Obecná polymorfní logika a její složitost

Radek Tesař
Informatika a výpočetní technika, ročník druhý, kombinované studium
Školitel: Richard Růžička

FIT VUT Brno
Božetěchova 2, Brno

itesar@fit.vutbr.cz

Abstrakt. Hypotéza: Existuje třída problémů, kterou lze efektivně řešit polymorfní elektronikou. Kritériem hodnocení je počet tranzistorů jednotlivých hradel nebo počet hradel ve složitějších obvodech. Klasické tranzistory (bipolární, unipolární) považujeme za ekvivalentní polymorfním. Dále existuje třída problémů, které nelze efektivně řešit polymorfní elektronikou (ale „neefektivně" řešitelná je).

Klíčová slova. Ambipolární tranzistor, číslicová logika, organická elektronika, polymorfní elektronika, logické hradla, číslicové obvody.

1 Úvod

V současné době se v oblasti elektrotechniky stále více diskutuje o nových technologiích, jmenovitě nanotechnologiích, organických polovodičích, ambipolárních technologiích a s tím spojené polymorfní elektronice [1]. Ta slibuje řešit požadavek na stále větší hustotu funkcionality integrovaných obvodů v závislosti na ploše čipu, spotřebě, případně dalších kritériích. Polymorfní elektronika se tedy intenzivně zkoumá (např. [2]), nicméně v pozadí zůstává teoretický vývoj této oblasti. Pro polymorfní obvody totiž nelze použít běžné návrhové metody a logiku. Většina vědeckých skupin, zabývající se takovou elektronikou, proto používá nějaké formy generických algoritmů, různé druhy rozhodovacích stromů a podobně [3]. Chybí však teoretický základ polymorfní elektroniky, logické vazby a v návaznosti na to pak rozhodnutí, pro jakou třídu aplikací je taková elekronika vhodná.

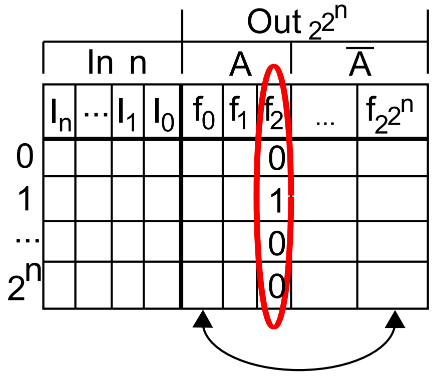
Začali jsme tedy zkoumat vlastnosti polymorfních obvodů a pokusili jsme se nastínit základní vlastnosti polymorfismu v logických obvodech.

2 Logická tabulka

Nejprve shrnu některé známé ale i ne příliš běžné skutečnosti, důležité pro pochopení dalšího textu.

Na obrázku 1 je strukura obecné tabulky logické funkce platná pro dvojkovou soustavu, kterou publikoval v roce 1904 například [5]. Tato tabulka nám ukazuje závislost počtu vstupů logického obvodu n na počtu kombinací uvedených vstupů 2^n a počtu výstupních funkcí 2^{2^n} tímto obvodem realizovatelných, kde $n \in \mathbb{Z}$. Každá logická funkce spadá buď do oblasti A, kde $A \in < 0, \frac{2^{2^n}}{2} - 1 >$ nebo $\overline{A}$, kde $\overline{A} \in < \frac{2^{2^n}}{2}, 2^{2^n} - 1 >$ a má negaci funkce v opačné oblasti.

Množina 2^{2^n} funkcí nám tedy určuje stavový prostor všech možných problémů, pro n vstupních proměnných. Na vektor výstupní funkce lze nahlížet jako číslo



Obrázek 1: Strukura logické tabulky

$$p(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i, N \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

Členu $a_i x^i$ pak odpovídá řádek x^i, a proměnná a_i má hodnotu odpovídající výstupní proměnné v tomto řádku. Příklad: $0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0 = 0010_b = 2_d$. Označení fce tedy odpovídá její evaluaci a negace funkcí jsou pak symetricky uspořádány.

3 Speciální případy

Pro je $n = 0$ platí, že $2^0 = 1$, to znamená, že tabulka má pouze jeden řádek, ale žádnou vstupní proměnnou a existují právě $2^{2^0} = 2$ funkce, které jsou vzájemně inverzní. První funkce spadá do oblasti A (kontradikce), zatím co její negovaná funkce (tautologie) spadá do oblasti $\overline{A}$. Zmiňované kontradikce a tautologie jsou tedy nejobecnější funkce a nejsou závislé na žádné vstupní proměnné.

