minimální kostru T. Uvažujme, že snížíme váhu nějaké hrany (u,v), která nepatří do T. Vytvořte efektivní algoritmus[1], který najde minimální kostru v modifikovaném grafu G'.

[1] Tj. algoritmus rychlejší než výpočet zcela nové minimální kostry.