Příklady pro cvičení 1. z IFJ:
Formální jazyky a operace nad nimi

Příklad 1.

Vypište prvních 5 prvků následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a\}$ v uspořádání podle délky řetězce:

a) $L = \{ a^{2^n} : n \geq 0 \}$
b) $L = \{a^n$: n je prvočíslo$\}$
(*Poznámka*: 1 není prvočíslo)

Řešení:

a) Jsou to řetězce: *a*, *aa*, *aaaa*, *aaaaaaaa*, *aaaaaaaaaaaaaaaa*
b) Jsou to řetězce: *aa*, *aaa*, *aaaaa*, *aaaaaaa*, *aaaaaaaaaaa*

Příklad 2.

Vytvořte konkatenaci následujících jazyků:

a) {***aa***, ***bb***}.{***aa***, ***bb***}
b) {***aa***, ***bb***}.{**ε**}
c) {***aa***, ***bb***}.$\emptyset$

Řešení:

Konkatenace jazyků L_1 a L_2 je definována: $L_1.L_2 = \{xy\colon x \in L_1, y \in L_2\}$. Což neformálně znamená, že výsledný jazyk $L_1.L_2$ obsahuje všechny řetězce, které vzniknou spojením (= konkatencí) řetězců x a y, přičemž řetězec x je obsažen v jazyce L_1 a řetězec y je obsažen v jazyce L_2.

a) {***aa***, ***bb***}.{***aa***, ***bb***} = {***aaaa***, ***aabb***, ***bbaa***, ***bbbb***}

b) {***aa***, ***bb***}.{**ε**} = {***aa*ε**, ***bb*ε**} = {***aa***, ***bb***}

c) {***aa***, ***bb***}.$\emptyset = \emptyset$

Konkatenace {***aa***, ***bb***}.$\emptyset = \emptyset$, neboť podle definice musí tento jazyk obsahovat všechny řetězce tvaru xy, přičemž řetězec x je obsažen v jazyce L_1 = {***aa***, ***bb***} a řetězec y je obsažen v jazyce $L_2 = \emptyset$. Protože $L_2 = \emptyset$, nemůžeme najít žádný řetězec y, který by byl obsažen v tomto jazyce, tím spíše tedy nemůžeme ani vytvořit žádný řetězec xy. Konkatenace jazyků {***aa***, ***bb***} a $\emptyset$ tedy neobsahuje žádný řetězec a proto {***aa***, ***bb***}.$\emptyset = \emptyset$.

Příklad 3.

Vytvořte průnik jazyků $L_1 = \{a^{2n}\colon n \geq 1\}$ a $L_2 = \{a^{3n}\colon n \geq 1\}$.

Řešení:

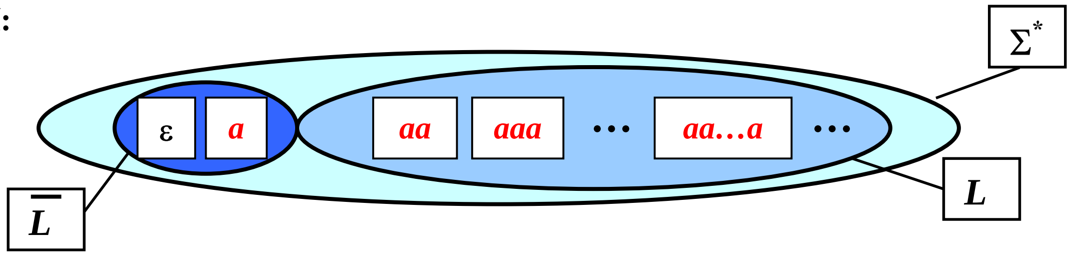
- Jazyk L_1 obsahuje řetězce samých symbolů a, které jsou sudé délky:
$$L_1 = \{aa, aaaa, aaaaaa, \dots\}$$
- Jazyk L_2 obsahuje řetězce samých symbolů a, které mají délku dělitelnou číslem 3:
$$L_2 = \{aaa, aaaaaa, aaaaaaaaa, \dots\}$$

- Průnikem těchto dvou jazyků je tedy jazyk, jehož řetězce obsahují samé symboly a, a navíc mají sudou délku dělitelnou číslem 3, což znamená, že jejich délka je dělitelná číslem 6. Formálně můžeme tento jazyk zapsat jako:

$$L_1 \cap L_2 = \{a^{6n}: n \geq 1\}$$

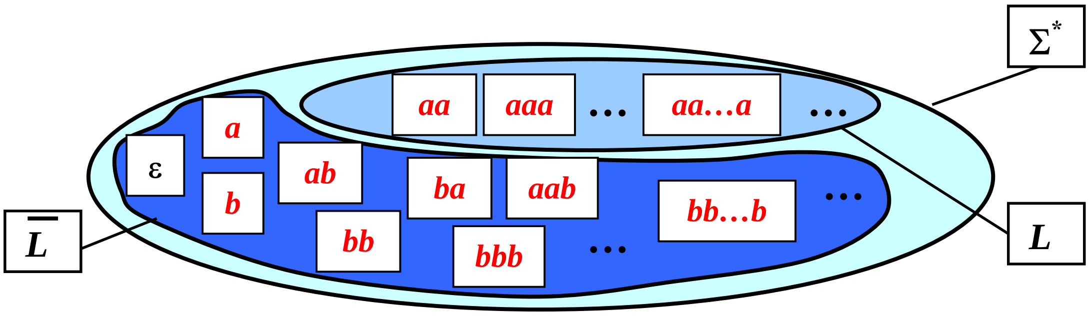
Příklad 4.
Určete, zda doplněk jazyka $L = \{a^n: n \geq 2\}$ je jazyk konečný, pokud
a) L je definován nad abecedou $\Sigma = \{a\}$
b) L je definován nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$