Pro jednu vstupní proměnnou $n = 1$ platí, že $2^1 = 2$, to znamená, že tabulka má dva řádky a existují právě $2^{2^1} = 4$ funkce, kde 2 spadají do oblasti A a dvě do oblasti $\overline{A}$. První funkce f_0 v oblasti A je výše zmíněná kontradikce, negace této funkce je tautologie (funkce f_3), spadající do oblasti $\overline{A}$. Další dvě vzájemně inverzní funkce jsou identita ID (f_1) a negace NOT (f_2).

Pro dvě vstupní proměnné $n = 2$ platí, že $2^2 = 4$, a existují právě $2^{2^2} = 16$ funkcí. Všech 16 funkcí je zobrazeno v tabulce 2. Některé tyto funkce poprvé použil v reléových logických obvodech Claude Elwood Shannon [4], na základě prací Augusta De Morgana [6] a George Boolea [7].

Platí tedy, že každá funkce z $A \in < 0, \frac{2^{2^n}}{2} - 1 >$ existuje negace této funkce v $\overline{A}$, které jsou definovány následovně:

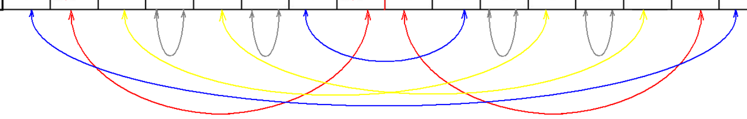
$$\forall f_a, a \in < 0, \frac{2^{2^n}}{2} - 1 >, \exists f_b, b \in < \frac{2^{2^n}}{2}, 2^{2^n} - 1 >: f_a = \overline{f_b} \Rightarrow b = 2^{2^n} - a. \tag{2}$$

Poznámka: Inverzní funkci získáme velmi snadno zařazením invertoru na výstup logické funkce.

4 Polymorfní obvody

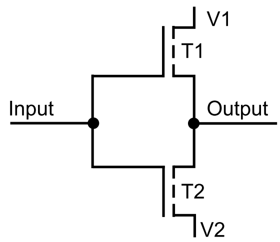
Polymorfní obvody jsou takové obvody, které jsou schopny záměrné a definované změny funkce za různých podmínek [3]. Příkladem může být změna logického hradla z funkce NAND na NOR, při změně teploty, nebo úrovně napájecího napětí (viz například [8]). Praktické využití polymorfismu v elektronice

x_1	x_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
1~~0~~	1~~0~~	0	0~~1~~	0	1	0	1	0	0~~1~~	0	1	0	1	0	1	0	1
1~~0~~	0~~1~~	0	1~~0~~	1	1	0	0	1	0~~1~~	0	0	1	1	0	0	1	1
0~~1~~	1~~0~~	0	1~~0~~	0	0	1	1	1	0~~1~~	0	0	0	0	1	1	1	1
0~~1~~	0~~1~~	0	1~~0~~	0	0	0	0	0	1~~0~~	1	1	1	1	1	1	1	1



Obrázek 2: Stavový prostor všech fcí pro n=2 a jejich doplňkové funkce.

	Y			
X	f_0	f_1	f_2	f_3
1~~0~~	0	0~~1~~	0	1
0~~1~~	0	1~~0~~	1	1



Obrázek 3: Realizace doplňkové funkce (negace), vpravo hradlo, které ji realizuje

se objevuje především díky ambipolárním tranzistorům, které jej umožňují přímočaře použít. Neexistuje však zatím teorie polymorfní logiky, která by umožnila zkoumání vlastností polymorfních funkcí, případně tříd problémů, pro které je tato logika vhodná. Proto jsme se zaměřili především na tuto oblast.

Zkoumáním jsme zjistili, že existují přirozené polymorfní funkce (takzvané doplňkové funkce k původní funkci), které jsou tvořeny podobně jako například negace. Doplňkové hradla realizující tyto funkce jsou konstrukčně nejjednodušší (vycházejí z původní funkce) a nejmenší, co se týká počtu tranzistorů. Důvodem je, že vychází z konvenčních (minimalizovaných) hradel a všechny tranzistory jsou využity v obou funkcích. Dále je však možné vytvářet polymorfní hradla, které realizují i jiné kombinace funkcí.

Doplňkovou funkci dostaneme při zachování zapojení obvodu a přepnutí polymorfního obvodu do druhého stavu. Máme–li například polymorfní hradlo, které mění funkci změnou polarity napájení, pak toto hradlo změnou napájení realizuje doplňkovou funkci k funkci f_n, kterou budeme značit $c(f_n)$. Získání takové doplňkové funkce je přímočaré – viz tabulka na obrázku 3 a dostaneme ji negací všech vstupních i výstupních proměnných.

Doplňková funkce se může zobrazit sama na sebe – rezistentní funkce, viz obrázek 3. Druhou možností je zobrazení na negaci funkce. Totéž dostaneme použitím invertoru, což ale zvýší složitost obvodu. Příkladem je tautologie na obrázku 3, která se zobrazí na kontradikci. Poslední možnost je zobrazení na jinou funkci. Z hlediska polymorfních obvodů nás zajímá především poslední případ.

5 Vlastnosti doplňkových funkcí

Doplňkové funkce jsou obousměrně inverzní a zachovávají své vlastnosti. Na obrázku 2 tvoří žluté funkce (f_2/f_{11} a f_4/f_{13}), nebo červené funkce (NAND/NOR a AND/OR) symetrický systém. Modré jsou funkce doplňkové, které jsou současně negací funkce (tautologie/kontradikce, XOR/XNOR). Šedé funkce jsou funkce jedné proměnné a zobrazí se samy na sebe (jsou rezistentní). To je způsobeno tím, že funkce jedné proměnné může realizovat pouze identitu/negaci.

- Tvoří – li funkce úplný logický systém, tvoří doplňková fce také úplný systém. Příkladem je polymorfní hradlo NAND/NOR.
- Pokud $f_x = c(f_x)$, pak je funkce rezistentní. Funkce jsou sudé a asymetrické podle osy $\frac{2^n}{2}$. Jsou to funkce jedné proměnné (šedé fce na obrázku 2).
- Pokud $f_x = f_y, f_x \wedge \neq c(f_x) \wedge c(f_x) = c(f_y)$, pak je doplňková fce k f_x současně její negací. Funkce jsou sudé a symetrické podle osy $\frac{2^n}{2}$. Na obrázku 2 jsou modré. Proto je např XOR obtížně realizovatelné polymorfními obvody.
- Pokud $f_x \neq f_y \wedge c(f_x) \neq c(f_y)$, pak funkce f_x a f_y tvoří spolu se svými doplňkovými funkcemi symetrický systém. Symetrický systém značí, že funkce f_x a f_y jsou symetricky uspořádány podle osy $\frac{2^{2^n}}{2}$ a proto jsou vzájemně negované. Funkce $c(f_x)$ a $c(f_y)$ jsou také symetricky uspořádány podle osy $\frac{2^{2^n}}{2}$ a proto jsou opět vzájemně negované. Funkce jsou liché, proto jsou vždy asymetrické. Můžeme počítat

$$(2^{2^n} - 1) - f_x = c(f_y)(2^{2^n} - 1) - c(f_x) = f_y, n \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

- Platí – li pro f_x že $|H| = |L|$ pak platí totéž i pro doplňkovou funkci (jedná se o „sudou funkci“). Platí – li pro f_x, že $|H| < |L|$, pak platí pro doplňkovou funkci $|H| > |L|, |H_{f_x}| = |L_{c(f_x)}|$. Funkce je asymetrická a „prohazuje“ počet H a L.
- Je – li fce závislá na určitých vstupních proměnných, je doplňková fce závislá na stejných vstupních proměnných.
- Z hlediska polymorfních obvodů vytvářejí zajímavé struktury především asymetrické funkce.