Řešení:
a)



Z obrázku je patrné, že $\overline{L} = \{\varepsilon, a\}$. $\overline{L}$ obsahuje právě 2 řetězce, $\overline{L}$ je tedy konečný jazyk.

b)



Jazyk $\overline{L}$ obsahuje všechny řetězce nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, které nepatří do jazyka L. Zřejmě například libovolný řetězec, který obsahuje pouze symboly b, nepatří do jazyka L, tedy patří do jazyka $\overline{L}$. Již těchto řetězců je nekonečně mnoho, proto jazyk $\overline{L}$ je nekonečný.

Příklad 5.
Určete výčtem prvků jazyk L^3, pokud $L = \{aa, bb\}$.

Řešení:
Mocnina jazyka je rekurzivně definována: $L^0 = \{\varepsilon\}$; $L^i = L.L^{i-1}$ pro všechna $i \geq 1$.

Postupně tedy dostáváme:

- $L^0 = \{\varepsilon\}$
- $L^1 = L.L^0 = \{aa, bb\}.\{\varepsilon\} = \{aa, bb\}$
- $L^2 = L.L^1 = \{aa, bb\}.\{aa, bb\} = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}$
- $L^3 = L.L^2 = \{aa, bb\}.\{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\} =$
  $\{aaaaaa, aaaabb, aabbaa, aabbbb, bbaaaa, bbaabb, bbbbaa, bbbbbb\}$

Příklad 6.
Určete počet všech jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, jejichž iterací vznikne konečný jazyk.

Řešení:

- Iterace jazyka L, L^*, je definována: $L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^i \cup \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} L^i$

a) Uvažujme jazyk $L = \varnothing$:
$L^0 = \{\varepsilon\}$
$L^1 = L.L^0 = \varnothing.\{\varepsilon\} = \varnothing$
$L^2 = L.L^1 = \varnothing.\varnothing = \varnothing$
…
$L^i = L.L^{i\text{-}1} = \varnothing.\varnothing = \varnothing$
…

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^i \cup \ldots = \{\varepsilon\} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \ldots \cup \varnothing \cup \ldots = \{\varepsilon\}$
Pro $L = \varnothing$ je $L^* = \{\varepsilon\}$ a to je konečný jazyk.
(**Poznámka:** všimněte si, že $\varnothing^*$ **=** $\{\varepsilon\}$ a nikoliv prázdný jazyk!)

b) Uvažujme jazyk $L = \{\varepsilon\}$:
$L^0 = \{\varepsilon\}$
$L^1 = L.L^0 = \{\varepsilon\}.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
$L^2 = L.L^1 = \{\varepsilon\}.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
…
$L^i = L.L^{i\text{-}1} = \{\varepsilon\}.\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$
…

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \ldots \cup L^i \cup \ldots = \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} \cup \ldots \cup \{\varepsilon\} \cup \ldots = \{\varepsilon\}$
Pro $L = \{\varepsilon\}$ je $L^* = \{\varepsilon\}$ a to je konečný jazyk.

c) Uvažujme jakýkoliv jiný jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, který tedy obsahuje aspoň jeden neprázdný řetězec (označme jej x). Potom zřejmě L^* obsahuje řetězce $x^1, x^2, x^3, \ldots, x^i, \ldots$, kterých je nekonečně mnoho, proto L^* je **nekonečný jazyk**.

Závěr:
Nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$, existují pouze **2** jazyky jejichž iterací vznikne konečný jazyk a to: $\varnothing$**,** $\{\varepsilon\}$.

Příklad 7.
Pomocí operací nad konečnými jazyky popište následující jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b, \ldots, z\}$:

$$L = \{baba, prababa, praprababa, prapraprababa, \ldots\}$$

Řešení:

$$\boldsymbol{L = \{pra\}^*.\{baba\}}$$

Příklad 8.
Pomocí operací nad konečnými jazyky popište jazyk L nad abecedou $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9, +, –\}$ obsahující řetězce reprezentující celá čísla bez přebytečných nul. Například: 100, +100, –100 jsou řetězce jazyka L, ale 001 není řetězec jazyka L, neboť obsahuje přebytečné nuly.

Řešení:

$$\boldsymbol{L = \{+, –, \varepsilon\}.\{1, 2, ..., 9\}.\{0, 1, 2, ..., 9\}^* \cup \{0\}}$$

Pokud bychom uvažovali i –0 a +0 jako korektně zapsaná celá čísla, potom:

$$\boldsymbol{L = \{+, –, \varepsilon\}.\{1, 2, ..., 9\}.\{0, 1, 2, ..., 9\}^* \cup \{+, –, \varepsilon\}.\{0\}}$$