6 Obecný polymorfismus

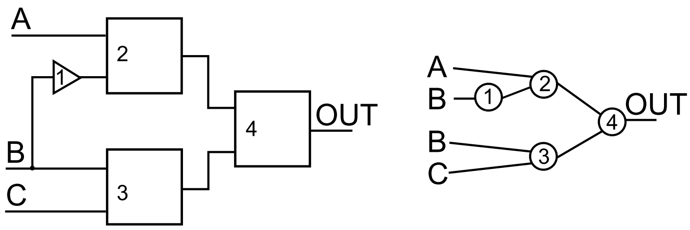
Doposud jsme se zabývali pouze polymofními obvody a hradly, které realizovaly polymorfně pouze dvě funkce (např. již zmiňované NAND/NOR, atd). Jedná se o speciální případ polymorfismu, který je nutno zobecnit, což jsme učinili následovně: Obecný polymorfní obvod můžeme zapsat jako

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} p_i a_j x^j, N \in \mathbb{Z}, M \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Kde p_i značí polymorfní stupeň, který nabývá diskrétních hodnot $< 0, 1 >$. Jedná se tedy o obdélníkovou matici $n * m$ prvků, kde n je počet polymorfních funkcí o m polynomech (m řádků log. tabulky o $\sqrt{m}$ vstupních proměnných). Takto lze tedy vytvořit i vícefunkční polymorfní hradla.

Výhodou tohoto zápisu je absorbce všech informací – hodnoty vstupních proměnných v daném řádku logické tabulky, odpovídající hodnoty výstupních fcí a hodnoty „polymorfismu“. Všechny polymorfní členy v tomto zápisu musí být vždy nepravdivé, kromě jediného. Pravdivost polymorfního členu vyplývá z pravdivosti vstupní podmínky (např. polarita napájecího napětí) a určuje která funkce je za daných podmínek aktivní.

Předpokládejme, že takové hradlo bude reagovat na změnu velikosti napájecího napětí U_{min} až U_{max} změnou výstupní funkce tak, že všechny funkce v rozsahu $f = 2^{2^n}$ budou rozmístěny lineárně. Pro $n = 1$ bude mít takové polymorfní hradlo 4 funkce, pro $n = 2$ bude počet funkcí 16, atd. Vycházíme z předpokladu, že analogová změna napětí v nějakém rozsahu je spojitá veličina, proto je možno daný interval rozdělit na libovolný počet diskrétních částí a tak realizovat polymorfní hradlo s libovolným počtem výstupních funkcí.



Obrázek 4: Obecné schéma zapojení a jeho syntaktický strom (vpravo).

Pro takové hradlo je tedy stavový prostor N všech realizovatelných funkcí v rozsahu $f = 2^{2^n}$ dán změnou velikosti napájecího napětí v rozsahu U_{min} až U_{max}. Pokud tedy připojíme takové hradlo na regulovatelný zdroj napětí a budeme plynule měnit napájecí napětí takového hradla potenciometrem od U_{min} do U_{max} v čase od t_0 do t_{max}, budeme mít na výstupu hradla v jednotlivých časových úsecích t všechny funkce realizovatelné takovým hradlem pro daný počet vstupních proměnných. Mějme tedy nějaký problém, který lze řešit v tomto stavovém prostoru N. Pokud budeme postupně měnit napájecí napětí takového polymorfního hradla, dostaneme řešení problému o složitosti 2^{2^n} v lineárním čase a to nejhůře t_{max}. Další zmenšení časové složitosti je možné použitím invertoru zařazeného na výstup hradla a zpřístupněním obou stavů současně – tím bychom snížili složitost na $t_{\frac{max}{2}}$.

7 Syntaxe a sémantika

Syntaxí rozumíme schéma zapojení, tedy jak jsou jednotlivé hradla nebo bloky propojeny. Syntaxi lze snadno zobrazit různými stromy (viz obrázek 4). Určuje tedy propojení bloků (motiv DPS), který nelze měnit. Na rozdíl od toho sémantika určuje funkci bloků nebo hradel – pro stejný syntaktický strom existuje více sémantických modelů. Cílem je v polymofní elektronice nalézt vhodné sémantické modely realizující potřebné funkce pro konkrétní syntaxi.

Problém tedy je, že máme dvě nebo více funkcí $(f_0, f_1, ..f_n)$, pro které potřebujeme vytvořit vhodné zapojení (syntaxi) tak, aby byly realizovatelné dostupnými polymorfními hradly (sémantika).

Na obrázku 4 je schéma zapojení obecného obvodu (vlevo) a jeho syntaktický strom (vpravo). Ve schématu jsou logické hradla kresleny záměrně jako obecné, protože změnou logické funkce každého hradla dosáhneme změnu výstupní funkce. Podívejme se na schéma z pohledu konvenční elektroniky. Můžeme psát

$$\Pi_{n=0}^{M} 2^{2^{n^{x_n}}}, M \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

Kde x_n značí počet n – vstupých logických prvků (hradel). Pro schéma z obrázku 4) pak vychází pro obsažený celého stavového prostoru $2^{2^{0^0}}.2^{2^{1^1}}.2^{2^{2^3}} = 16384$ variací s opakováním. Pokud však uvažujeme polymorfní elektroniku, roste nám složitost následovně:

$$\Pi_{n=0}^{M} \Pi_{p=0}^{Q} 2^{2^{n^{x_n^p}}}, M \in \mathbb{Z}, Q \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

Kde x_n značí počet n – vstupých logických prvků (hradel), které mají p-tý stupeň polymorfismu. Důležité však je, že obvody s $p = 1$ jsou konvenční logické obvody (bez polymorfní funkce). Pro schéma z obrázku 4) pak vychází pro obsažení celého stavového prostoru dokonce $2^{2^{0^0}}.2^{2^{1^{1^4}}}.2^{2^{2^{3^{16}}}} = 1.6069e^{60}$ variací s opakováním!

8 Závěr

Cílem práce bylo prokázat, že existuje ucelený set logických pravidel pro polymorfní elektroniku. V tom budeme pokračovat a zkoumat další pravidla, které bude možno využít při návrhu polymorfní elektroniky, stejně jako v současné číslicové elektronice například pomocí Booleovy algebry. Velmi důležitým cílem je také výzkum v oblasti syntézy a sémantiky. Dalším cílem je definovat, pro jakou třídu aplikací lze přirozeně využít polymorfní elektroniku, případně kde se již využití takové elektroniky nevyplatí. Ideálním výsledkem by pak byly návrhové pravidla, pomocí kterých bude možno jednoduše navrhovat a ověřovat polymorfní logické obvody.

Reference

[1] *Polymeric Polymorphic Electronics: Towards Multifunctional Logic Elements Based on Organic Semiconductor Materials*, Růžička, R., Šimek, V., Proceedings of CSE 2012 International Scientific Conference on Computer Science and Engineerig, Košice, SK, FEI TU v Košiciach, 2012, pages 154 – 161, ISBN 978-80-8143-049-7

[2] *Taking evolutionary circuit design from experimentation to implementation: some useful techniques and a silicon demonstration*, Stoica A., et al., Computers and Digital Techniques, IEE Proceedings – (Volume:151, Issue: 4), 2004, Pages: 295 – 300, DOI: 10.1049/ip-cdt:20040503.

[3] *Evolutionary Design of Gate-Level Polymorphic Digital Circuits* Lukáš Sekanina, Applications of Evolutionary Computing, Springer – Verlag Berlin Heidelberg, 2005, Pages: 185 – 194, DOI: 10.1007/978-3-540-32003-6-19.

[4] *A symbolic analysis of relay and switching circuits*, Shannon, Claude Elwood. Massachusetts Institute of Technology 1940, Thesis (M.S.) – Massachusetts Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering. Pages: 72.

[5] *Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic*, Huntington, E. V., Transactions of the American Mathematical Society, 5:3 (1904), Pages: 288 – 309.

[6] *Formal logic, or, The calculus of inference, necessary and probable*, De Morgan, Augustus. London: Taylor and Walton, 1847, pages: 384. Call number AJW-4210.

[7] *The mathematical analysis of logic: being an essay towards a calculus of deductive reasoning*, Boole, George, 1847, Cambridge : Macmillan, Barclay, & Macmillan, pages: 82, Call number ADN-0289.

[8] *REPOMO32 - New reconfigurable polymorphic integrated circuit for adaptive hardware*, Sekanina, L.; Ruzicka, R.; Vasicek, Z.; Prokop, R.; Fujcik, L., Evolvable and Adaptive Hardware, 2009. WEAH '09. IEEE Workshop on, vol., no., pages 39 – 46, April 30 2009 – March 2 2009, doi: 10.1109/WEAH.2009.4925666

[9] *Applications of Boolean Algebra: Claude Shannon and Circuit Design*, Janet Heine Barnett. Colorado State University – Pueblo, Loci, July 2013, DOI:10.4169/loci004000